КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Содержание

1.Устойчивость положения равновесия динамических систем

- Динамической системой (с непрерывным временем) называют систему дифференциальных уравнений : вида

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

где функция f (x) удовлетворяет условиям теоремы Коши о существовании единственного решения при данных начальных условиях $x(t_0) = x_0$. В простейшем случае n =1 уравнение можно проинтегрировать и представить решение в неявной форме:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}$$

- В повседневной жизни устойчивостью называют сохранение каких-либо свойств при наличии неблагоприятных факторов. Наука об устойчивости восходит к труду Архимеда «О плавании тел» (3-й век до н.э.). Современный вид теория устойчивости приобрела во многом благодаря выдающемуся российскому ученому А.М.Ляпунову, сформулировавшему в своей диссертации (1892) основные понятия и методы исследования.

Определение 1. Положение равновесия $\dot{x}$ системы называется устойчивым (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое$\delta > 0$, что из неравенства $|x(t_0)-\dot{x}|<\delta$ следует * $|x(t)-\dot{x}|<\varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Определение 2. Положение равновесия $\dot{x}$ называется притягивающим, если найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства$|x(t_0)-\dot{x}|<\delta$ следует $\lim_{t\to\infty} x(t) = \dot{x}$.

Определение 3. Положение равновесия $\dot{x}$ системы называется асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее.

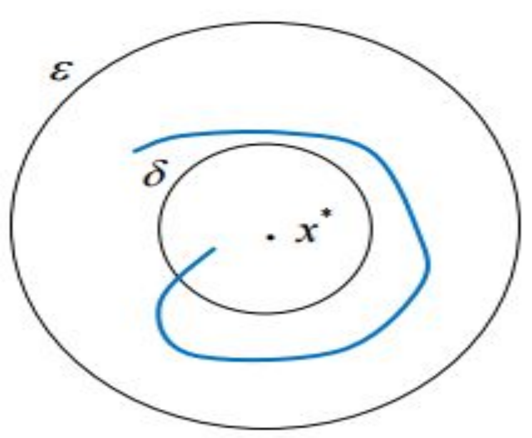


Рис.3. Геометрическая интерпретации устойчивости

Геометрический смысл устойчивости поясняется рис.3: траектория, стартующая из δ - окрестности положения равновесия, не покидает затем его ε - окрестности.

2. Замкнутые фазовые траектории

Наряду с положениями равновесия замкнутые фазовые траектории играют исключительно важную роль в теории колебаний, поскольку они отображают периодические движения реальных систем.

Замкнутые фазовые траектории бывают изолированными и неизолированными.

Определение 2. 1. Замкнутая фазовая траектория называется изолированной, если существует такая достаточно малая (кольцеобразная) ее окрестность, внутри которой нет других замкнутых фазовых траекторий. (На рис. граница этой окрестности обозначена штриховыми линиями.)

Определение 2. 2. Замкнутая фазовая траектория называется неизолированной, если в сколь угодно малой (кольцеобразной) ее окрестности находятся другие замкнутые фазовые траектории.

Определение 2.3. Замкнутая изолированная фазовая траектория называется предельным циклом.

3.Диссипативные системы

- Диссипативной называется динамическая система, любое движение которой при $t \to \infty$ стремится к одному из ее устойчивых состояний равновесия.

Из этого определения сразу же вытекают следующие два свойства диссипативных систем:

1) отсутствие замкнутых фазовых траекторий и соответственно отсутствие периодических колебаний;

2) отсутствие фазовых траекторий, уходящих (при $t \to \infty$) в бесконечность, т.е. отсутствие неограниченно нарастающих движений.

- Диссипативность систем имеет простой физический смысл. Именно, диссипативность означает, что полная энергия системы с течением времени убывает. Причиной такого убывание являются действующие в системе консервативные силы, которые носят характер сил трения и препятствуют движению.

Если для системы с одной степенью свободы можно составить функцию Лагранжа L, то уравнение динамики этой системы записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \Phi$$

где q- обобщенная координата, Ф-обобщенная сила, которая в случае диссипативной системы носит характер силы трения и, следовательно, $\Phi\dot{q}<0$, при $q \neq 0$.

Умножим уравнение на $\dot{q}$ и после преобразований получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right) = \Phi\dot{q} \leq 0$$

при чем равенство нулю возможно только при $\dot{q}$=0, т.е. в состоянии равновесия.

Пример: груз единичной массы, подвешенный на пружине с нелинейной восстанавливающей силой –f(x), при учете силы трения -h$\dot{x}$ описывается уравнением :

$$\ddot{x} + h\dot{x} + f(x) = 0, \qquad (1)$$

в котором f(0)=0, а x=0- положение равновесия.

Полная энергия системы :

$$W = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x f(u)du.$$

В силу уравнения (1) получаем

$$\dot{W} = -h\dot{x}^2 \leq 0.$$

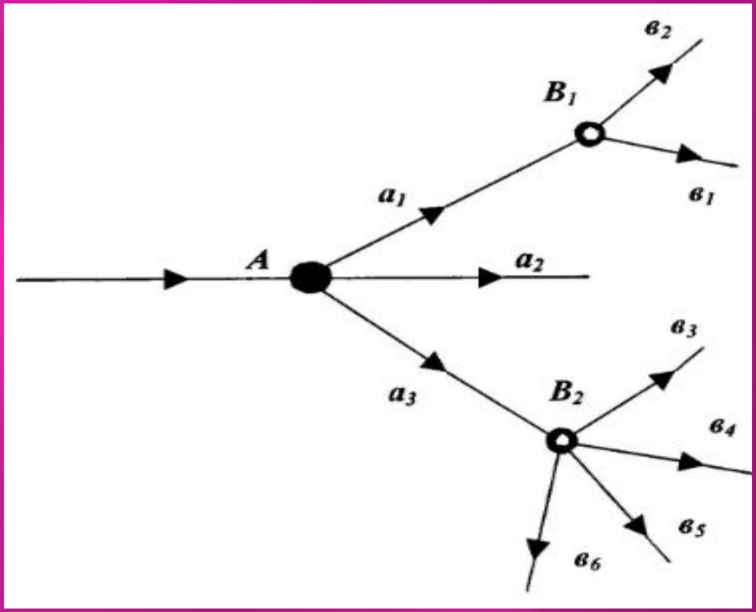
Энергия убывает, система диссипативна.

4.Бифуркация динамических систем

Теория бифуркаций динамических систем — это теория, которая изучает изменения качественной картины разбиения фазового пространства в зависимости от изменения параметра (или нескольких параметров).

Бифуркация — это приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении её параметров.

Центральным понятием теории бифуркации является понятие (не)грубой системы. Берётся какая-либо динамическая система и рассматривается такое (много)параметрическое семейство динамических систем, что исходная система получается в качестве частного случая — при каком-либо одном значении параметра. Если при значении параметров, достаточно близких к данному, сохраняется качественная картина разбиения фазового пространства на траектории, то такая система называется грубой. В противном случае, если такой окрестности не существует, то система называется негрубой.



Таким образом в пространстве параметров возникают области грубых систем, которые разделяются поверхностями, состоящими из негрубых систем. Теория бифуркаций изучает зависимость качественной картины при непрерывном изменении параметра вдоль некоторой кривой. Схема, по которой происходит изменение качественной картины называется бифуркационной диаграммой.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!