

Способы решения задания  
ЕГЭ №15(№18)  
1 часть  
(поразрядная конъюнкция)

# Выдержка из кодификатора элементов содержания

Знания о:

- формах мышления (понятии, суждении, умозаключении);
- основных логических функциях;
- законах логики;
- методах решения логических уравнений и систем логических уравнений;
- базовых логических элементов компьютера (Сумматоре, триггере).

Умения

- построить диаграммы Эйлера-Венна.
- построить таблицы истинности для сложных высказываний.
- строить и преобразовывать логические выражения.
- анализировать схемы, построенные с использованием базовых логических элементов компьютера и строить для них таблицы истинности.

# Основные типы заданий №18

- 18 Обозначим через  $m \& n$  поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел  $m$  и  $n$ . Так, например,  $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$ .

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа  $A$  формула

$$x \& 25 \neq 0 \rightarrow (x \& 17 = 0 \rightarrow x \& A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной  $x$ )?

- 18 Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ».

Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 18 На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [37; 60]$  и  $Q = [40; 77]$ . Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x \geq 7) \vee (2x < y) \vee (xy < A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

# Формулы логики

## А. Свойства 0, 1 и отрицания

Свойства 0 и

1

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a + 1 = 1$$

Свойства отрицания

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + \bar{a} = 1$$

$$\overline{\bar{a}} = a$$

# Формулы логики

## Б. Дизъюнкция и конъюнкция

Сочетательный закон

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

Переместительный закон

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

Закон повторения

$$a \cdot a = a$$

$$a + a = a$$

Распределительный закон

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

Правила де Моргана

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

# Формулы логики

## В. Импликация и эквивалентность

Определение импликации

$$a \rightarrow b = \bar{a} + b$$

Свойства импликации

$$\bar{a} \rightarrow \bar{b} = b \rightarrow a$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \rightarrow \bar{b} &= a + \bar{b} \\ &= b \rightarrow a \end{aligned}$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \cdot b) \rightarrow c$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) = \bar{a} + (b \rightarrow c) = \bar{a} + \bar{b} + c$$

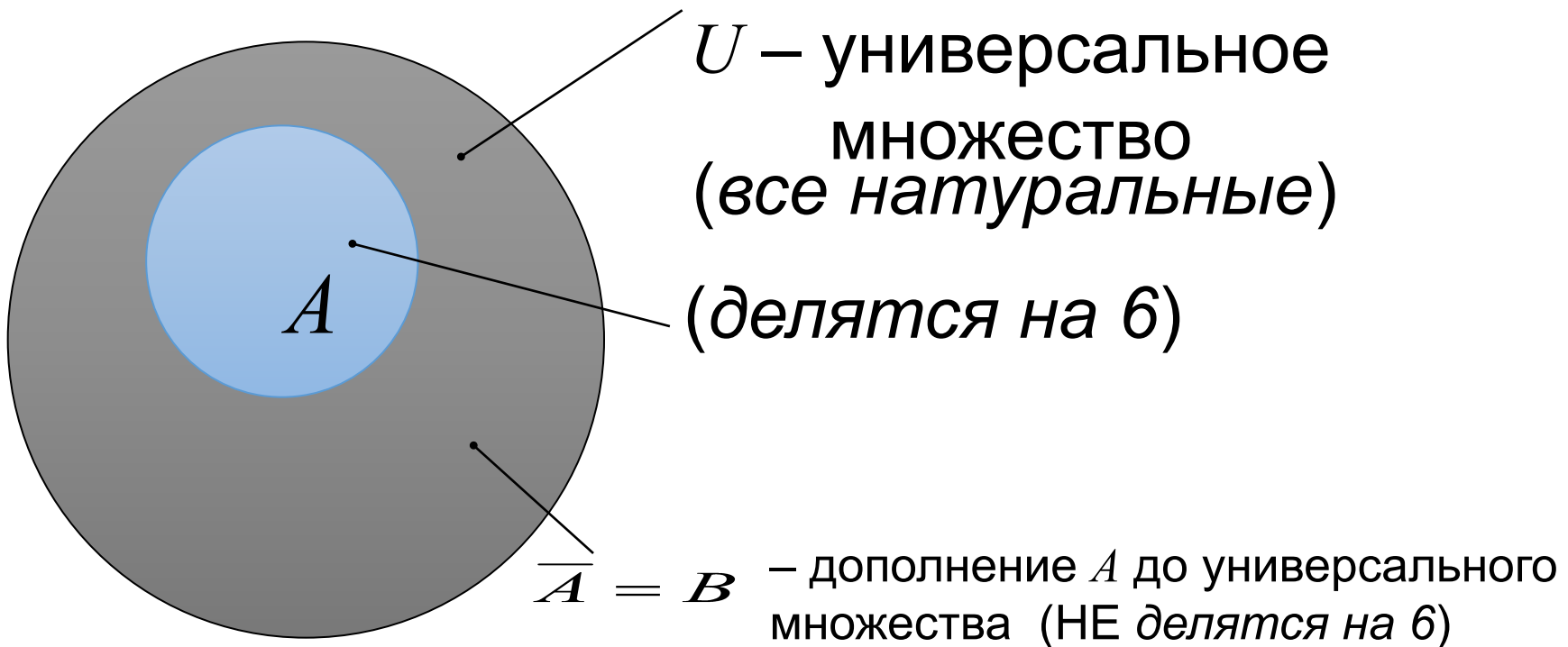
Эквивалентность

$$(a \cdot b) \rightarrow c = \overline{(a \cdot b)} + c = \bar{a} + \bar{b} + c$$

$$(a \equiv b) = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{(a \equiv b)} = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

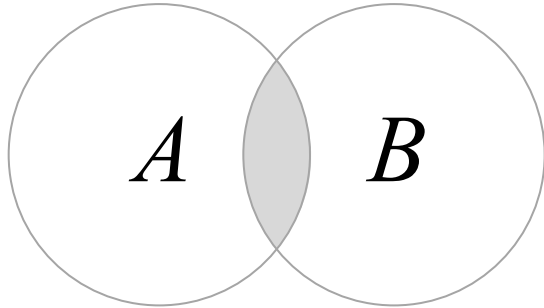
# Что нужно знать о множествах?



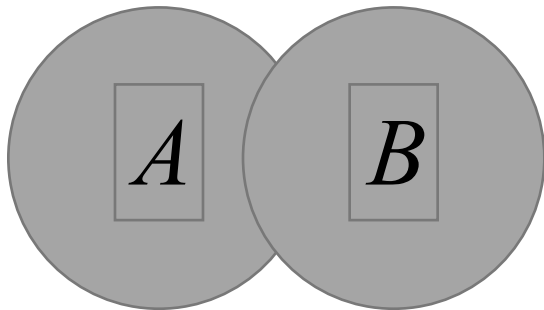
Если  $Z_A \vee Z_B = 1$ , то  $Z_A = \overline{Z_B}$

Если  $\overline{Z_A} \vee Z_B = 1$ , то  $Z_A = Z_B$

# Что нужно знать о множествах?



$A \cdot B$  – пересечение ( $A \cap B$ )

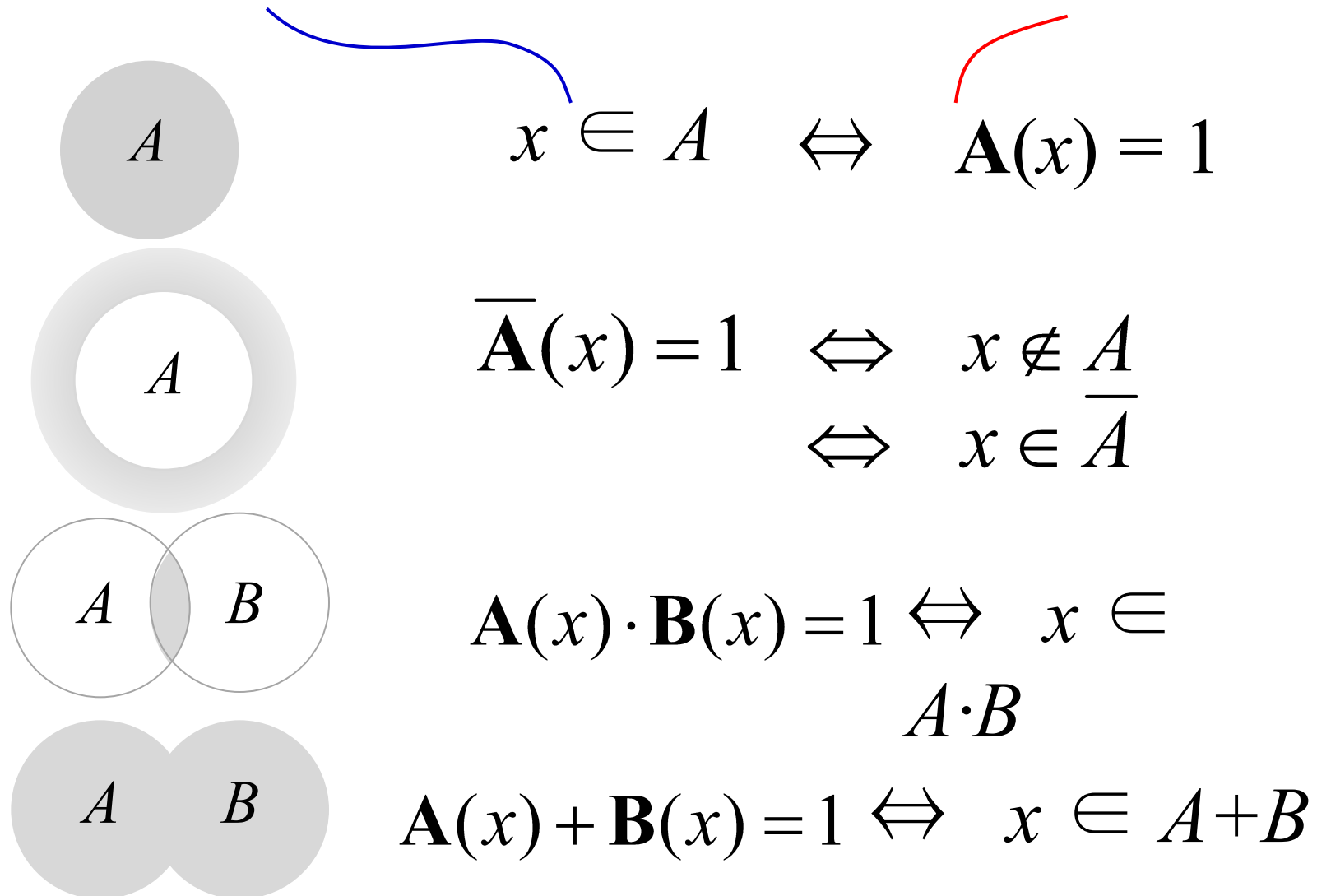


$A + B$  – объединение ( $A \cup B$ )



# Множества и логические функции

Множество задаётся логической функцией



## Свойства:

$$Z_A \wedge Z_B = Z_{A \text{ or } B}$$

$$Z_A \vee Z_B = Z_{A \text{ and } B}$$

Условие  $Z_k \rightarrow Z_m$  истинно для любых натуральных значений  $x$  тогда и только тогда, когда **все единичные биты двоичной записи числа  $M$  входят во множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ .**

**Пример:** Определить значение логического выражения

$$X \& 29 = 0 \rightarrow X \& 5 = 0$$

(Истинно или Ложно?)

$Z_{29} \rightarrow Z_5 = 1$  (истине), тогда, когда:

$$29 = 11101_2$$

$$5 = 101_2$$

единичные биты двоичного числа 5 входят в единичные биты двоичного числа 29 (совпадают с ними)

• таким образом,  
получили:

$$Z_{29} \rightarrow Z_5 = 1 \text{ (истинно)}$$

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 = 0) \rightarrow (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

1 способ

решения:  $Z_A = x \& A = 0$     $Z_{36} = x \& 36 = 0$     $Z_6 = x \& 6 = 0$ , тогда

$$\overline{Z_A} \rightarrow (Z_{36} \rightarrow \overline{Z_6}) = 1$$

Используя формулу:  $a \rightarrow b = \overline{a} + b$

$$\overline{Z_A} \rightarrow (\overline{Z_{36}} \rightarrow \overline{Z_6}) = 1$$

$$\overline{Z_A} \rightarrow (\overline{Z_{36}} \vee \overline{Z_6}) = 1$$

$$Z_A \vee (\overline{Z_{36}} \vee \overline{Z_6}) = 1$$

$$Z_A \vee (\overline{Z_{36} Z_6}) = 1$$

Используя формулы:  $Z_A \wedge Z_B = Z_{A \text{ or } B}$     $Z_A \vee Z_B = Z_{A \text{ and } B}$

$$Z_A \vee (\overline{Z_{36 \text{ or } 6}}) = 1$$

$$\langle 36_{10} = 100100_2 \quad 6_{10} = 110_2 \rangle$$

выполняя поразрядную дизъюнкцию получим  $100110_2 = 38_{10}$

$$Z_A \vee \overline{Z_{38}} = 1$$

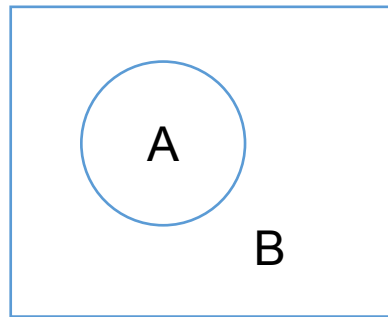
$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 = 0) \rightarrow (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

$$\overline{Z_A} \vee \overline{Z_{38}} = 1,$$
$$Z_A = \overline{\overline{Z_{38}}} = Z_{38}$$

Тогда

A=38

**Ответ:38**



Если  $Z_A \vee Z_B = 1$ , то  $Z_A = \overline{Z_B}$

Если  $\overline{Z_A} \vee Z_B = 1$ , то  $Z_A = Z_B$

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 = 0) \rightarrow (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

2 способ

решения:

$$Z_A = x \& A = 0 \quad Z_{36} = x \& 36 = 0 \quad Z_6 = x \& 6 = 0, \quad \text{тогда}$$

$$\overline{Z_A} \rightarrow (Z_{36} \rightarrow \overline{Z_6}) = 1$$

Используя формулу:

$$\overline{Z_A} \rightarrow (\overline{Z_{36}} \rightarrow \overline{Z_6}) = 1$$

$$\overline{Z_A} \rightarrow (\overline{Z_{36}} \vee \overline{Z_6}) = 1$$

$$Z_A \vee (\overline{Z_{36}} \vee \overline{Z_6}) = 1$$

$$Z_A \vee (\overline{Z_{32}} \vee \overline{Z_4}) \vee (\overline{Z_2} \vee \overline{Z_4}) = 1$$

$$Z_A \vee \overline{Z_{32}} \wedge \overline{Z_4} \vee \overline{Z_2} \wedge \overline{Z_4} = 1$$

$$Z_A \vee \overline{Z_4} \wedge (\overline{Z_{32}} \vee \overline{Z_2}) = 1$$

$$Z_A \vee \overline{Z_4} \wedge \overline{Z_{34}} = 1$$

$$Z_A \vee \overline{Z_4} \vee \overline{Z_{34}} = 1$$

$$Z_A \vee \overline{Z_{38}} = 1$$

**пояснение:**Запись  $x \& 36 \neq 0$ 

означает, что в двоичной записи числа  $x$  есть хотя бы одна единица, совпадающая с единицами двоичной записи 36

На языке логики запишем так:

$$Z_{36} = Z_{32} + Z_4$$

аналогично,

$$Z_6 = Z_2 + Z_4$$

Ответ:3

8

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 = 0) \rightarrow (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

3 способ  
решения:

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 = 0) \rightarrow (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 36 \neq 0) \vee (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

$$(x \& A = 0) \vee ((x \& 36 \neq 0) \vee (x \& 6 \neq 0)) = 1$$

1                      1                      1

36	=	1	0	0	1	0	0
x	=						

6	=	1	1	0
x	=			

В **X** хоть в одной желтой ячейки  
есть 1

В **X** хоть в одной желтой ячейки  
есть 1

1	0	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---

Ответ:3

# Самостоятельная работа

15 МИН

## Самостоятельная работа

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа формула тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной)?

Задание №1

$$(X \& 28 = 0) \vee (X \& 22 = 0) \vee (X \& A \neq 0) = 1$$

Задание №2

$$x \& 49 \neq 0 \rightarrow (x \& 41 = 0 \rightarrow x \& A \neq 0) = 1$$

Задание №3

$$x \& 9 = 0 \rightarrow (x \& 19 \neq 0 \rightarrow x \& A \neq 0) = 1$$



Домашняя работа

Обозначим через  $m \& n$  поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел  $m$  и  $n$ . Так, например,  $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$ .

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа  $A$  формула  $x \& A = 0 \rightarrow (x \& 23 = 0 \rightarrow x \& 19 \neq 0)$  тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной  $x$ )?

• Ответ: 4