

# Теоретическая механика

**Часть 1**

**Кинематика**

# **Глава 3. Движение твёрдой среды**

# § 1. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

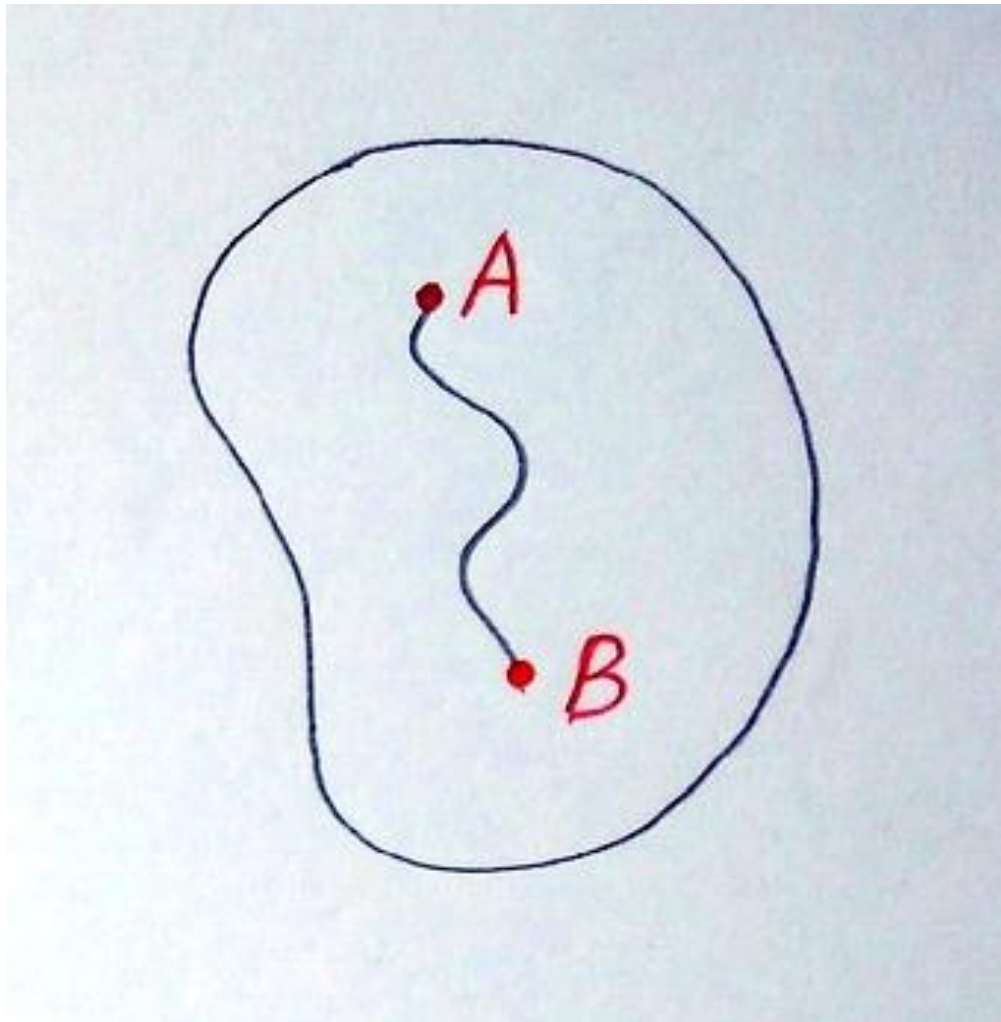
Рассмотрим некоторое множество  $\{A_\alpha\}$  отмеченных точек, которое будем называть «системой».

**Определение 1.** Система  $\{A_\alpha\}$  отмеченных точек называется *неизменяемой*, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

**Примеры:** ДСО  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ ; какая-либо система точек  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ , координаты которых не изменяются со временем.

**Определение 2.** *Твердым телом* называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

**Замечание.** Иногда в определение твердого тела добавляют условие *линейной связности*: для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».



**Примеры.** Конечная система точек  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ , координаты которых не изменяются со временем, — пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса  $R$  с центром в начале координат — пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

**Определение 3.** *Твердой средой* называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство  $E^3$ .



**Пример.** Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную»  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и «подвижную»  $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ . Пусть  $\Sigma$  – множество отмеченных точек, неподвижных относительно  $S'$ :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M} = \text{const},$$

где  $r'_{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  – координатный вектор точки  $M$  в  $S'$ .

Система точек  $\Sigma$  является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство  $E^3$ . Следовательно,  $\Sigma$  – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда  $\Sigma$  неподвижна относительно ДСО  $S'$ , а система  $S'$  жестко связана со средой  $\Sigma$ .*

## § 2. Скорости и ускорения точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную»  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и «подвижную»  $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ . Пусть твердая среда  $\Sigma$  неподвижна относительно ДСО  $S'$ .

Рассмотрим также матрицу  $D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$  —

матрицу перехода от  $S$  к  $S'$ .

Если  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$  — координатное представление вектора  $\vec{q}$

в  $S$ , а  $q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix}$  — координатное представление вектора

$\vec{q}$  в  $S'$ , то  $q = Dq'$ .

Для любой точки  $M \in \Sigma$  имеем :

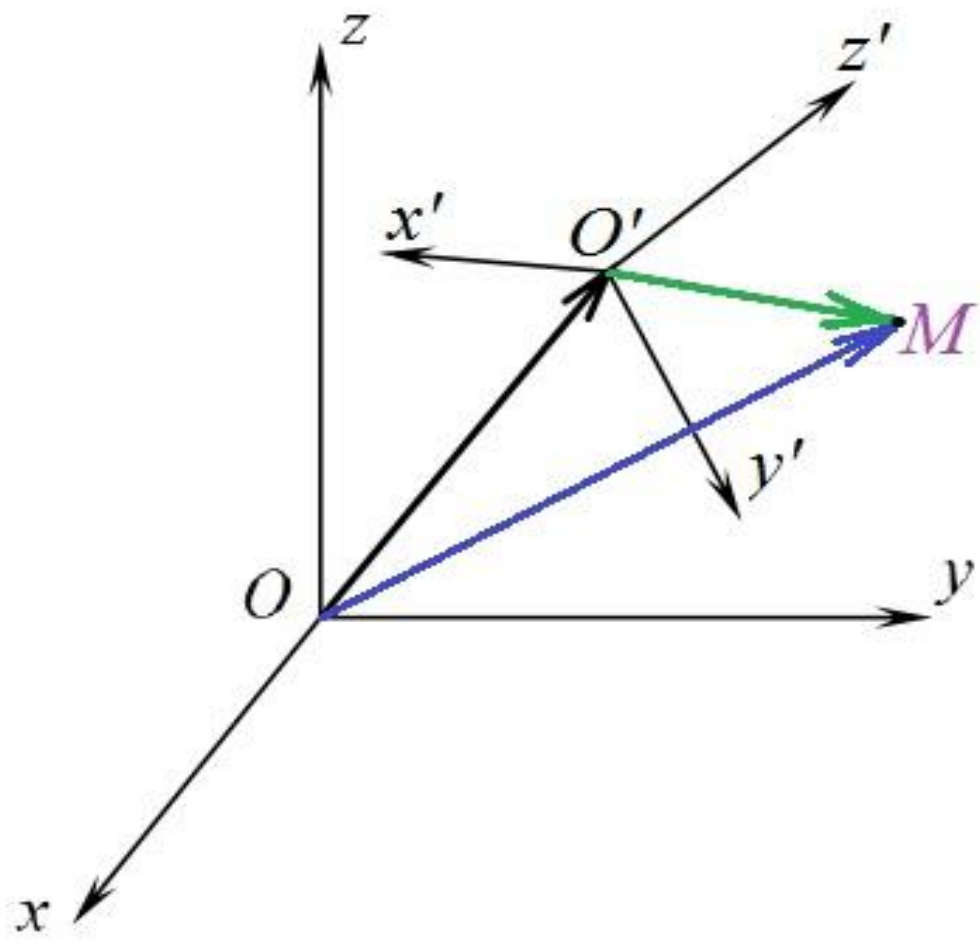
$r_{OM}$  – координатный вектор точки  $M$  в  $S$ ,

$r'_{O'M}$  – координатный вектор точки  $M$  в  $S'$ ,

$$r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + D r'_{O'M}, \quad r'_{O'M} = const.$$

Тогда  $v_M = \dot{r}_{OO'} + \dot{D} r'_{O'M}$  – скорость точки  $M$  в  $S$ ,

$w_M = \ddot{r}_{OO'} + \ddot{D} r'_{O'M}$  – ускорение точки  $M$  в  $S$ .



Рассмотрим две точки  $M, N \in \Sigma$ . Арифметический вектор  $r_{MN} = r_{ON} - r_{OM}$  представляет собой координатное представление геометрического вектора  $\overrightarrow{MN}$  в системе  $S$ , а арифметический вектор  $r'_{MN} = r'_{O'N} - r'_{O'M}$  — координатное представление вектора  $\overrightarrow{MN}$  в системе  $S'$ .

Заметим, что  $D r'_{MN} = r_{MN} \Rightarrow r'_{MN} = D^{-1} r_{MN} = D^T r_{MN}$ .

В силу неподвижности точек  $M, N \in \Sigma$  относительно  $S'$ ,

$$r'_{O'N} = const, r'_{O'M} = const \Rightarrow r'_{MN} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^T r_{MN} = r'_{MN} = const.$$

Скоростью направленного отрезка  $\overline{MN}$  (в системе  $S$ ) называется арифметический вектор

$$v_{MN} = \dot{r}_{MN} = \dot{r}_{ON} - \dot{r}_{OM} = v_N - v_M.$$

При этом (в силу того, что  $D^T r_{MN} = const$ )

$$\dot{r}_{MN} = \frac{d}{dt}((DD^T)r_{MN}) = \frac{d}{dt}(D(D^T r_{MN})) = \dot{D}(D^T r_{MN}). \quad (2.1)$$

Ускорением направленного отрезка  $\overline{MN}$  (в системе  $S$ ) называется арифметический вектор

$$w_{MN} = \ddot{r}_{MN} = \ddot{r}_{ON} - \ddot{r}_{OM} = w_N - w_M.$$

## § 3. Векторное произведение двух векторов

**1. Векторное произведение двух геометрических векторов.** Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два неколлинеарных вектора. *Векторным произведением* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  (обозначение:  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ , где  $(\vec{a}, \vec{b})$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,

2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ,

3) тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – правая.



Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов  $\vec{a}$ ,

$\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в ДСО  $S$ :  $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ,  $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ . Тогда

верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Векторное произведение двух арифметических

**векторов.** Рассмотрим два арифметических вектора

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ и } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \text{ Их векторное произведение } h$$

определяется следующим равенством :

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение:  $h = p \times q$ .

Нетрудно убедиться, что из равенства  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b.$$

### § 3. Поступательное движение твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную»  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и «подвижную»  $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ . Пусть твердая среда  $\Sigma$  неподвижна относительно ДСО  $S'$  (система  $S'$  жестко связана со средой  $\Sigma$ ).

И пусть  $D$  – матрица перехода от  $S$  к  $S'$ .

**Определение 1.** Движение твердой среды  $\Sigma$  относительно ДСО  $S$  называется *поступательным*, если все точки среды  $\Sigma$  движутся относительно  $S$  с одинаковыми скоростями :

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

**Определение 2.** Говорят, что направленный отрезок  $\overline{AB} \subset \Sigma$  *перемещается параллельно самому себе* относительно ДСО  $S$ , если координаты вектора  $\overline{AB}$  в  $S$  не изменяются со временем (то есть координатное представление вектора  $\overline{AB}$  в  $S$   $r_{AB}(t) = const$ ).

**Лемма.** Твердая среда  $\Sigma$  движется поступательно относительно ДСО  $S$  тогда и только тогда, когда для каждой пары точек  $A, B \in \Sigma$  направленный отрезок  $\overline{AB} \subset \Sigma$  перемещается параллельно самому себе.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть среда  $\Sigma$  движется поступательно относительно ДСО  $S$ , то есть

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

Тогда

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[\dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A = 0],$$

следовательно,  $(\forall A, B \in \Sigma)[r_{AB}(t) = \text{const}]$ .

*Достаточность.* Доказать самостоятельно.

**Теорема (критерий поступательного движения).**

Твердая среда  $\Sigma$  движется поступательно относительно ДСО  $S$  тогда и только тогда, когда в среде  $\Sigma$  существуют два неколлинеарных отрезка, перемещающихся относительно  $S$  параллельно самим себе.

*Доказательство.* Необходимость очевидна.

*Достаточность.* Пусть неколлинеарные отрезки  $\overline{AB} \subset \Sigma$  и  $\overline{MN} \subset \Sigma$  перемещаются параллельно самим себе, то есть их координатные представления в  $S$  постоянны:

$$r_{AB}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = const, \quad r_{MN}(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = const. \quad \text{Рассмотрим}$$

геометрический вектор  $\vec{q} = \overline{AB} \times \overline{MN}$ . Тогда его координатное представление в системе  $S$

$$q = r_{AB} \times r_{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = const.$$



В силу того, точки  $A, B, M, N \in \Sigma$  неподвижны относительно  $S'$ , координатные представления отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{MN}$  в  $S'$  также постоянны:  $r'_{AB} = const$ ,  $r'_{MN} = const$ . Поэтому координатное представление  $q'$  вектора  $\vec{q} = \overline{AB} \times \overline{MN}$  в системе  $S'$  тоже постоянно:

$$q' = r'_{AB} \times r'_{MN} = const.$$

Векторы  $r_{AB}$ ,  $r_{MN}$ ,  $q$  линейно независимы (доказать!), следовательно,  $r_{AB}$ ,  $r_{MN}$ ,  $q$  – базис в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Покажем, что каждый направленный отрезок  $\overline{EF} \subset \Sigma$  перемещается параллельно самому себе. Возьмем две произвольные точки  $E, F \in \Sigma$  и разложим вектор  $r_{EF}$  по базису  $r_{AB}, r_{MN}, q$ :

$$r_{EF} = \alpha \cdot r_{AB} + \beta \cdot r_{MN} + \gamma \cdot q.$$

Заметим, что вектор  $D^T r_{EF} = const$  (так как  $D^T r_{EF} = r'_{EF}$  – координатное представление вектора  $\overrightarrow{EF}$  в ДСО  $S'$ , а точки  $E, F \in \Sigma$  неподвижны относительно  $S'$ ), а также  $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$ ,  $D^T r_{MN} = r'_{MN} = const$ ,  $D^T q = q' = const$ , поэтому

$$\dot{r}_{EF} = \frac{d}{dt}((DD^T)r_{EF}) = \frac{d}{dt}(D(D^T r_{EF})) = \dot{D}(D^T r_{EF}) = \dot{D}D^T r_{EF},$$

$$\dot{r}_{AB} = \dot{D}D^T r_{AB}, \quad \dot{r}_{MN} = \dot{D}D^T r_{MN}, \quad \dot{q} = \dot{D}D^T q.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{r}_{EF} &= \dot{D}D^T r_{EF} = \dot{D}D^T (\alpha \cdot r_{AB} + \beta \cdot r_{MN} + \gamma \cdot q) = \\ &= \alpha \cdot (\dot{D}D^T r_{AB}) + \beta \cdot (\dot{D}D^T r_{MN}) + \gamma \cdot (\dot{D}D^T q) = \\ &= \alpha \cdot \dot{r}_{AB} + \beta \cdot \dot{r}_{MN} + \gamma \cdot \dot{q} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $r_{EF} = const$ . В силу произвольности выбора точек  $E, F \in \Sigma$  это означает, что каждый отрезок среды перемещается параллельно самому себе, то есть среда  $\Sigma$  движется поступательно. Теорема доказана.

**Задача.** Докажите, что твердая среда  $\Sigma$  движется поступательно относительно ДСО  $S$  тогда и только тогда, когда матрица перехода от  $S$  к  $S'$  постоянна (не зависит от времени).

В качестве **примера** можно привести движение твердой среды  $\Sigma$ , связанной с любой кабиной «колеса обзора». Очевидно, неколлинеарные отрезки  $AB \subset \Sigma$  и  $BC \subset \Sigma$  перемещаются параллельно самим себе.

