Матрицы. Действия над матрицами.

Создатели презентации:
Гиренко Нина
Гиренко Анна

Преподаватель:
Никанорова Людмила Викторовна

Содержание:

-
- Определение понятия матрица
- Содержание матрицы
- Свойства матриц
- Сумма матриц
- Произведение матриц
- Вычитание матриц
- Обратные матрицы

Матрица — *математический объект*, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов *кольца* или *поля* (например, *целых*, *действительных* или *комплексных* чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задаёт *размер матрицы*.

Иначе говоря, **матрица** — это *прямоугольная таблица* каких-либо *элементов.* В качестве элементов мы будем рассматривать *числа*, то есть числовые матрицы. Обозначают матрицы обычно простыми латинскими буквами: A, B,C...

Рассматриваемая матрица имеет 2 строки и 3 столбца.

Когда говорят о *размерах матрицы*, то сначала укызывают *количество строк*, а затем *столбцов*. Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то говорят о *квадратной матрице*.

Пример:

- Матрица «три на три»

Элементы с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы, а элементы a1n, a2n-1, a3n-2....an1 (т. е. Имеющие сумму индексов, равную n+1)-побочную диагональ.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, а остальные элементы равны 0. Она обозначается буквой Е.

Нулевая матрица - это матрица, все элементы которой равны 0. Нулевая матрица может быть любого размера.

Транспортирование матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Над матрицами можно выполнять определённые действия: сложение, вычитание и умножение. Также для матриц существуют особые действия — транспортирование матриц и нахождение обратной матрицы.

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $AB \neq BA$;
4) $(AB)C = A(BC)$;
5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
8) $(A + B)C = AC + BC$;
9) $C(A + B) = CA + CB$.

- К числу линейных операций над матрицами относятся:
  1)сложение матриц
  2) умножение матриц на число

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового порядка называют матрицу $C=(c_{ij})$.

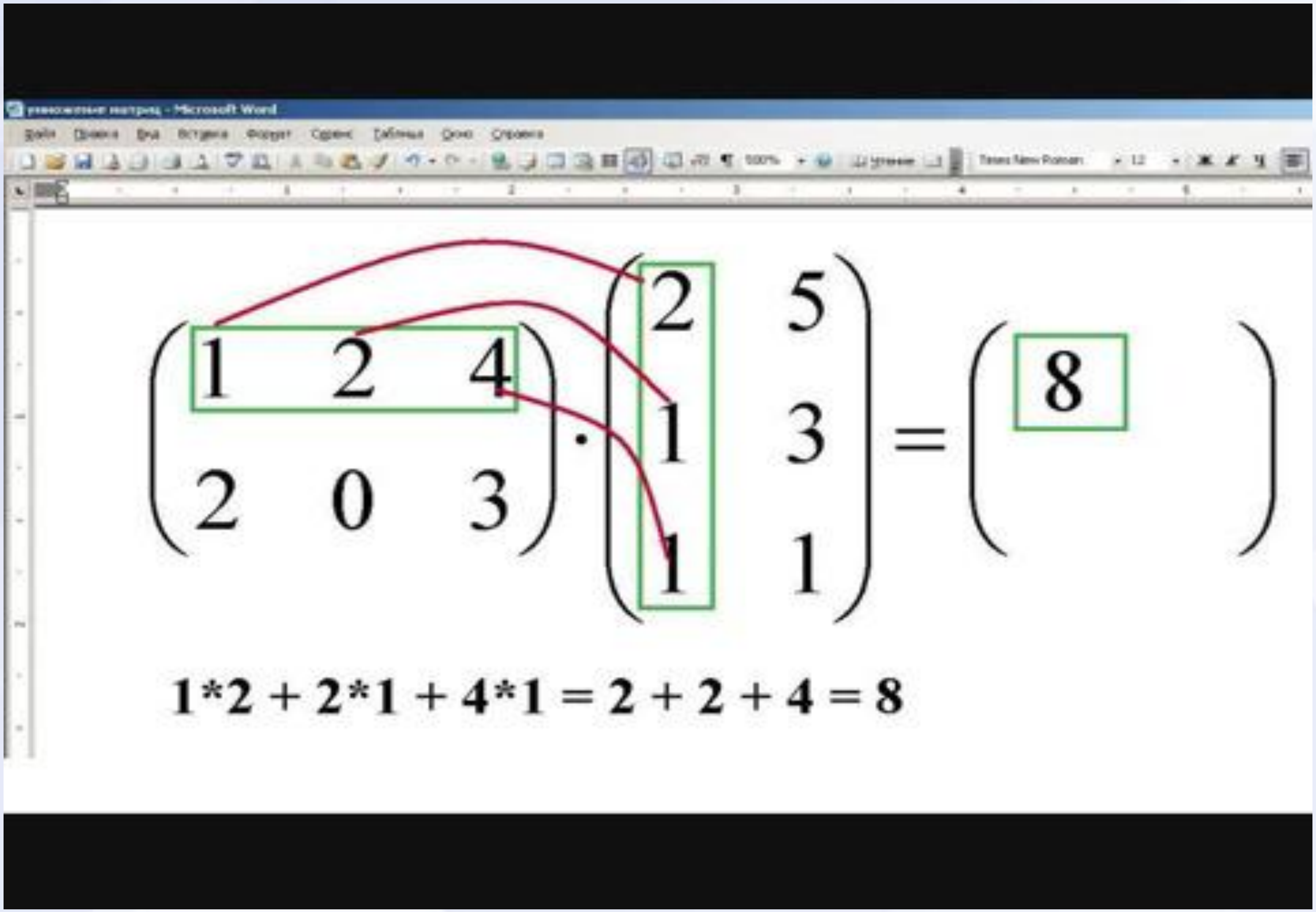
Произведение матрицы на число. Пример

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица того же размера, элементы которой равны λa_{ij}.

$$\lambda = 3; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot 3 = 3 \cdot A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на матрицу



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \boxed{15} \\ & \end{pmatrix}$$

1*5 + 2*3 + 4*1 = 5 + 6 + 4 = 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ \boxed{7} & \end{pmatrix}$$

2*2 + 0*1 + 3*1 = 4 + 0 + 3 = 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & \boxed{13} \end{pmatrix}$$

2*5 + 0*3 + 3*1 = 10 + 0 + 3 = 13

- **Произведение матриц** существует только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\times6+1\times8+4\times(-2) & 5\times7+1\times9+4\times(-1) \\ 0\times6+2\times8+3\times(-2) & 0\times7+2\times9+3\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Пример сложения матриц.

Даны две матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & 4+5 \\ 6+7 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$$

Пример умножения матриц.

$$C = A \text{ x } B = \begin{pmatrix} 2*8+4*7 & 2*5+4*3 \\ 6*8+7*7 & 6*5+7*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 97 & 51 \end{pmatrix}$$

Разностью матриц А и В *одного и того же размера* называется матрица С=А-В *такого же размера*, которая получается из исходных матриц, путем вычитания из соответствующего элемента матрицы А соответствующего элемента матрицы В:

$$A-B=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ -1 & 7 & 9\\ -8 & 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 1 & 4\\ 5 & -5 & 7\\ -3 & -2 & 7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}5-8 & 1-1 & 6-4\\ -1-5 & 7-(-5) & 9-7\\ -8-(-3) & 2-(-2) & 3-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ -6 & 12 & 2\\ -5 & 4 & -4\end{bmatrix}$$

Обратной матрицей, к квадратной матрице А, называется такая матрица А в степени -1, для которой справедливо равенство А*А в степени -1= А в степени -1 *А=Е

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее определителем**, следующим образом:**

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

2. n = 2. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. n = 3. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Определителем или детерминантом квадратной матрицы $A = \| a_{ij} \|$ n*n называется число, которое ставится в соответствие этой матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Самостоятельная работа

- Вариант 1
- 1) A+B
- A= 3 5 7   B= 1 2 4
- 2-1 0   2 3 2
-
- 2) A-H
- H= -4 3 -15
- -5 -7 0
- A= 3 5 -17
- -1 0 10

Вариант 2

1) A+B

A= 1 4 -2

10 2 -1

-5 -6 4

2) A-B

A= 4 2

9 0

B= 3 1

-3 4

Самостоятельная работа

Вариант 1

- 3) A*B
- A= 0 -2 3
- 4 5 6
-
- B= 7 10 13
- 8 11 14
- 9 12 15
- 4) Транспортировать:
- A= 5 -7 9
- 3 2 1

Вариант 2

3) A*B

A= 3 -1 2
4 2 0
-5 6 1

B= -8 1
7 2

B= 8 3 14
10 5 6

Ответы :

Вариант 1	Вариант 2
1) 4 4 11	1) 5 10 -4
4 2 2	18 4 -14
	-6 6 45
2) 7 2 -2	2) 1 1
4 7 10	12 -4
3) 43 58 73	3) 21 -5
122 167 212	46 8
	4 4
4) 5 3	4) 8 10
7 3	3 5
9 1	14 6