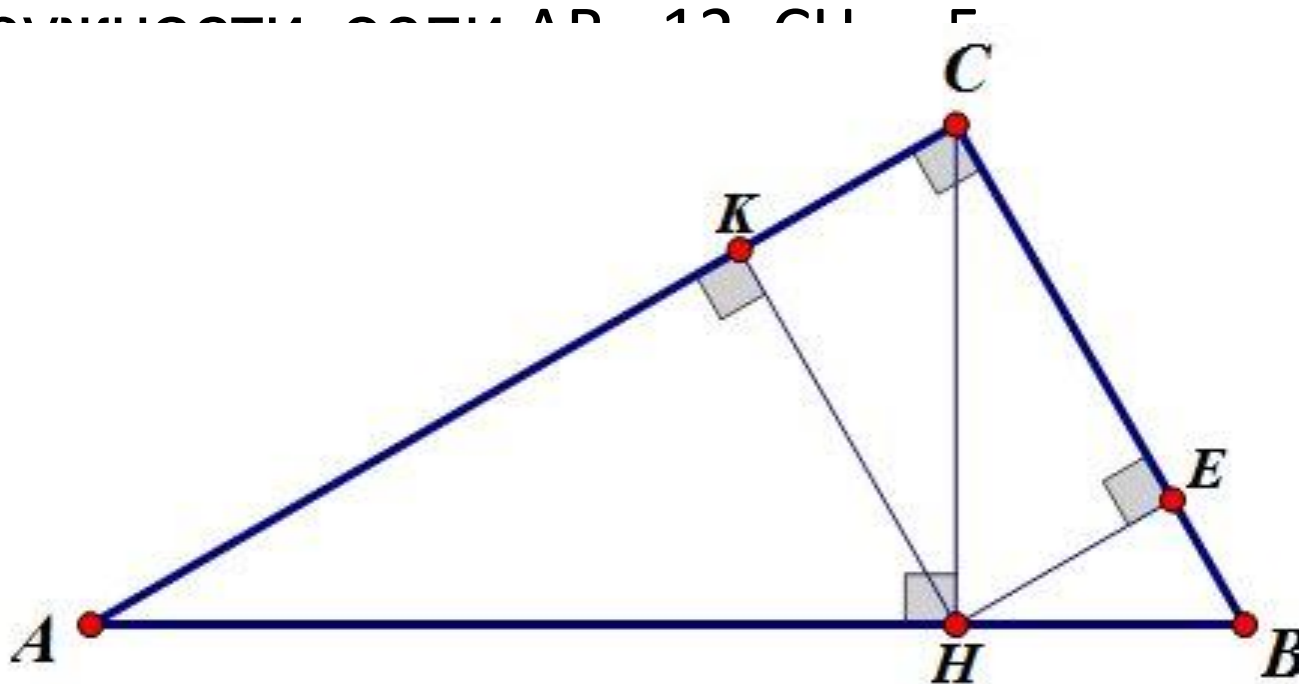


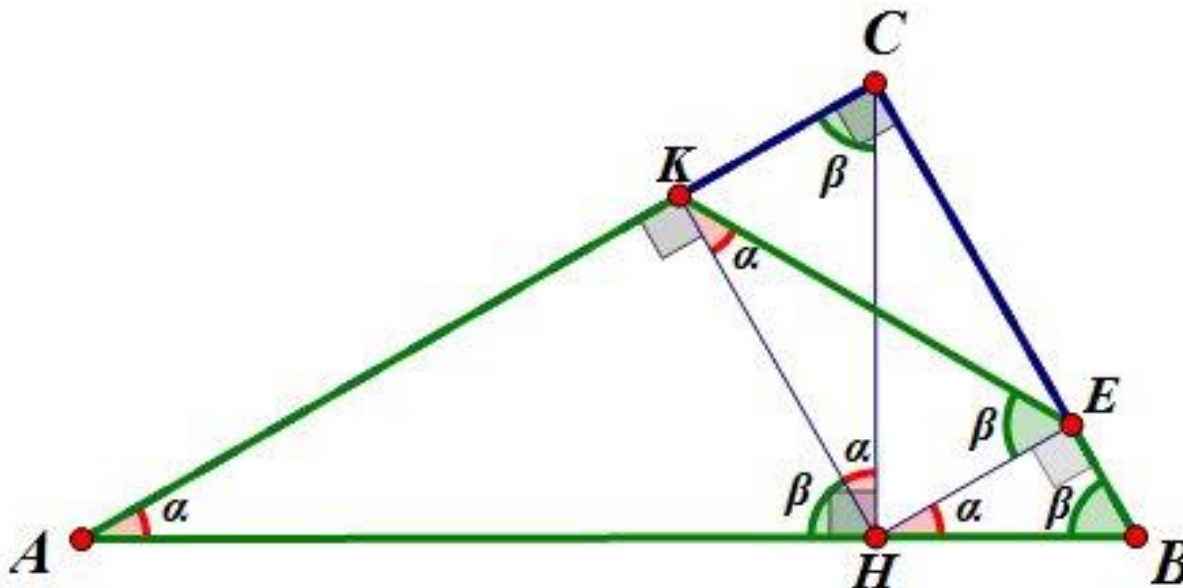
# Задача 18

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

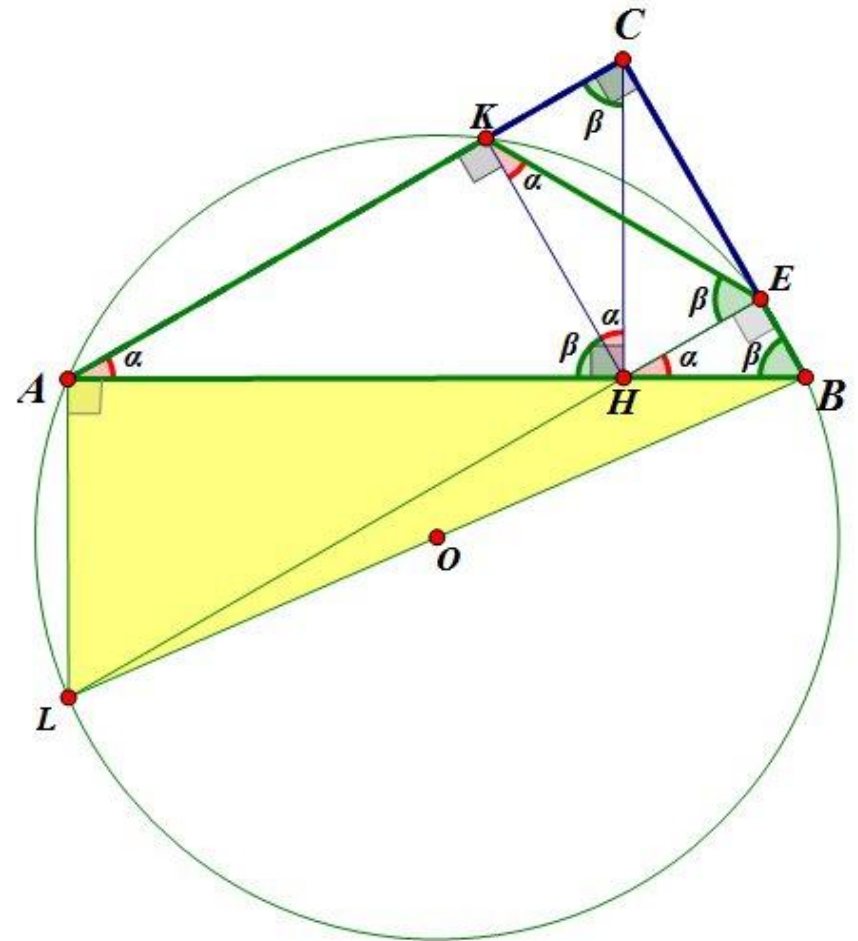
- **Задача 1.** На гипотенузу  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  опустили высоту  $CH$ . Из точки  $H$  на катеты опустили перпендикуляры  $HK$  и  $HE$ .
- а) Докажите, что точки  $A, B, K$  и  $E$  лежат на одной окружности. б) Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 12$ ,  $CH = 5$ .



- а) Докажем, что четырехугольник АКЕВ можно вписать в окружность.
- Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов четырехугольника равна  $180^{\circ}$ .  
Отметим одинаковым цветом равные углы  $\alpha$  и  $\beta$ :
- $\alpha + \beta = 90^{\circ}$  (Сумма острых углов прямоугольного треугольника). Тогда  $\angle АКЕ + \angle ЕВА = \alpha + \beta + 90^{\circ} = 180^{\circ}$ , следовательно, около четырехугольника АКЕВ можно описать окружность.



- б) Начертим окружность, описанную около четырехугольника АКЕВ
- Рассмотрим прямоугольный треугольник LAB.  $\angle LAB$  - вписанный угол, который опирается на диаметр LB, и, следовательно,  $\angle LAB = 90^\circ$



- В этом треугольнике мы знаем катет АВ. По условию задачи  $AB=12$ . Найдем второй катет. Для этого рассмотрим четырехугольник LACH:  
 $AC \perp CB, LE \perp CB, \Rightarrow AC \parallel LH$

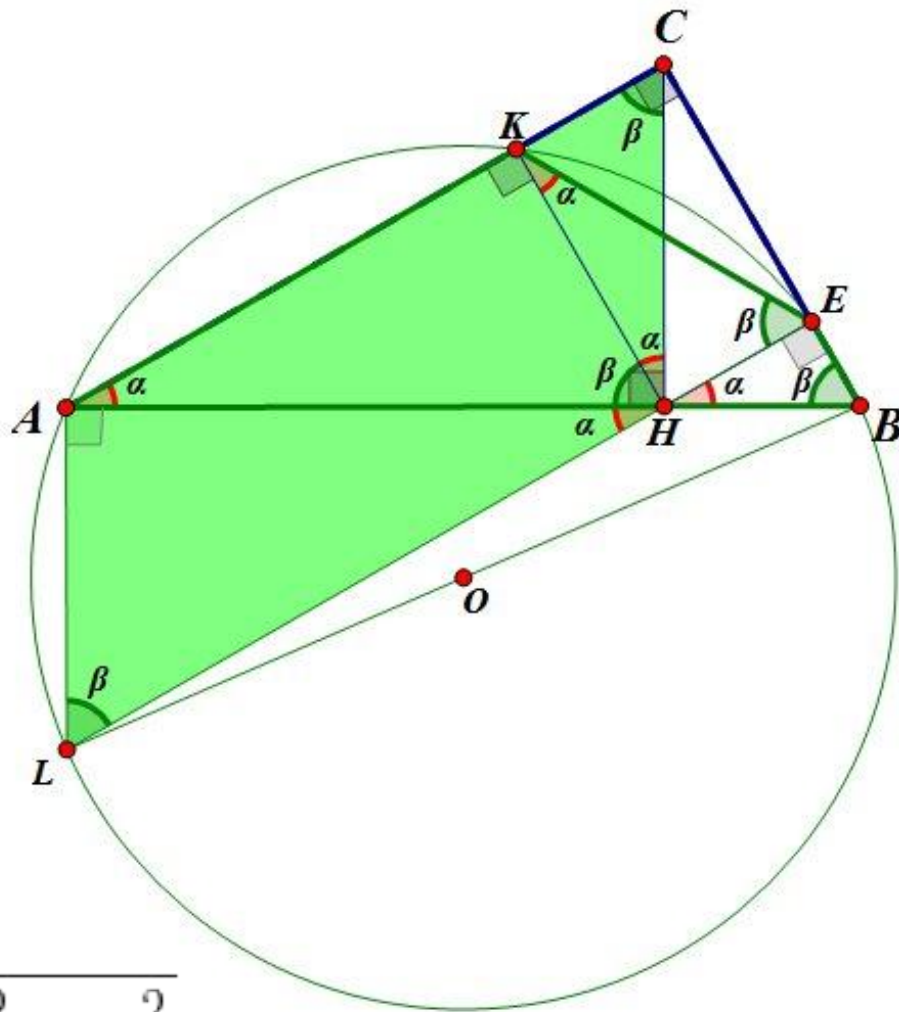
- $\angle AHL = \angle EHB = \alpha$   
 следовательно  $\angle ALH = \beta$   
 следовательно  $\angle ALH = \angle ACH, AL \parallel CH$ .  
 Значит ALCH  
 параллелограмм.

- $AL = CH = 5$  ( По условию).

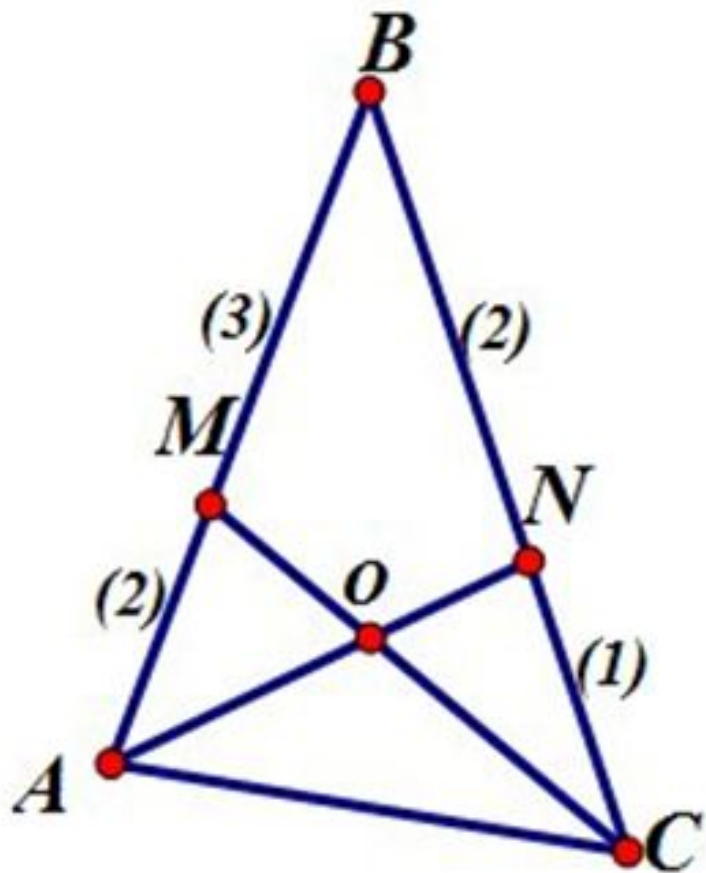
- Итак, задача свелась к нахождению гипотенузы прямоугольного треугольника LAB:

$$2R = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

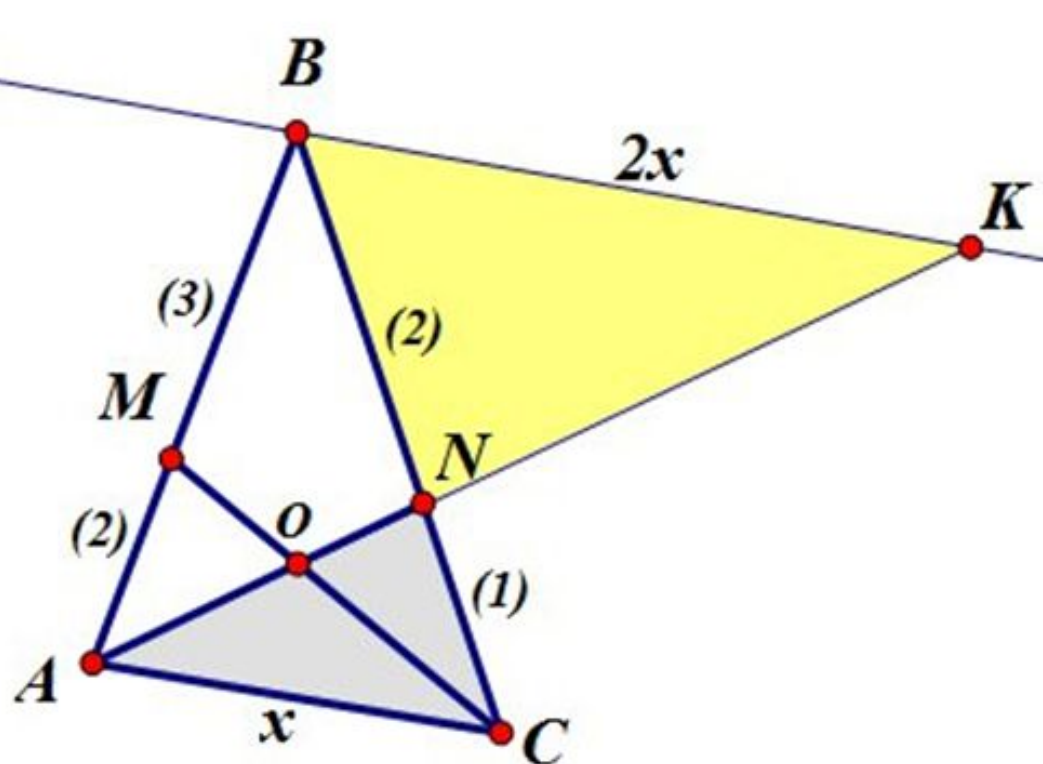
- **ОТВЕТ: 6,5**



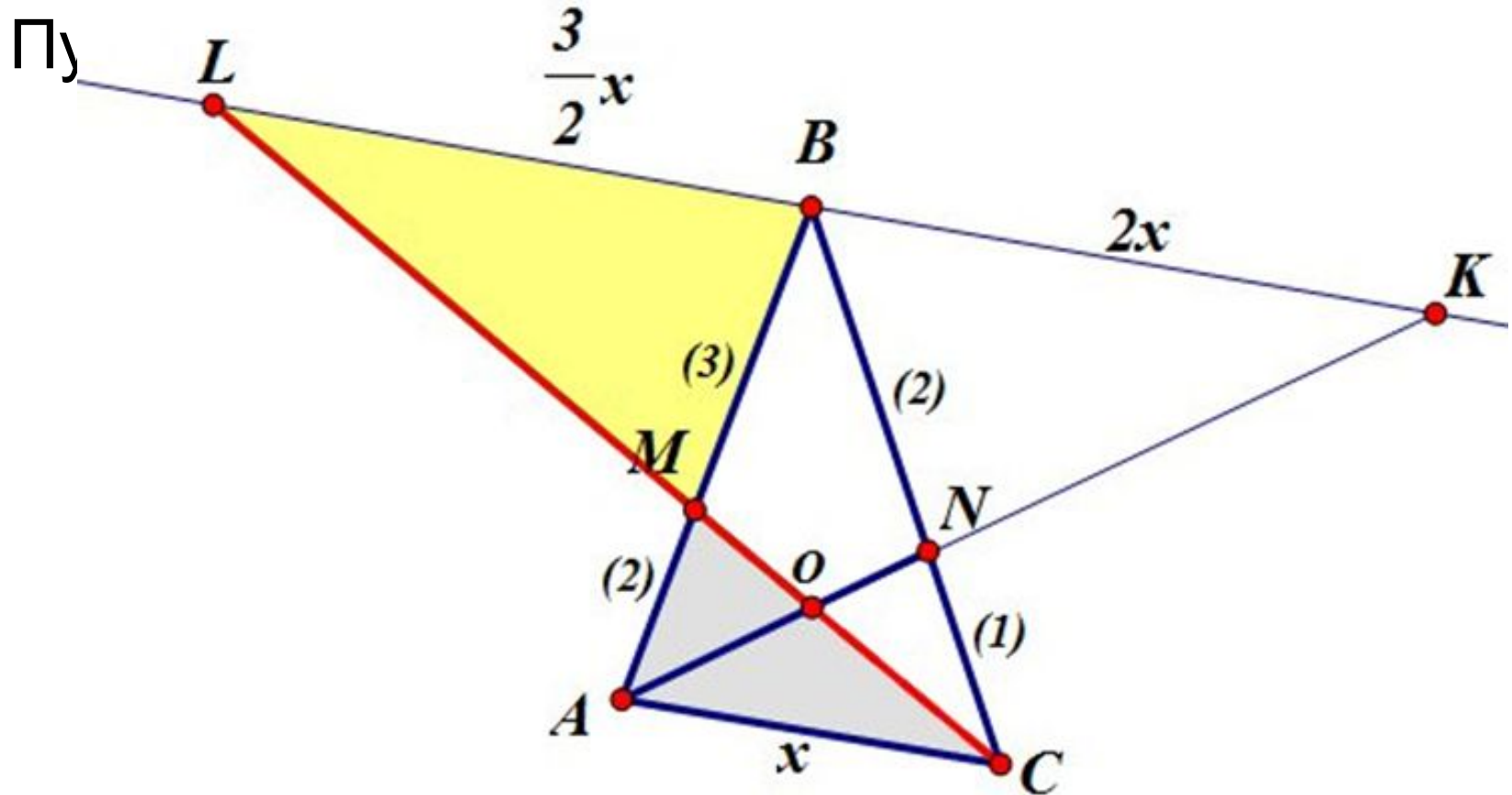
- **Задача 2.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM:MB=2:3$ ,  $BN:NC=2:1$ . Отрезки  $AN$  и  $CM$  пересекаются в точке  $O$ . Найти отношение



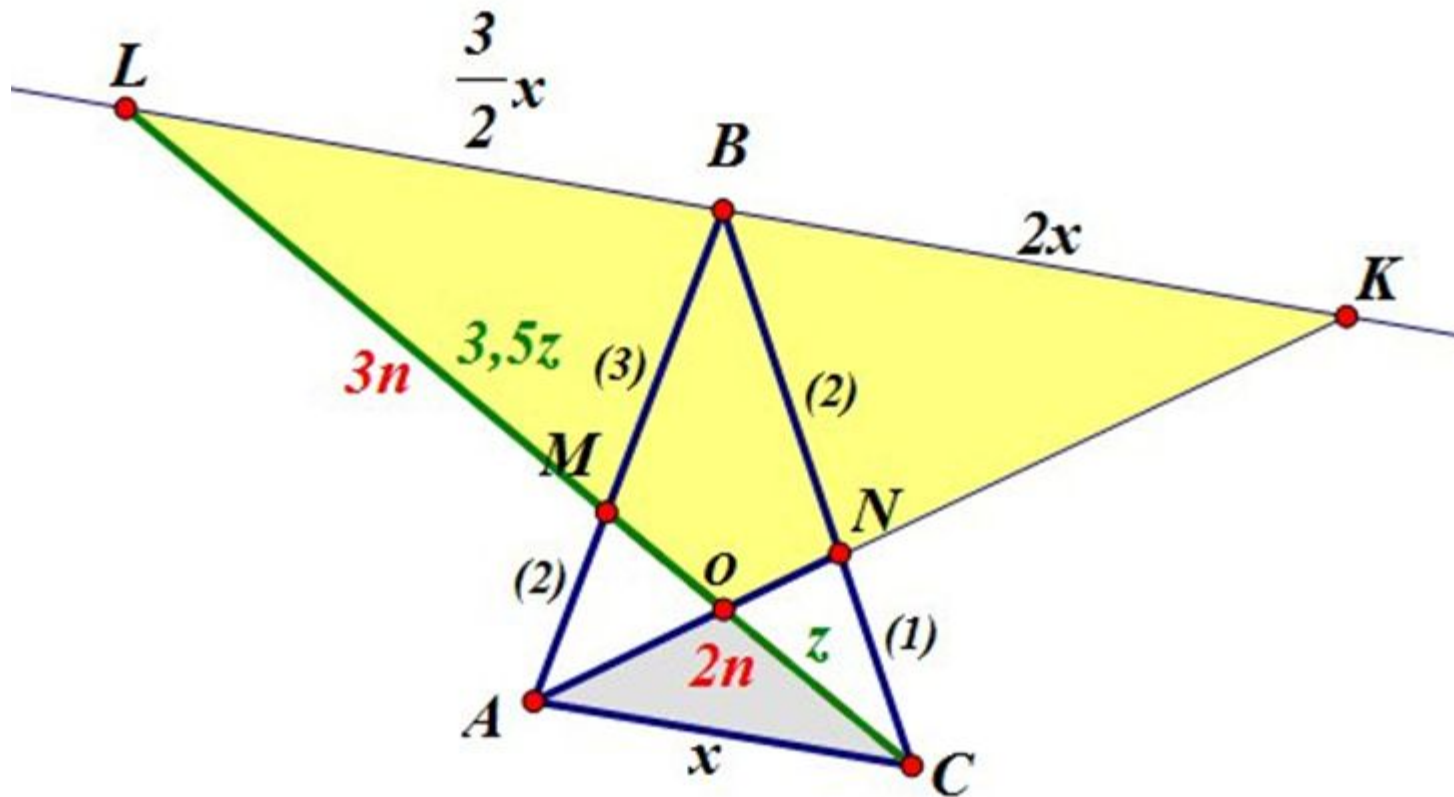
- Проведем через точку  $B$  прямую параллельно отрезку  $AB$ , затем продолжим отрезок  $AN$  до пересечения с этой прямой и поставим там точку  $K$ .
- Рассмотрим треугольники  $ANC$  и  $BNK$ . Эти треугольники подобны, так как  $AC \parallel BK$ . Стороны треугольника  $BNK$  относятся к сторонам тр



- Теперь продолжим отрезок  $MC$  до пересечения с прямой  $BK$ . Поставим там точку  $L$ .
- Мы получили подобные треугольники  $LMB$  и  $AMC$ , сходственные стороны которых относятся как  $3:2$ . Так как  $AC=x$ , то  $LB=1,5x$ .







- Теперь рассмотрим подобные треугольники LOK и AOC.

$$\frac{LK}{AC} = \frac{3,5x}{x} = \frac{3,5}{1} \Rightarrow \frac{LO}{OC} = \frac{3,5}{1} \quad \text{Тогда } LO+OC=LC=4,5z.$$

Получили, что  $5n=4,5z$ .

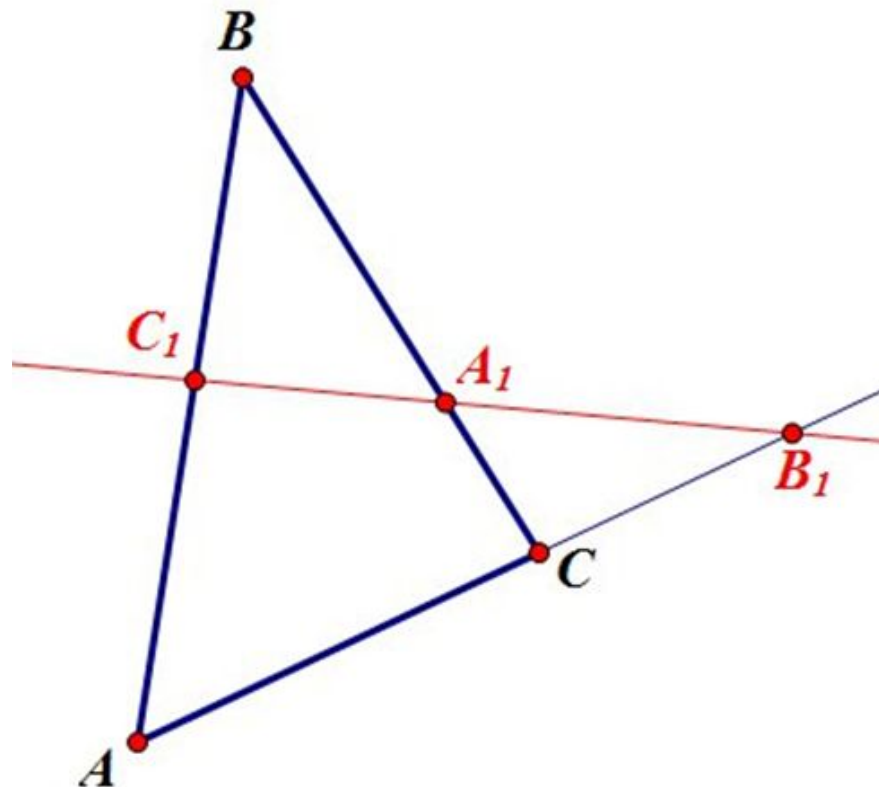
Тогда  $MC=2n=9/5z$ . Отсюда  $MO=MC-CO=9/5z-z=4/5z$

Отсюда  $CO:OM=z:4/5z=5:4=1,25$ .     **Ответ: 1,25**

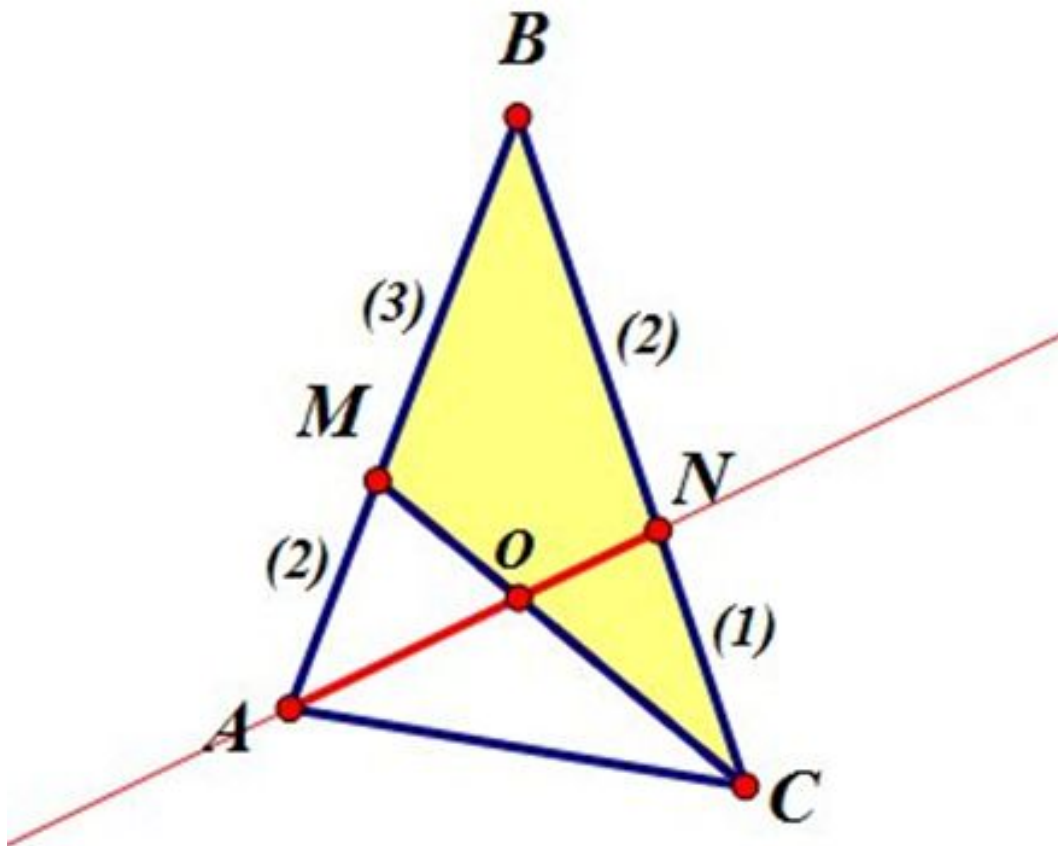
# Теорема Менелая

Пусть прямая пересекает треугольник  $ABC$ , причем  $C_1$  – точка ее пересечения со стороной  $AB$ ,  $A_1$  – точка ее пересечения со стороной  $BC$ , и  $B_1$  – точка ее пересечения с продолжением стороны  $CA$ . Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



- Применим эту теорему к нашей задаче. Рассмотрим треугольник  $MBC$  и прямую  $AN$ . Запишем теорему Менелая для этого треугольника



$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OM} \cdot \frac{MA}{AB} = 1$$

$$\frac{2}{1} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{5} = 1$$

$$\frac{CO}{OM} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Ответ : 1,25