

Матрицы. Действия над матрицами.

Создатели презентации:

Гиренко Нина

Гиренко Анна

Преподаватель:

Никанорова Людмила Викторовна

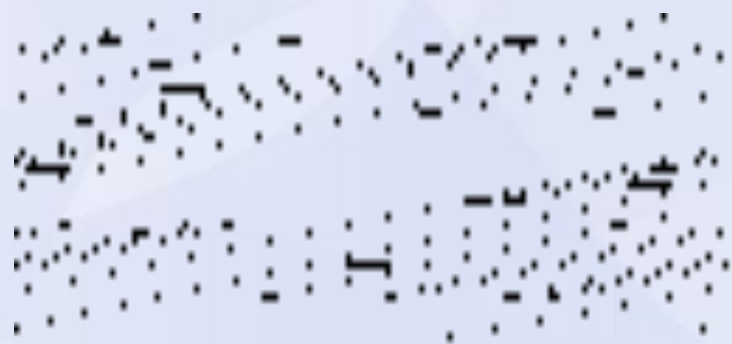
Содержание:

-
- Определение понятия матрица
- Содержание матрицы
- Свойства матриц
- Сумма матриц
- Произведение матриц
- Вычитание матриц
- Обратные матрицы

Матрица — *математический объект*, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов *кольца* или *поля* (например, *целых, действительных* или *комплексных* чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задаёт *размер матрицы*.

Иначе говоря, **матрица** — это *прямоугольная таблица* каких-либо *элементов*. В качестве элементов мы будем рассматривать *числа*, то есть числовые матрицы. Обозначают матрицы обычно простыми латинскими буквами: *A, B, C...*

Рассматриваемая матрица имеет 2 строки и 3 столбца.



Когда говорят о *размерах матрицы*, то сначала указывают *количество строк*, а затем *столбцов*. Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то говорят о *квадратной матрице*.

Пример:



- Матрица «три на три»

Элементы с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ (т. е. Имеющие сумму индексов, равную $n+1$)-побочную диагональ.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, а остальные элементы равны 0. Она обозначается буквой E .

Нулевая матрица - это матрица, все элементы которой равны 0. Нулевая матрица может быть любого размера.

Транспортирование матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Над матрицами можно выполнять определённые действия: сложение, вычитание и умножение. Также для матриц существуют особые действия — транспонирование матриц и нахождение обратной матрицы.

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $AB \neq BA$;
- 4) $(AB)C = A(BC)$;
- 5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 7) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- 8) $(A + B)C = AC + BC$;
- 9) $C(A + B) = CA + CB$.

- К числу линейных операций над матрицами относятся:
 - 1) сложение матриц
 - 2) умножение матриц на число

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка называют матрицу $C = (c_{ij})$.

Сложение матриц и умножение на число

Сложение матрицы A и B

$$A = \begin{matrix} (2 \times 3) \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} (2 \times 3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 & 3+0 \\ 3+0 & 1+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = C$$

Произведение матрицы на число. Пример

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица того же размера, элементы которой равны λa_{ij} .

$$\lambda = 3; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot 3 = 3 \cdot A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на матрицу

Умножение матрицы - Microsoft Word

Файл Правка Вставка Формат Ссылки Таблица Вид Справка

100%

Times New Roman 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \\ & \end{pmatrix}$$

$1*2 + 2*1 + 4*1 = 2 + 2 + 4 = 8$

умножение матриц - Microsoft Word

Файл Вид Вставка Формат Ссылки Сервис Данные Сервис Сервис

100%

Тема New Roman

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ & \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 5 + 6 + 4 = 15$

уравнения матриц - Microsoft Word

Файл Вид Вставка Формулы Ссылки Сервис Сервис Сервис

100% Times New Roman 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & \end{pmatrix}$$

$2*2 + 0*1 + 3*1 = 4 + 0 + 3 = 7$

- **Произведение матриц** существует только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \times 6 + 1 \times 8 + 4 \times (-2) & 5 \times 7 + 1 \times 9 + 4 \times (-1) \\ 0 \times 6 + 2 \times 8 + 3 \times (-2) & 0 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Пример сложения матриц.

$$\text{Даны две матрицы: } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & 4+5 \\ 6+7 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$$

Пример умножения матриц.

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 2*8+4*7 & 2*5+4*3 \\ 6*8+7*7 & 6*5+7*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 97 & 51 \end{pmatrix}$$

Разностью матриц А и В *одного и того же размера* называется матрица $C=A-B$ *такого же размера*, которая получается из исходных матриц, путем вычитания из соответствующего элемента матрицы А соответствующего элемента матрицы В:

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -1 & 7 & 9 \\ -8 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 7 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 5-8 & 1-1 & 6-4 \\ -1-5 & 7-(-5) & 9-7 \\ -8-(-3) & 2-(-2) & 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -6 & 12 & 2 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Обратной матрицей, к квадратной матрице A , называется такая матрица A в степени -1 , для которой справедливо равенство $A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$, называемое ее **определителем**, следующим образом:

1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$

2. $n = 2$. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. $n = 3$. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$
 $a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Определителем или детерминантом квадратной матрицы $A = \parallel a_{ij} \parallel n \times n$ называется число, которое ставится в соответствие этой матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Самостоятельная работа

- Вариант 1

- 1) $A+B$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

-

- 2) $A-H$

- $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} -5 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & -17 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & -17 \end{pmatrix}$

- Вариант 2

- 1) $A+B$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 10 & 2 & -1 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 10 & 2 & -1 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 10 & 2 & -1 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

- 2) $A-B$

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Самостоятельная работа

• Вариант 1

• 3) $A * B$
• $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

• $B = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

• 4) Транспортировать:
• $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 2

3) $A * B$
 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 14 \\ 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Ответы :

• Вариант 1

• 1) 4 4 11

• 4 2 2

•

• 2) 7 2 -2

• 4 7 10

• 3) 43 58 73

• 122 167 212

•

• 4) 5 3

• 7 3

• 9 1

Вариант 2

1) 5 10 -4

18 4 -14

-6 6 45

2) 1 1

12 -4

3) 21 -5

46 8

4 4

4) 8 10

3 5

14 6