Задачи с параметрами

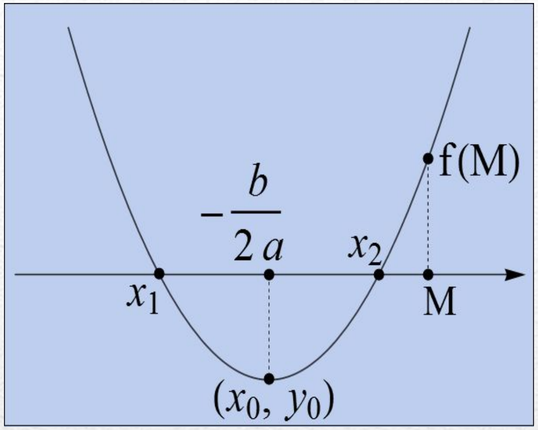
Расположение корней квадратного трёхчлена

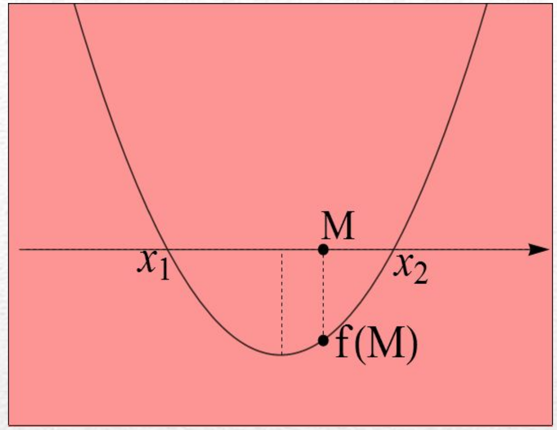
Презентация к уроку алгебры в 11 классе.
Учитель математики Лодина Виолетта Сергеевна.

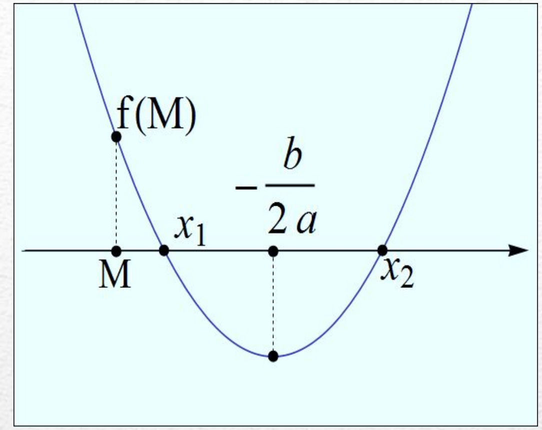
МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожный Московской области

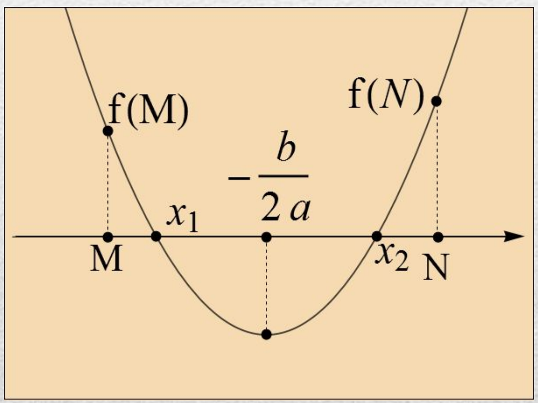
- В классах с углубленным изучением математики часто практикуются решение задач на выяснение расположения корней квадратного трёхчлена.
- В общеобразовательных классах эта тема изучается на элективных курсах. Ниже предлагается описание моего опыта работы по данной теме в 11 классе на занятиях элективного курса «Решение задач с параметрами». Используются два способа: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

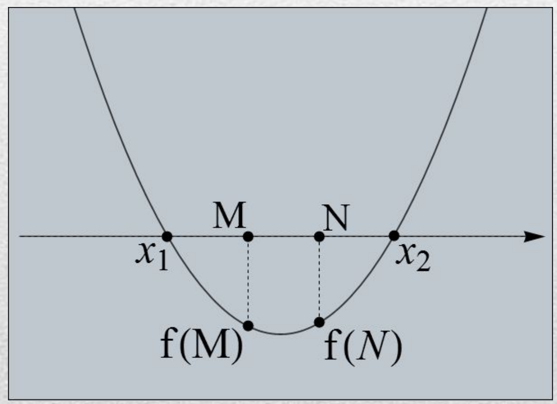
Изучение нового материала











Замечание. **Следует отдельно рассмотреть случай $a = 0$.**

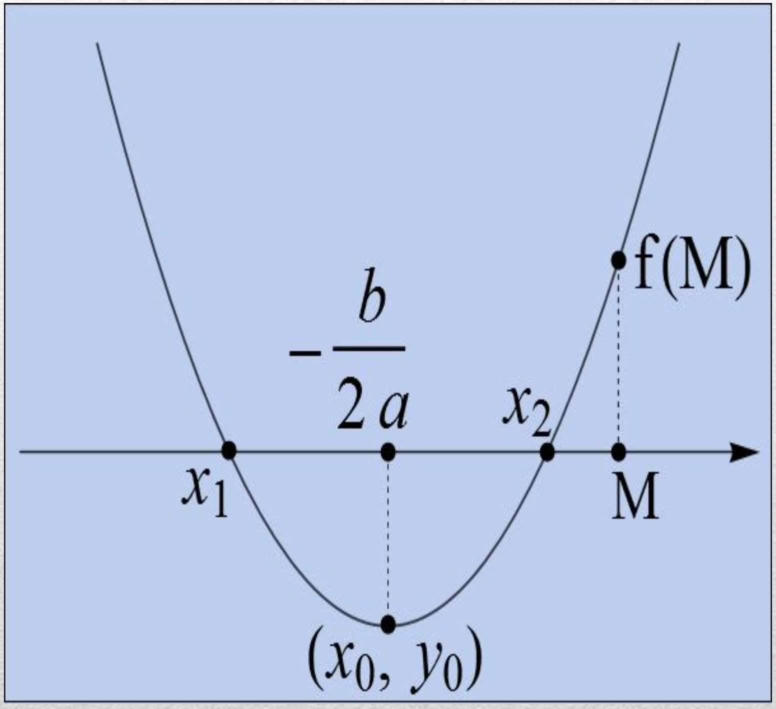
Рассмотрим все возможные пять случаев расположения корней квадратного трёхчлена

$$ax^2 + bx + c.$$

Оба корня меньше M, $\quad x_1 \le x_2 < M$

- $\begin{cases} D \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \text{ или } af'(M) > 0 \\ af(M) > 0 \end{cases}$

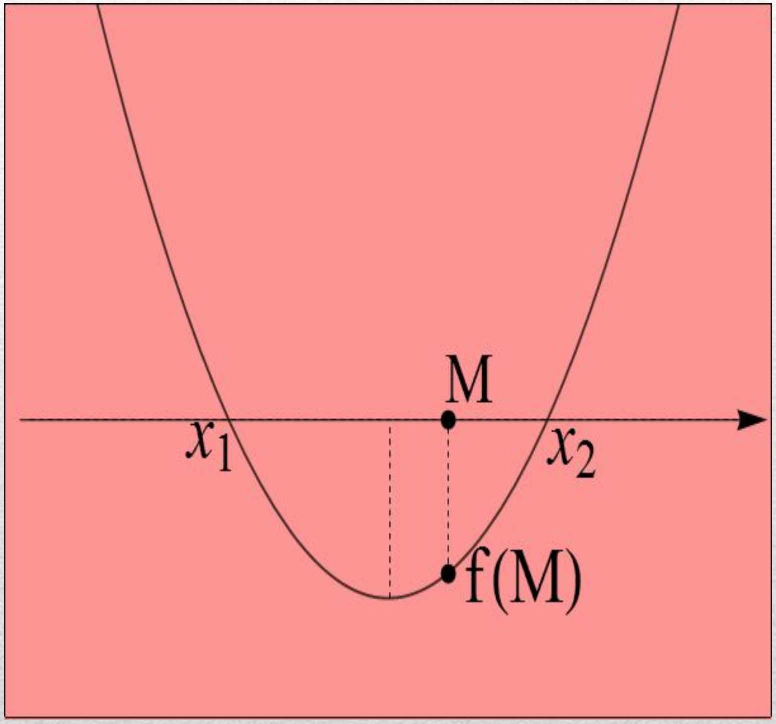
Два способа решения



1 случай

Один корень меньше, а другой больше M, $x_1 < M < x_2$

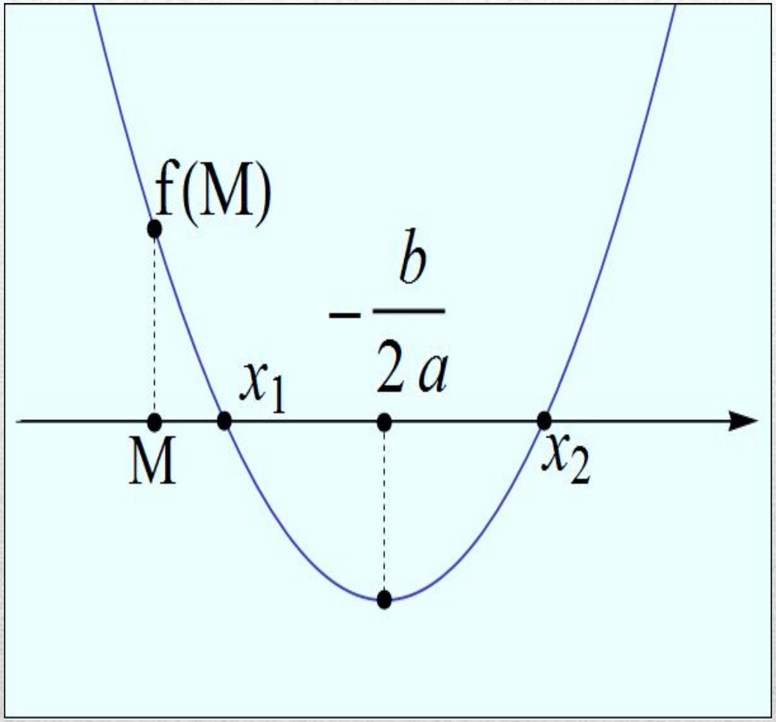
- $\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$



2 случай

Оба корня больше M, $M < x_1 \leq x_2$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{cases}$$



Два способа решения

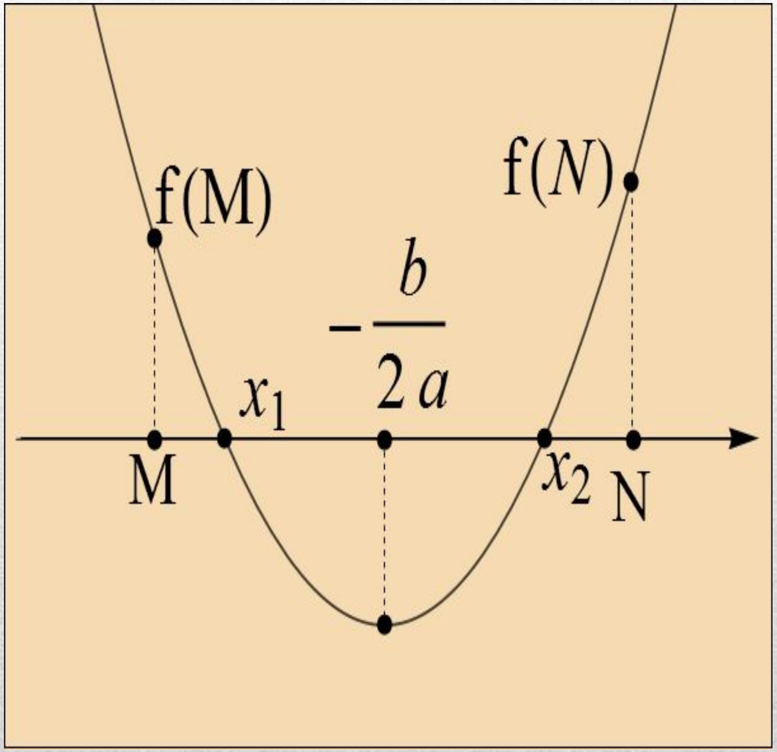
3 случай

Оба корня внутри интервала $(M; N)$, $\quad M < x_1 \le x_2 < N$

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \end{cases}$$

или

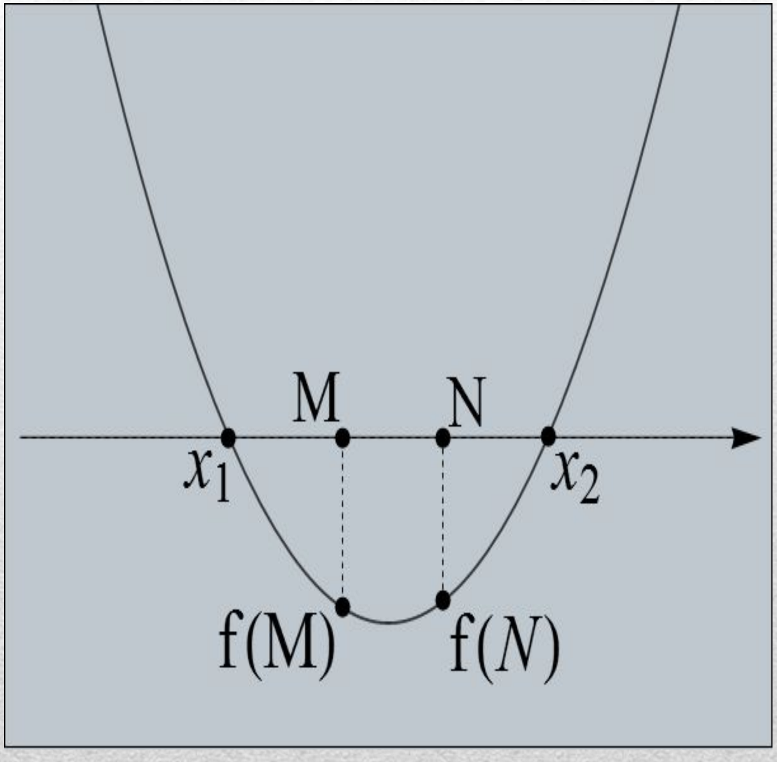
$$\begin{cases} D \ge 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ af'(N) > 0 \\ af'(M) < 0 \end{cases}$$



4 случай

$$x_1 < M < N < x_2$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \\ af(N) < 0 \end{cases}$$



5 случай

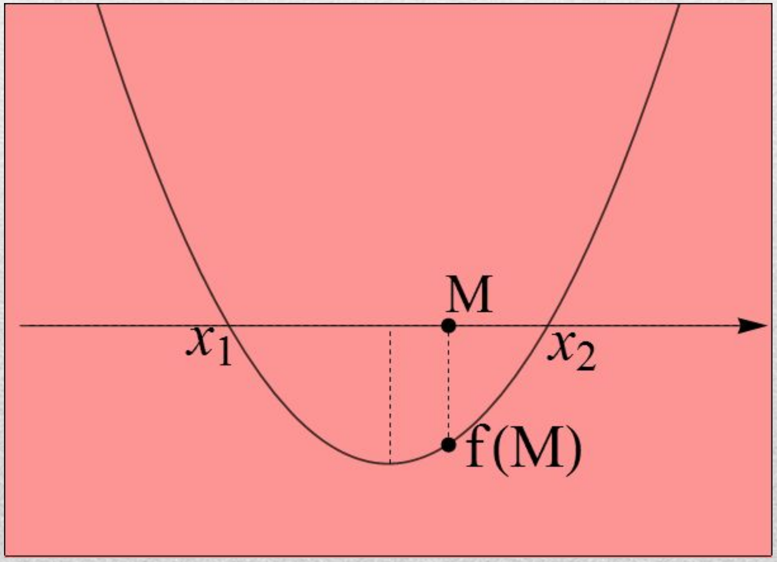
ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрим примеры применения рассмотренного учебного материала. Используем два способа решения: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

Замечание. **Следует особо рассмотреть случай $\boldsymbol{a = 0}$.**

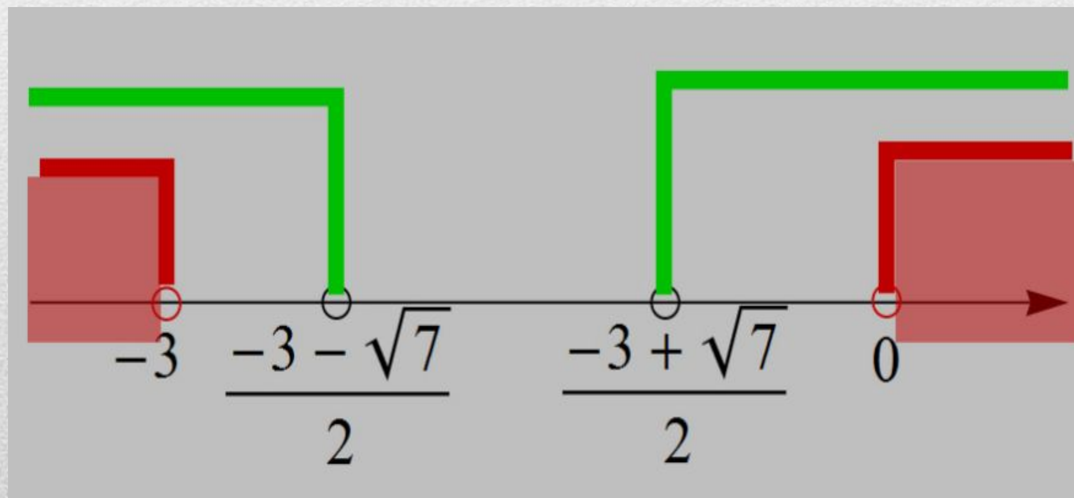
Пример №1. Найти значения a , при которых корни $x_{1,}\ x_2$ уравнения
$2x^2-(2a+1)x+a(a-1)=0$ **удовлетворяют условиям**
$x_1<a<x_2$.
Решение. **Используем второй случай. Составим систему неравенств .**

- $\begin{cases} D>0 \\ af(M)<0 \end{cases}$
-
- $\begin{cases} D>0 \\ 2f(a)<0 \end{cases}$



$$\begin{cases} 2a^2+6a+1>0 \\ 2(a^2+3a)>0 \end{cases} \begin{cases} 2\left(a-\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(a-\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}\right)>0 \\ 2a(a+3)>0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ a<\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-3 \end{array}\right. \end{cases}$$



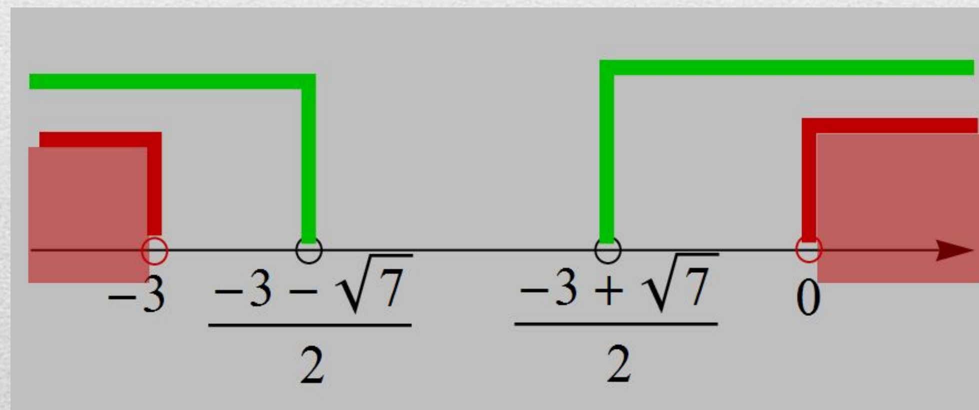
$\boldsymbol{a<-3, a>0.}$

Пример №1. Найти значения a, при которых корни x_1, x_2 уравнения $2x^2-(2a+1)x+a(a-1)=0$ удовлетворяют условиям $x_1<a<x_2$.

Решение. **Используем второй случай. Составим систему неравенств.**

$$\begin{cases} D>0 \\ 2f(a)<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a^2+6a+1>0 \\ 2(a^2+3a)>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\left(a-\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(a-\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\right)>0 \\ 2a(a+3)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-3 \end{array}\right. \end{cases}$$

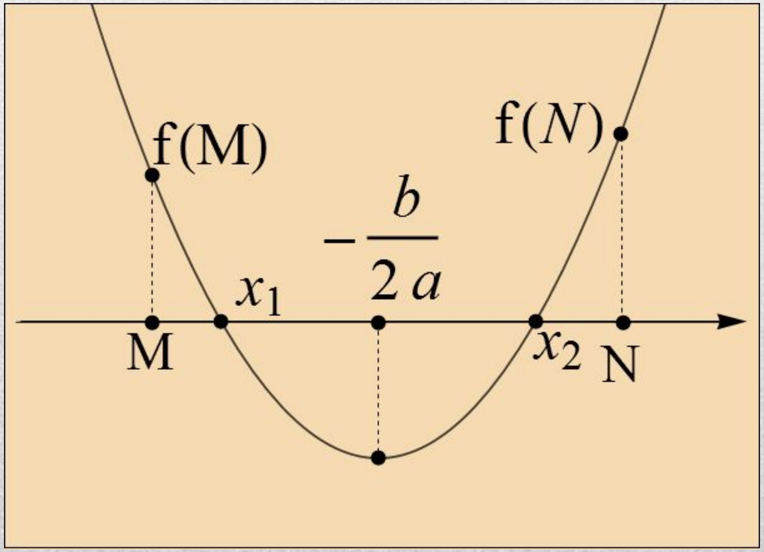


Ответ: $\mathbf{a<-3, a>0.}$

Пример №2. Найти все действительные значения a, при которых корни оба корня уравнения $(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0$ заключены между -2 и 0, т.е. $-2 < x_1 \le x_2 < 0$.

Решение. **Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.**

- $$\begin{cases} D \ge 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \end{cases}$$
-
- $$\begin{cases} D \ge 0 \\ (2a+3)f(0) > 0 \\ (2a+3)f(-2) > 0 \\ -2 < \dfrac{-a-1}{2(2a+3)} < 0 \end{cases}$$



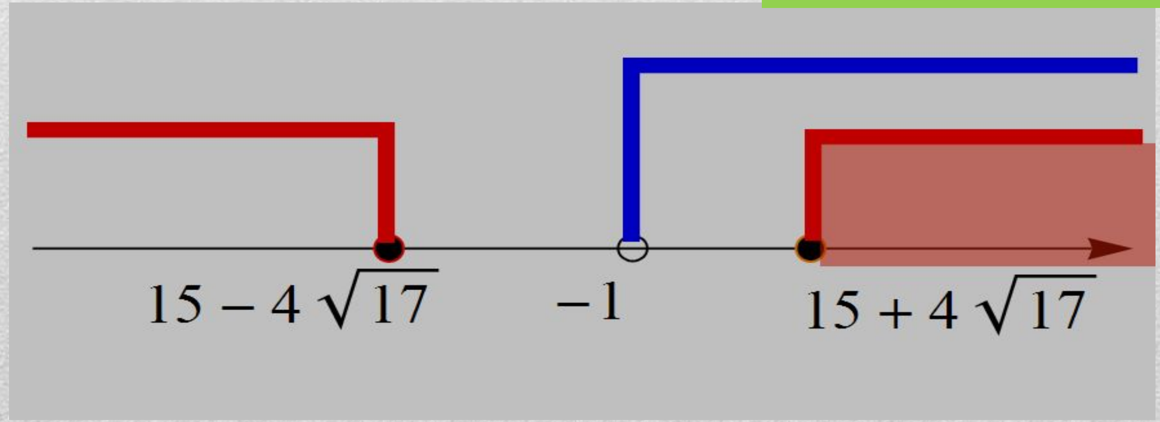
$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (2a+3)(3a+7) > 0 \\ \dfrac{a+1}{2a+3} > 0 \\ \dfrac{7a+11}{2a+3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ 3a + 7 > 0 \\ a + 1 > 0 \\ 7a + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \end{array}\right. \\ a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \end{array}\right. \\ a > -1{,}5 \\ a > -2\frac{1}{3} \\ a > -1 \\ a > -1\frac{4}{7} \end{cases}$$

$a > 15 + 4\sqrt{17}$



Пример №2. Найти все действительные значения a, при которых корни оба корня уравнения $(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0$ заключены между -2 и 0, т.е. $-2<x_1\le x_2<0$.

Решение. **Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.**

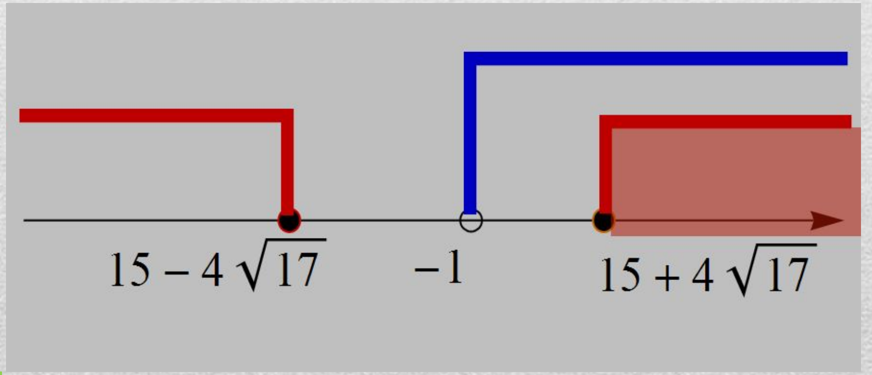
$$\begin{cases} D\ge 0 \\ (2a+3)f(0)>0 \\ (2a+3)f(-2)>0 \\ -2<\dfrac{-a-1}{2(2a+3)}<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2-30a-47\ge 0 \\ 2a+3>0 \\ (2a+3)(3a+7)>0 \\ \dfrac{a+1}{2a+3}>0 \\ \dfrac{7a+11}{2a+3}>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2-30a-47\ge 0 \\ 2a+3>0 \\ 3a+7>0 \\ a+1>0 \\ 7a+11>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a\ge 15+4\sqrt{17} \\ &a\le 15-4\sqrt{17} \end{aligned}\right. \\ a>-1{,}5 \\ a>-2\dfrac{1}{3} \\ a>-1 \\ a>-1\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a\ge 15+4\sqrt{17} \\ &a\le 15-4\sqrt{17} \end{aligned}\right. \\ a>-1 \end{cases}$$

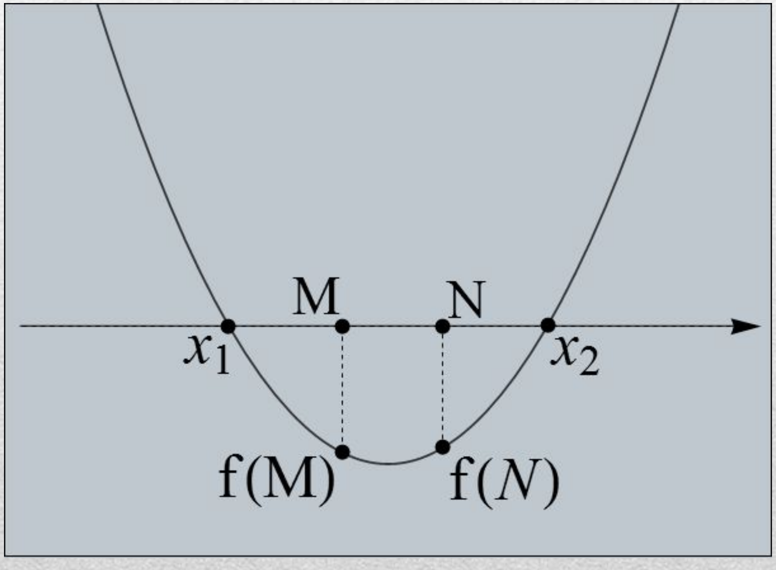


Ответ: $\boldsymbol{a>15+4\sqrt{17}}$

Пример №3. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ удовлетворяют условию $x_1<2<3<x_2$?

Решение. **Имеем пятый случай.**

$$\begin{cases} D>0 \\ af(M)<0 \\ af(N)<0 \end{cases}$$

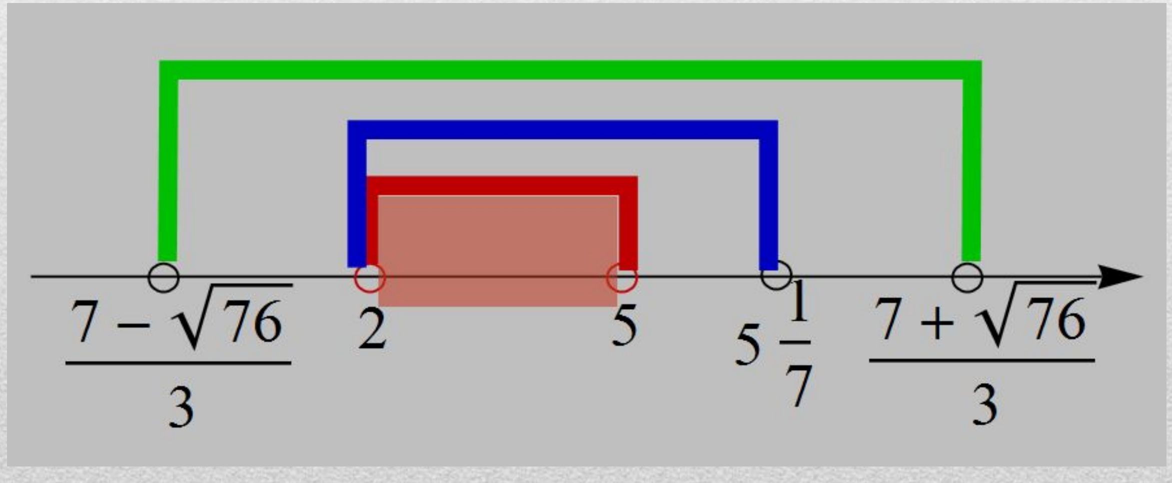


- $$\begin{cases} D>0 \\ (a-2)f(2)<0 \\ (a-2)f(3)<0 \end{cases}$$

Самостоятельно

$$\begin{cases} 3a^2 - 14a - 9 < 0 \\ (a-2)(a-5) < 0 \\ (a-2)(7a-36) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{7-\sqrt{76}}{3} < a < \dfrac{7+\sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

$\boldsymbol{2 < a < 5}$



Пример №3. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2 < 3 < x_2$?

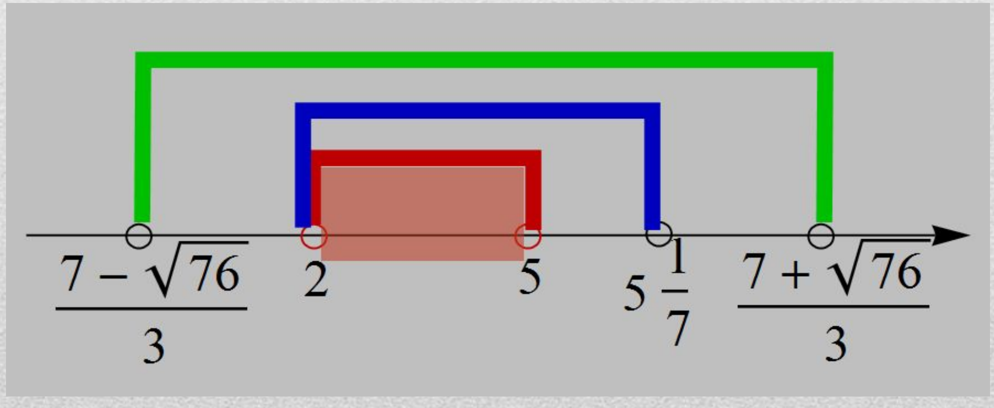
Решение. **Имеем пятый случай.**

- $$\begin{cases} D > 0 \\ (a-2)f(2) < 0 \\ (a-2)f(3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 14a - 9 < \\ (a-2)(a-5) < \\ (a-2)(7a-36) \end{cases}$$

-

- $$\begin{cases} \frac{7-\sqrt{76}}{3} < a < \frac{7+\sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\frac{1}{7} \end{cases}$$



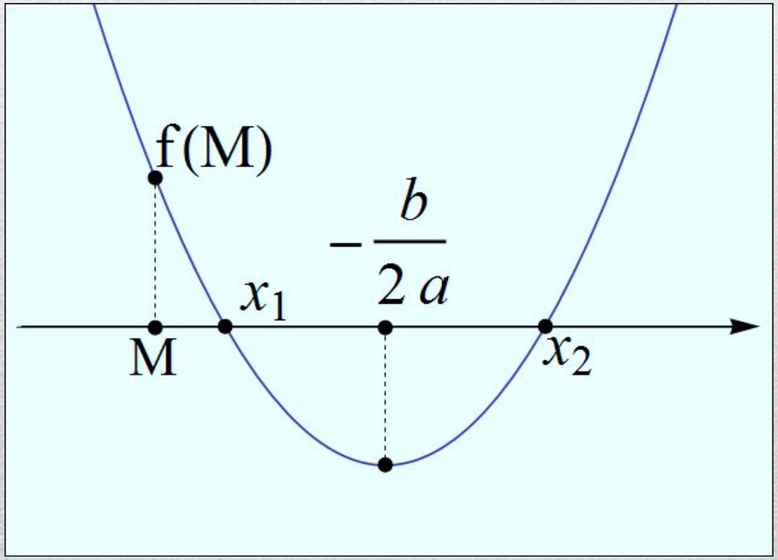
Ответ: $\mathbf{2 < a < 5}$

Пример №4. При каких значениях a корни уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ удовлетворяют условию $x_1>x_2>1$?

Решение. **Имеем третий случай.**

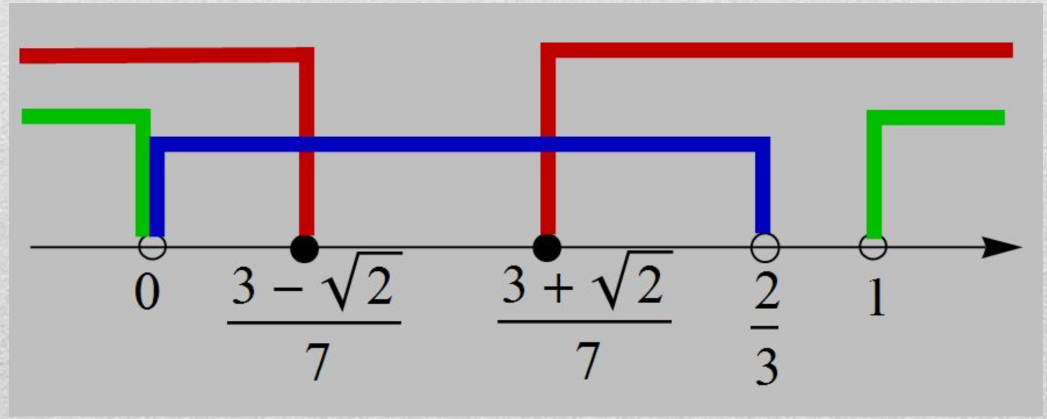
- $$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{cases}$$
-

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$



- $$\begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a-1) > 0 \\ a(3a-2) < 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7} \\ a \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < 0 \end{array}\right. \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



ни при каких.

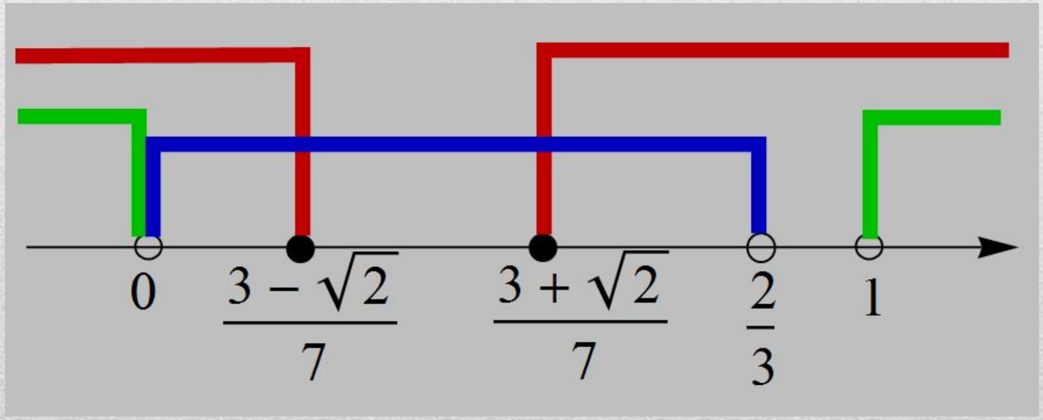
Пример №4. При каких значениях a корни уравнения $ax^2 - 2(2a-1)x + 2 - 3a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 > x_2 > 1$?

***Решение*. Имеем третий случай.**

- $$\begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a-1) > 0 \\ a(3a-2) < 0 \end{cases}$$

-
- $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7} \\ a \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < 0 \end{array}\right. \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



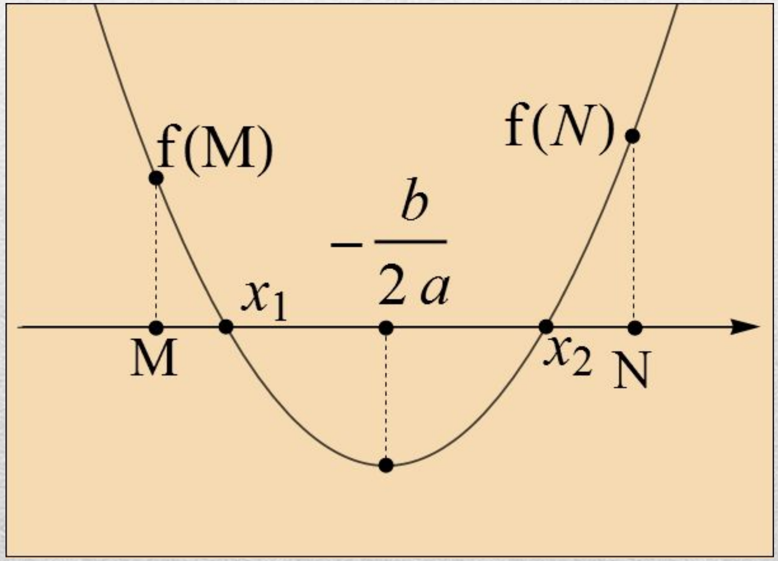
Ответ: **ни при каких.**

№5. При каких a все решения уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ удовлетворяют условию $0<x<3$?

Решение. **Имеет место четвёртый случай.**

- $$\begin{cases} af(M)>0 \\ af(N)>0 \\ af'(N)>0 \\ af'(M)<0 \end{cases}$$

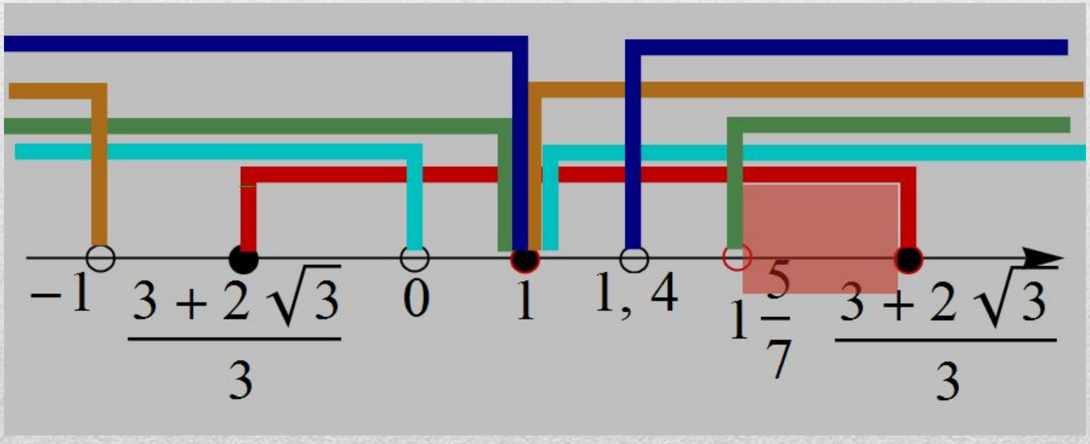
- $$\begin{cases} D\geq 0 \\ (a-1)f(0)>0 \\ (a-1)f(3)>0 \\ (a-1)f'(0)<0 \\ (a-1)f'(3)>0 \end{cases}$$



Самостоятельно

$$\begin{cases} 3a^2-6a-1\le 0 \\ a(a-1)>0 \\ (a-1)(7a-12)>0 \\ (a-1)(a+1)>0 \\ (a-1)(5a-7)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>1\frac{5}{7} \\ a<1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>1 \\ a<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>1{,}4 \\ a<1 \end{array}\right. \end{cases}$$



Если $a-1=0,\ a=1,$
$x=0{,}5$

$\boldsymbol{a=1,\quad 1\frac{5}{7}<a\le\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.}$

№5. При каких a все решения уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ удовлетворяют условию $0<x<3$?

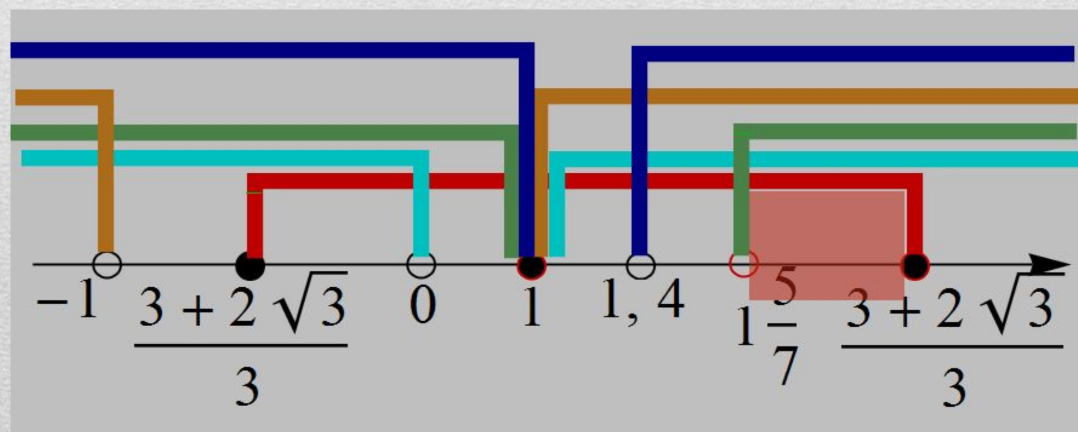
Решение. **Имеет место четвёртый случай.**

- $$\begin{cases} D \geq 0 \\ (a-1)f(0) > 0 \\ (a-1)f(3) > 0 \\ (a-1)f'(0) < 0 \\ (a-1)f'(3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2-6a-1 \leq 0 \\ a(a-1) > 0 \\ (a-1)(7a-12) > 0 \\ (a-1)(a+1) > 0 \\ (a-1)(5a-7) > 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq a \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 1\frac{5}{7} \\ a < 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > 1{,}4 \\ a < 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Если $a-1=0,\ a=1,\ x=0{,}5.$



Ответ: $\boldsymbol{a=1,\quad 1\frac{5}{7}<a\leq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$.

- **№1.** При каких с оба корня уравнения
  $x^2 + 4cx + 1 - 2c + 4c^2 = 0$ меньше -1?
- **№2**. При каких a оба корня уравнения
  $(a+1)x^2 - 3ax + 4 = 0$ больше 1?
- **№3.** При каких a один из корней уравнения
  $x^2 - (3a+2)x + 2a - 1 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?
- **№4**. Найти все значения a, для которых один корень уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?
- **№5.** При каких a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?

Упражнения для домашнего задания