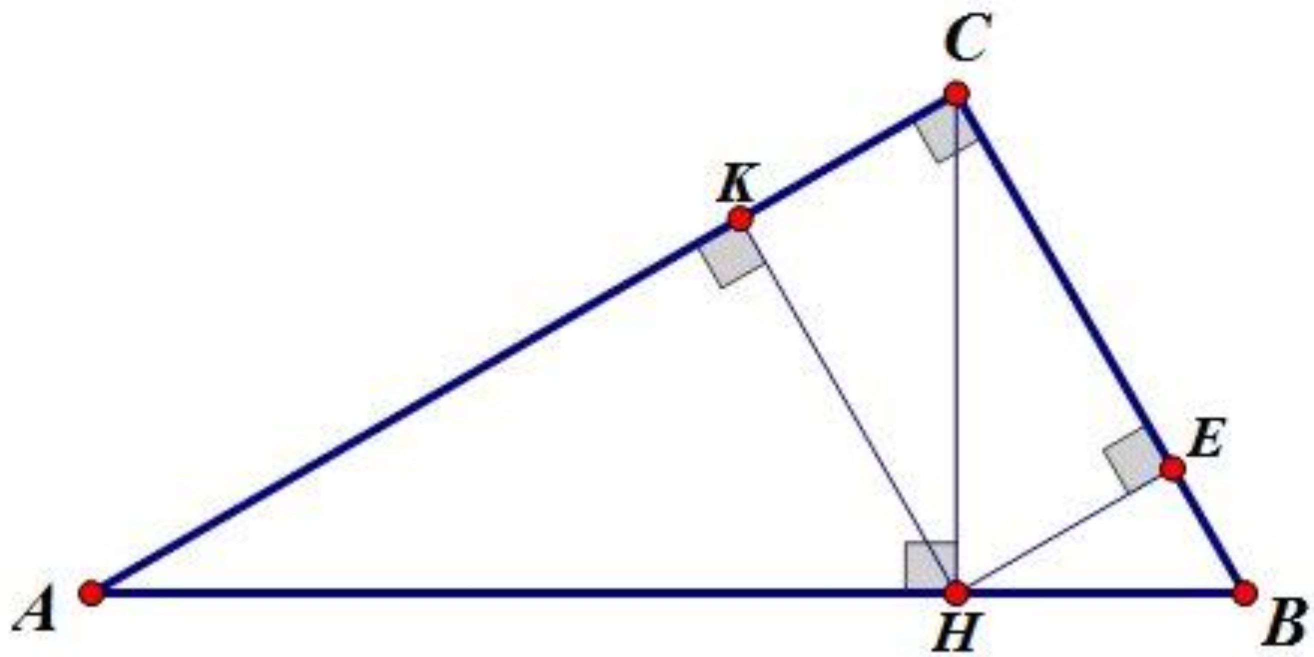
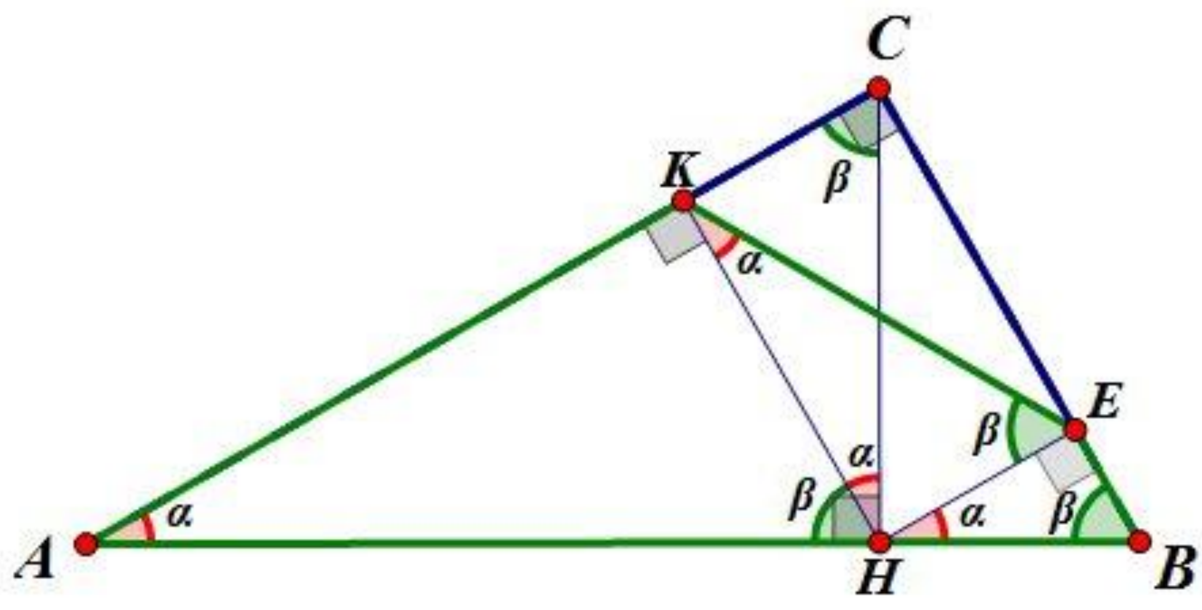
Задача 18

Готовимся к ЕГЭ

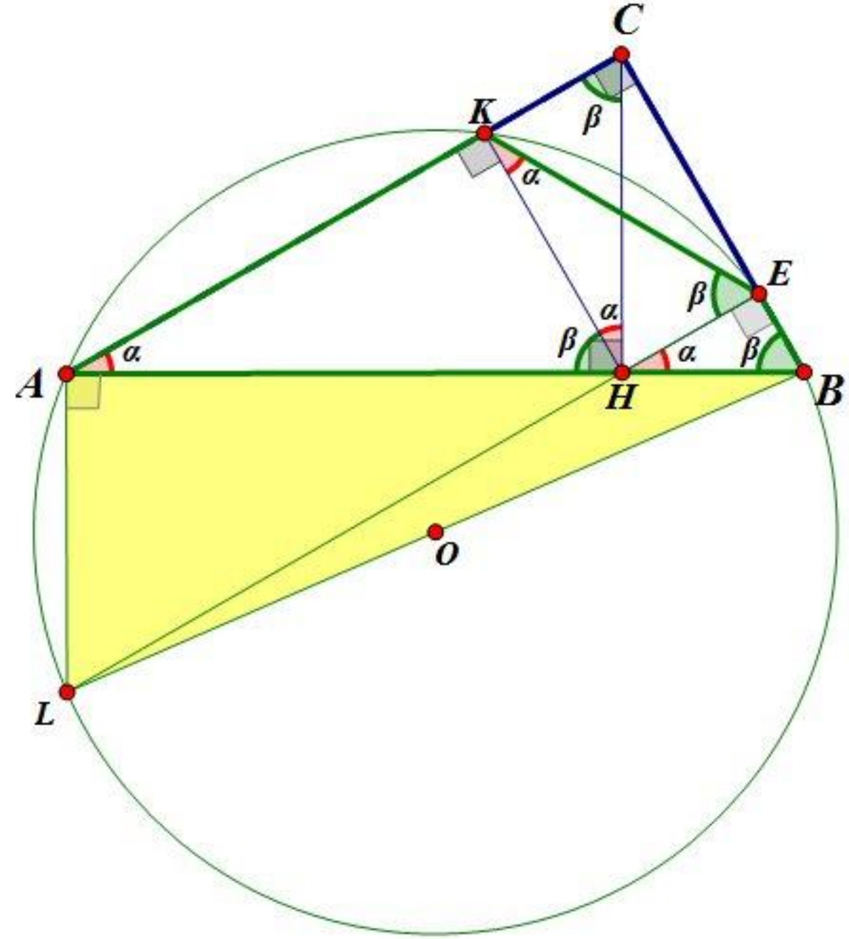
- **Задача 1.** На гипотенузу АВ прямоугольного треугольника АВС опустили высоту СН . Из точки Н на катеты опустили перпендикуляры НК и НЕ .
- а) Докажите, что точки А, В, К и Е лежат на одной окружности. б) Найдите радиус этой окружности, если АВ = 13, СН = 5



- а) Докажем, что четырехугольник АКЕВ можно вписать в окружность.
- Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^0. Отметим одинаковым цветом равные углы α и β:
- $\alpha + \beta = 90^0$ (Сумма острых углов прямоугольного треугольника). Тогда $\angle AKE + \angle EBA = \alpha + \beta + 90^0 = 180^0$, следовательно, около четырехугольника АКЕВ можно описать окружность.



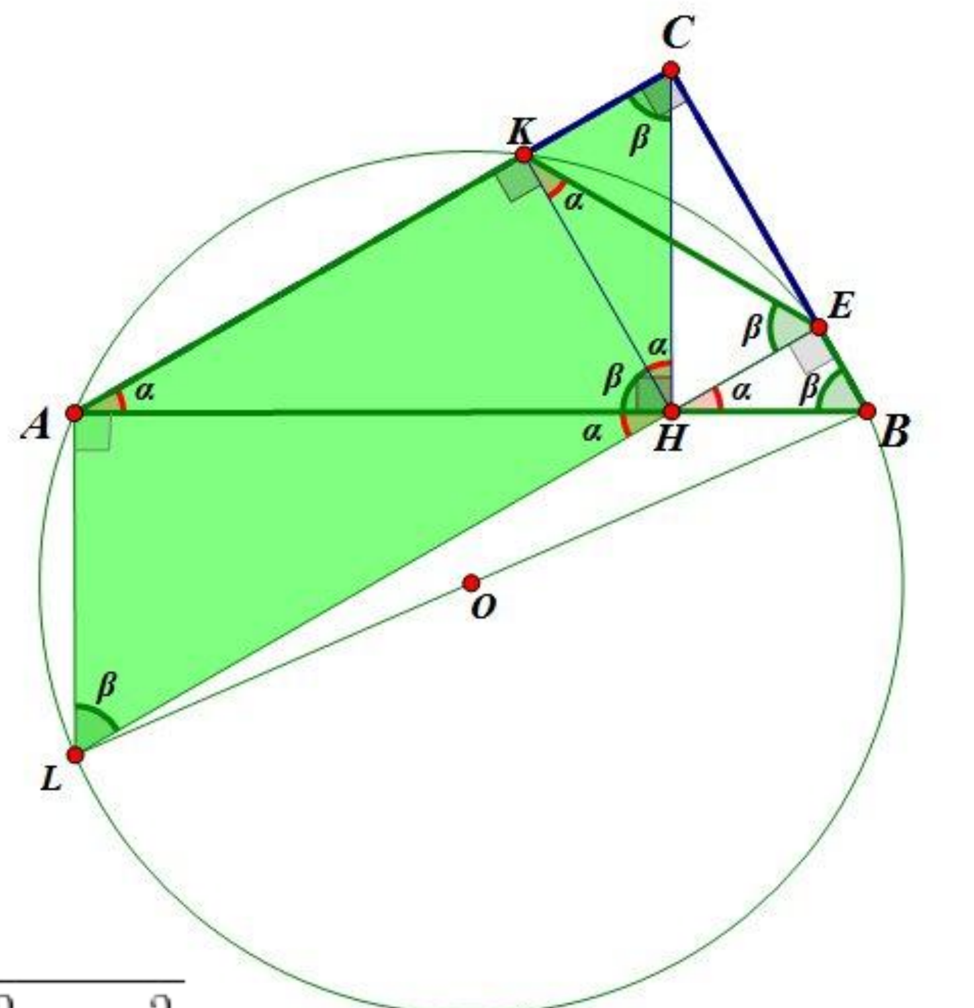
- б)Начертим окружность, описанную около четырехугольника AKEB
- Рассмотрим прямоугольный треугольник LAB. $\angle$LAB - вписанный угол, который опирается на диаметр LB, и, следовательно, $\angle LAB=90^0$
-



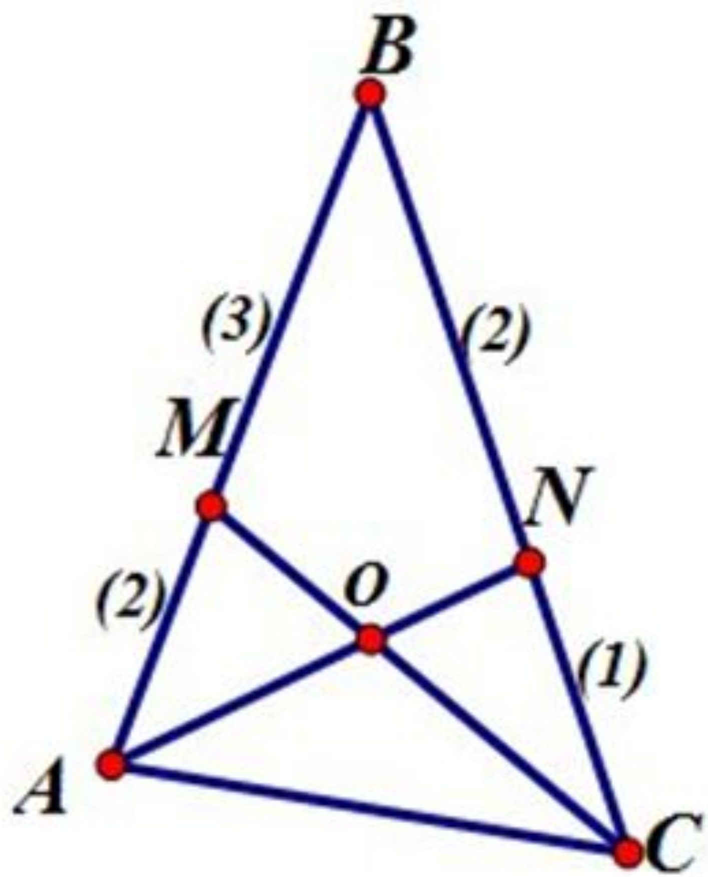
- В этом треугольнике мы знаем катет AB. По условию задачи AB=12. Найдем второй катет. Для этого рассмотрим четырехугольник LACH:

$AC \perp CB, \quad LE \perp CB, \quad \Rightarrow AC \| LH$

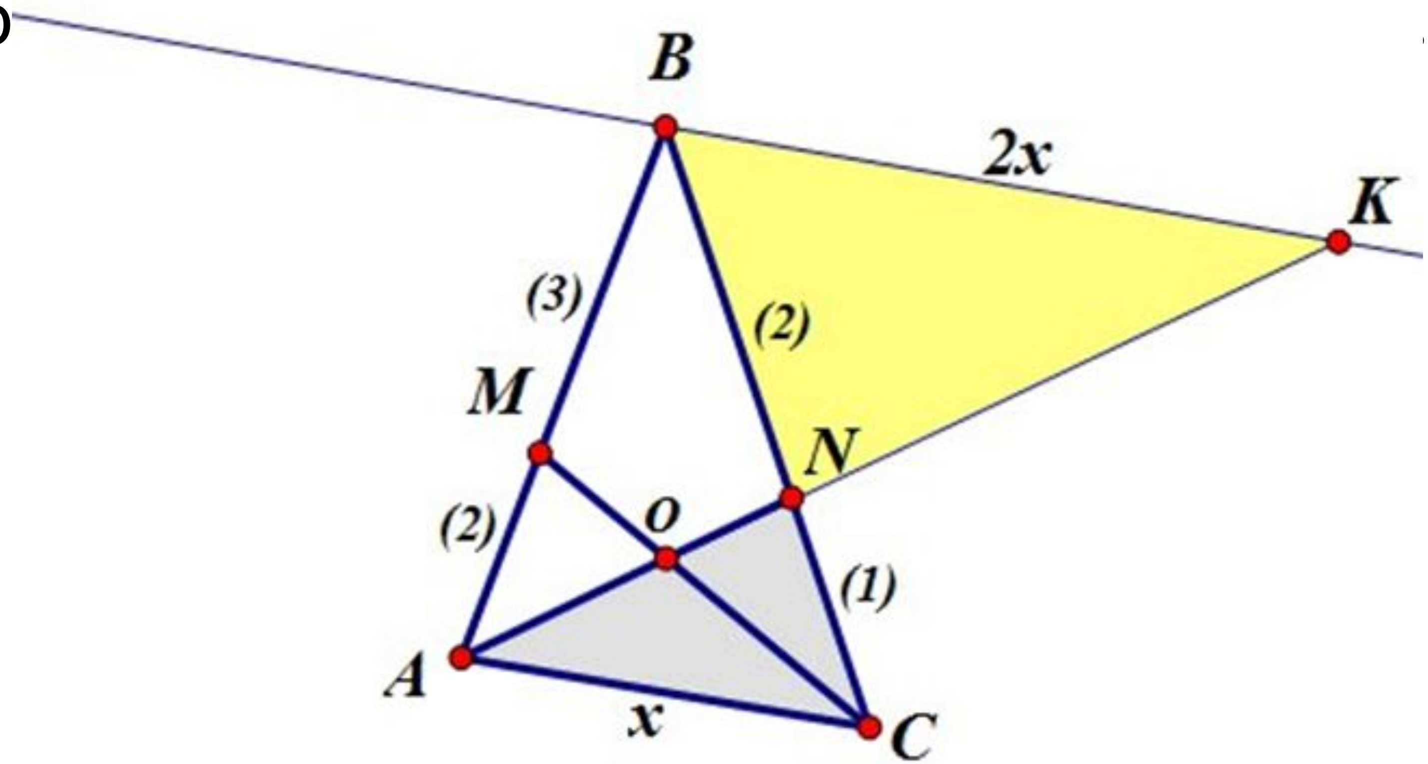
- $\angle$AHL=$\angle$EHB=α следовательно $\angle$ALH=β следовательно $\angle$ALH=$\angle$ACH, AL||CH . Значит ALCH параллелограмм.
- AL=CH=5 (По условию).
- Итак, задача свелась к нахождению гипотенузы прямоугольного треугольника LAB: $2R=\sqrt{5^2+12^2}=13$
- **ОТВЕТ: 6,5**



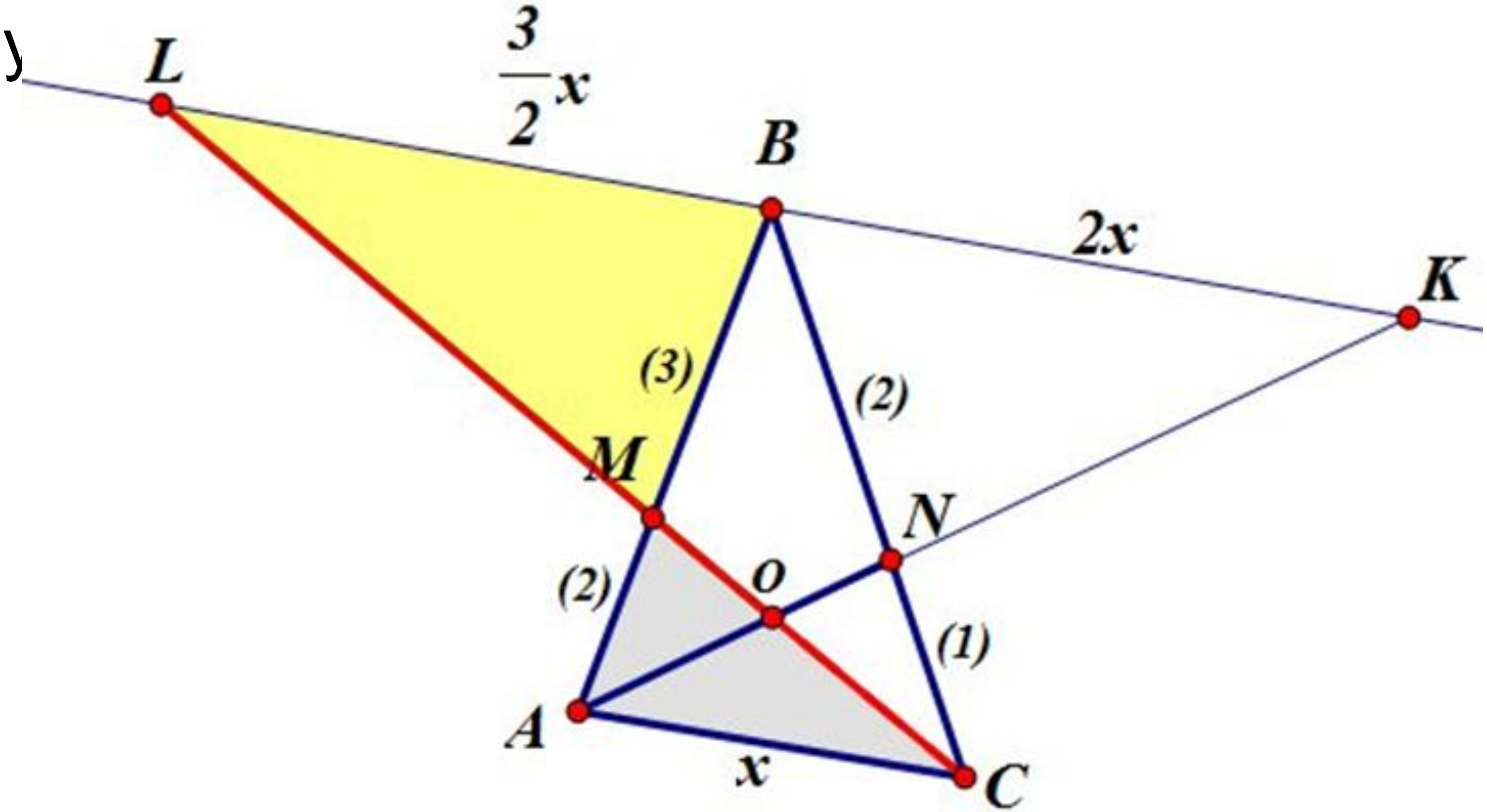
- **Задача 2.** На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что AM:MB=2:3, BN:NC=2:1. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение

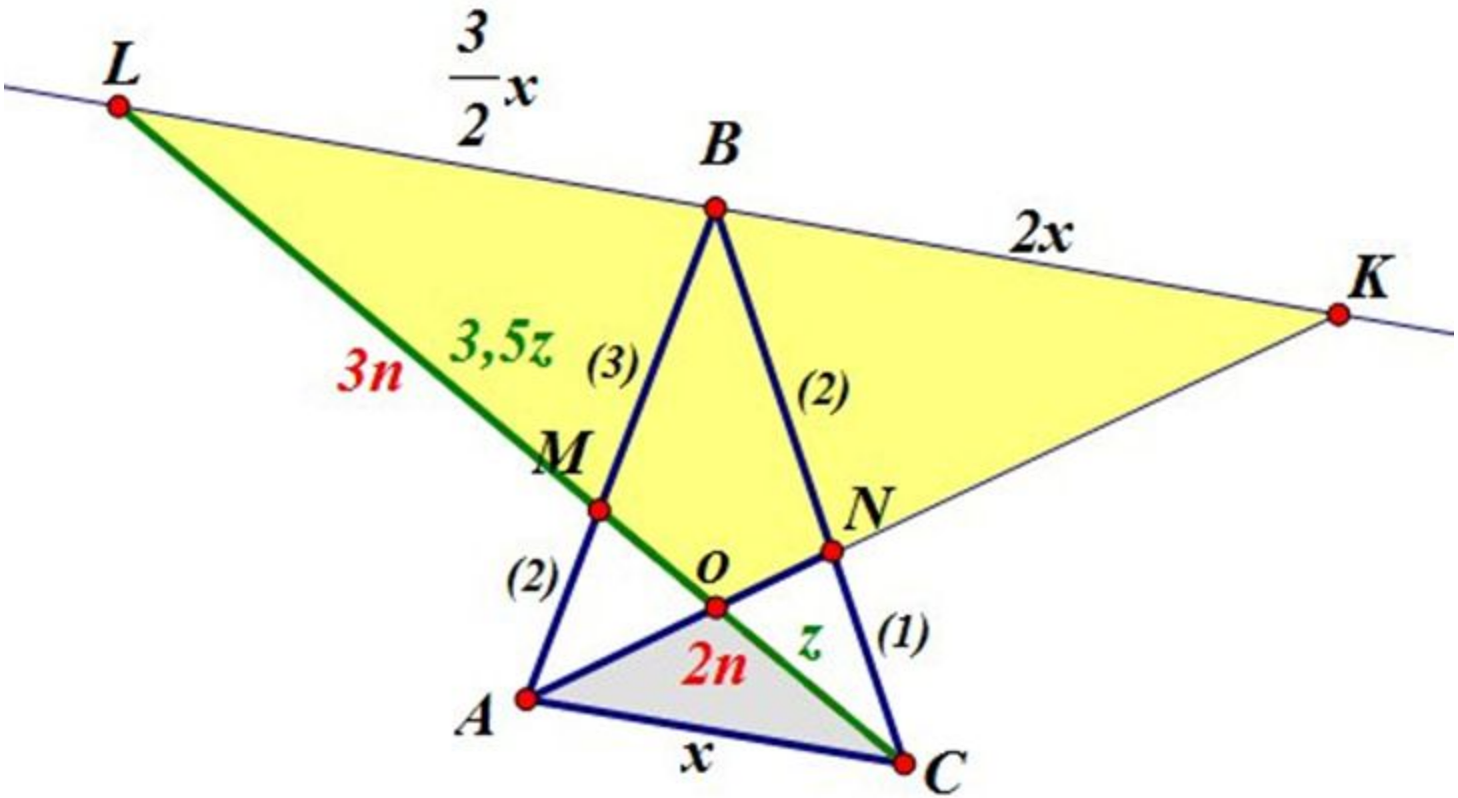


- Проведем через точку B прямую параллельно отрезку AB, затем продолжим отрезок AN до пересечения с этой прямой и поставим там точку K.
- Рассмотрим треугольники ANC и BNK. Эти треугольники подобны, так как AC||BK. Стороны треугольника BNK относятся к сторонам тр



- Теперь продолжим отрезок МС до пересечения с прямой ВК. Поставим там точку L.
- Мы получили подобные треугольники LMB и AMC, сходственные стороны которых относятся как 3:2. Так как AC=x, то LB=1,5x. Пу





- Теперь рассмотрим подобные треугольники LOK и AOC.

$\frac{LK}{AC}=\frac{3,5x}{x}=\frac{3,5}{1}\Rightarrow\frac{LO}{OC}=\frac{3,5}{1}$ Тогда LO+OC=LC=4,5z.

Получили, что 5n=4,5z.

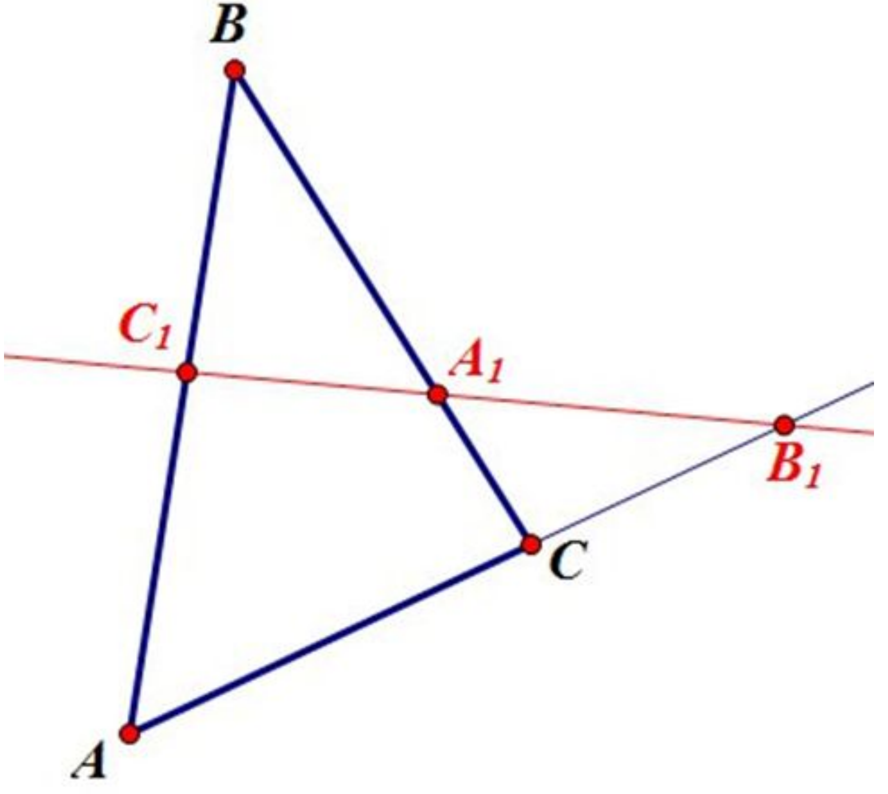
Тогда MC=2n=9/5z. Отсюда MO=MC-CO=9/5z-z=4/5z

Отсюда CO:OM=z:4/5z=5:4=1,25. **Ответ: 1,25**

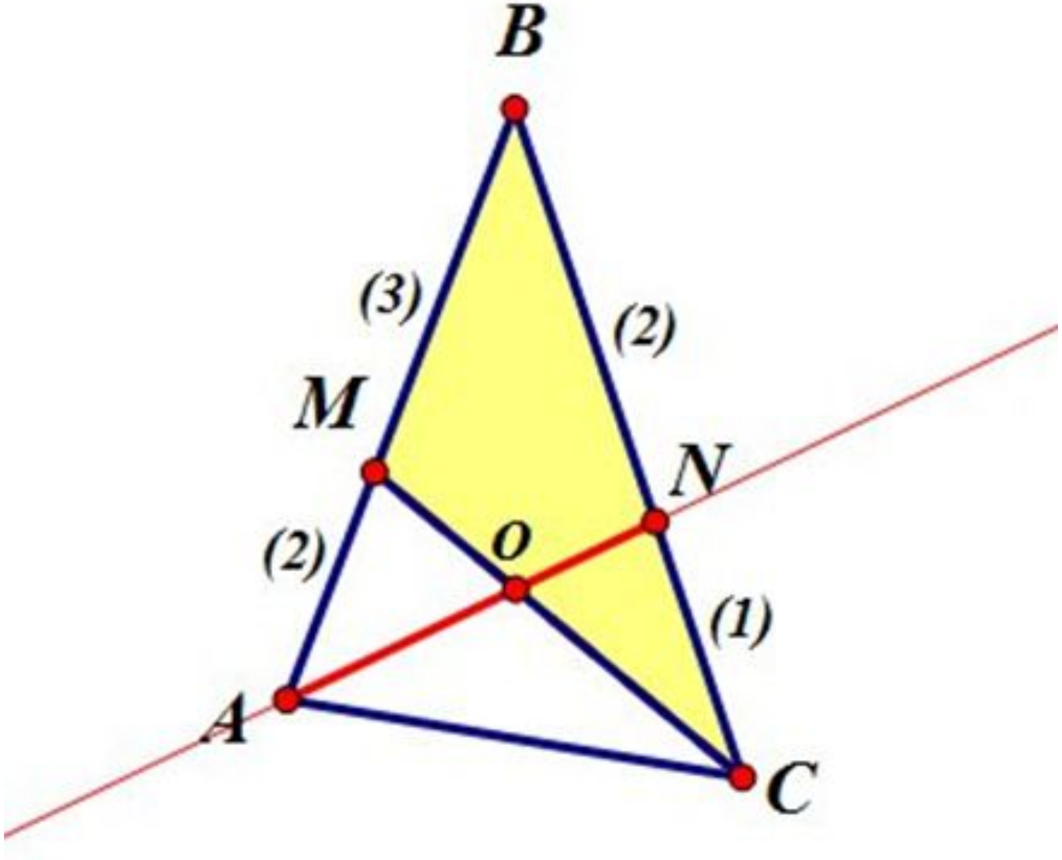
Теорема Менелая

Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$



- Применим эту теорему к нашей задаче. Рассмотрим треугольник MBC и прямую AN. Запишем теорему Менелая для этого треугольника



$$\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CO}{OM}\cdot\frac{MA}{AB}=1$$

$$\frac{2}{1}=\frac{CO}{OM}=\frac{2}{5}=1$$

$$\frac{CO}{OM}=\frac{5}{4}=1,25$$

$$\textit{Ответ}:1,25$$