

Задачи с параметрами

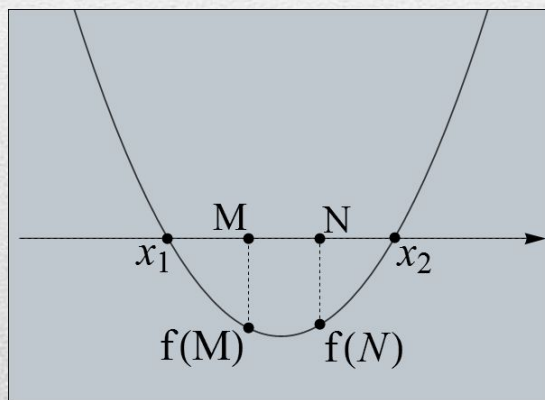
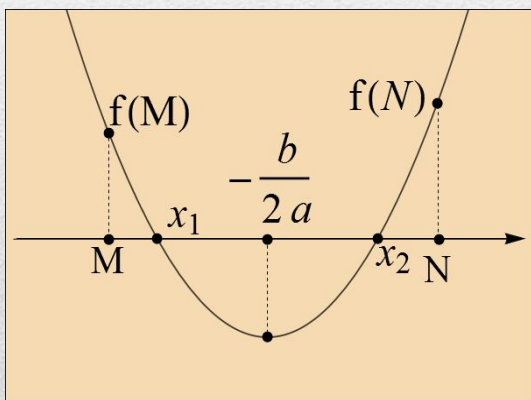
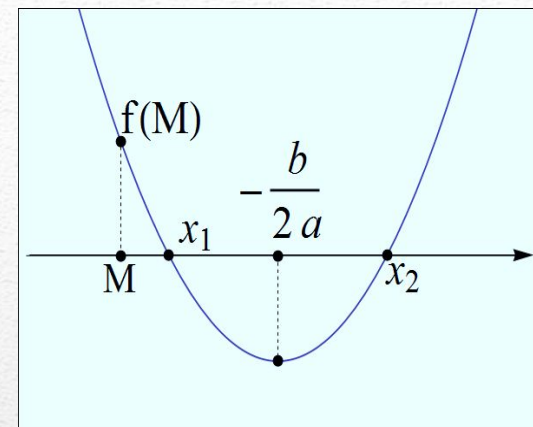
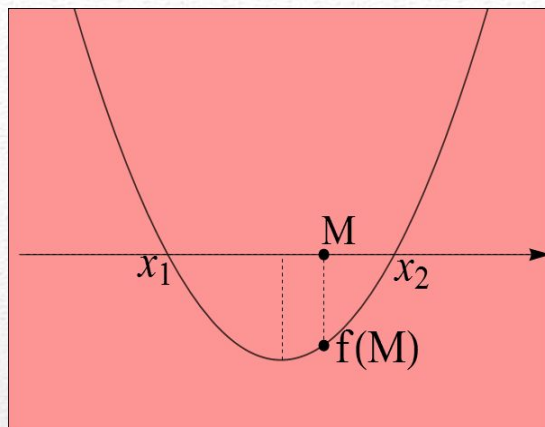
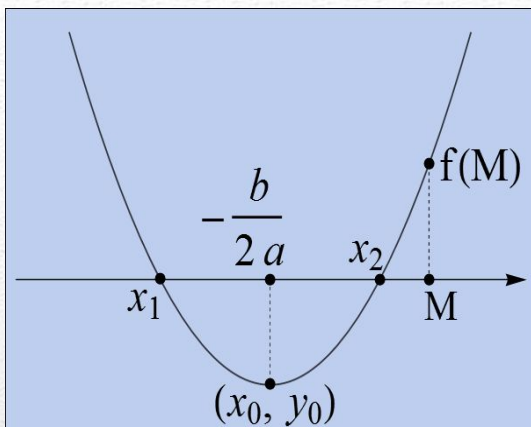
Расположение корней квадратного трёхчлена

Презентация к уроку алгебры в 11 классе.
Учитель математики Лодина Виолетта Сергеевна.

МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожный Московской области

- В классах с углубленным изучением математики часто практикуется решение задач на выяснение расположения корней квадратного трёхчлена.
- В общеобразовательных классах эта тема изучается на элективных курсах. Ниже предлагается описание моего опыта работы по данной теме в 11 классе на занятиях элективного курса «Решение задач с параметрами». Используются два способа: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

Изучение нового материала



Замечание. Следует отдельно рассмотреть случай $a = 0$.

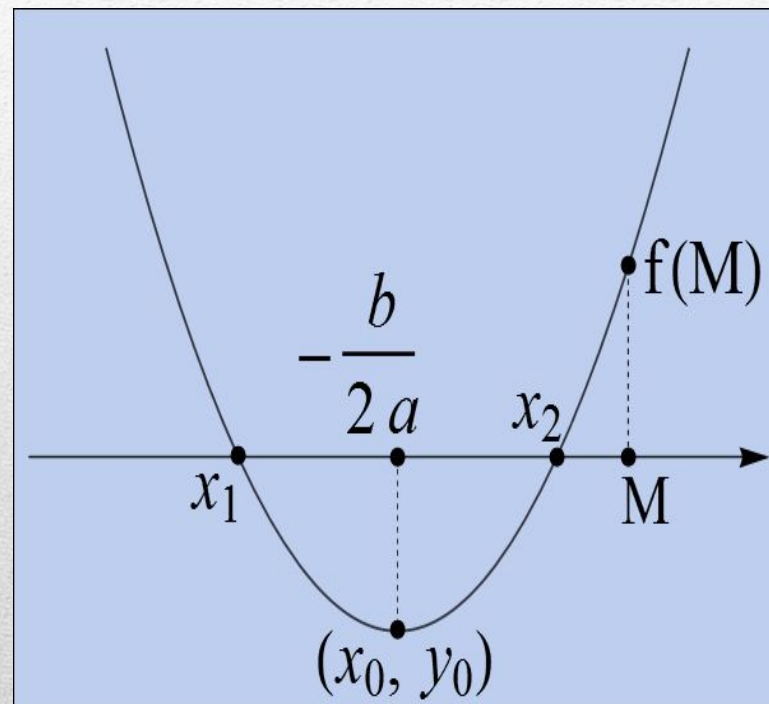
Рассмотрим все возможные пять случаев расположения корней квадратного трёхчлена

$$ax^2 + bx + c.$$

Оба корня меньше M , $x_1 \leq x_2 < M$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < M \text{ или } af'(M) > 0 \\ af(M) > 0 \end{array} \right.$$

Два способа решения

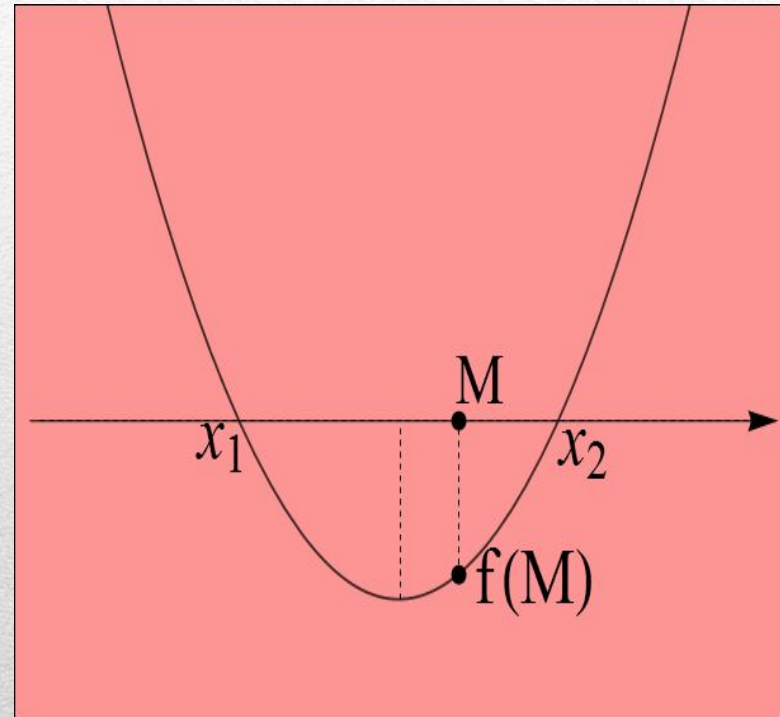


1 случай

Один корень меньше,

а другой больше M , $x_1 < M < x_2$

- $$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$$

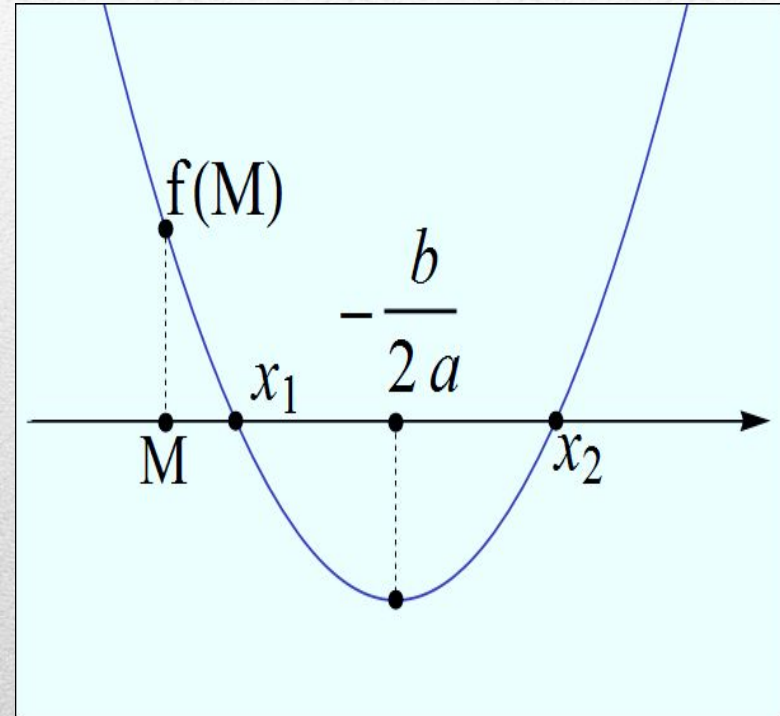


2 случай

Оба корня больше M , $M < x_1 \leq x_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{array} \right.$$

Два способа решения



3 случай

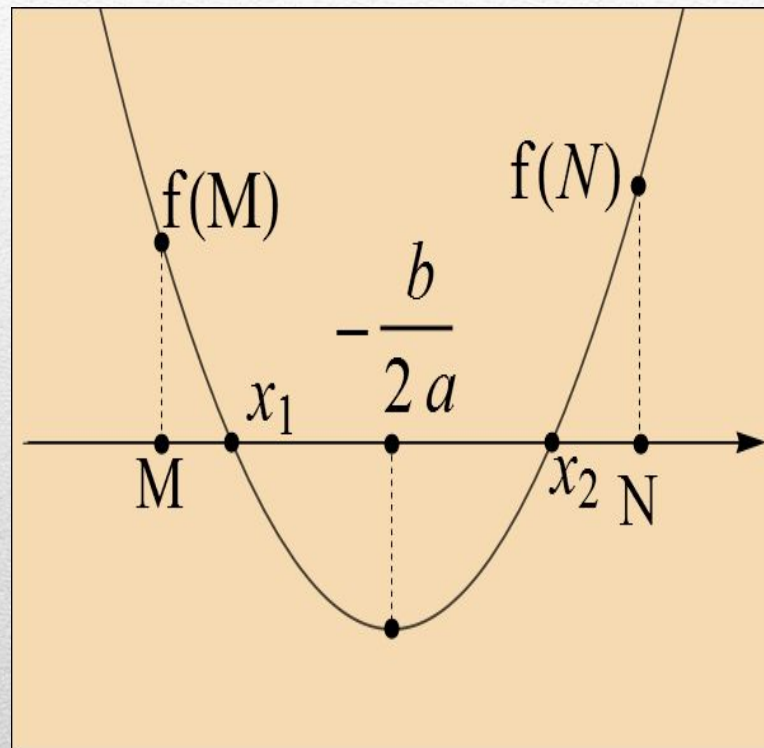
Оба корня внутри
интервала $(M; N)$,

$$M < x_1 \leq x_2 < N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N \end{array} \right.$$

или

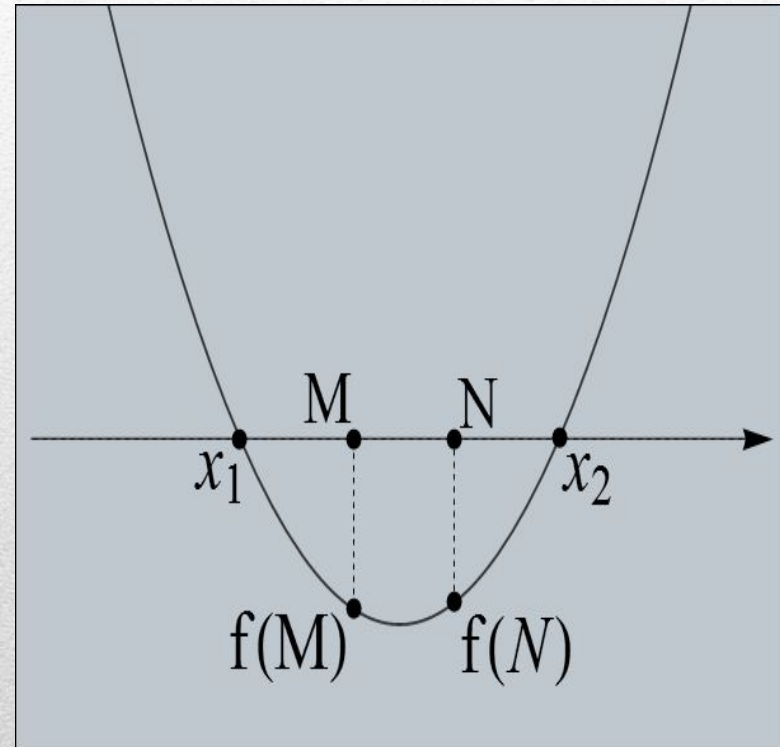
$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ af'(N) > 0 \\ af'(M) < 0 \end{array} \right.$$



4 случай

$$x_1 < M < N < x_2$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \\ af(N) < 0 \end{cases}$$



5 случай

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрим примеры применения рассмотренного учебного материала. Используем два способа решения: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

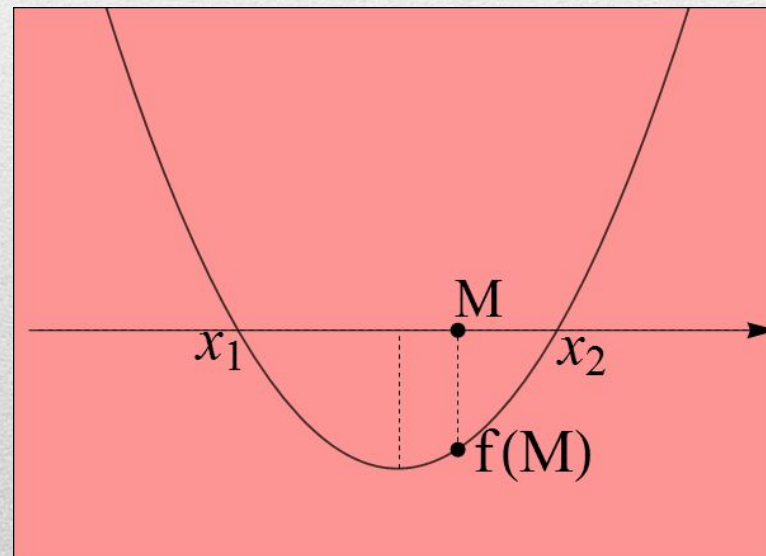
Замечание. Следует особо рассмотреть случай $a = 0$.

Пример №1. Найти значения a , при которых корни x_1, x_2 уравнения

$2x^2 - (2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < a < x_2$.

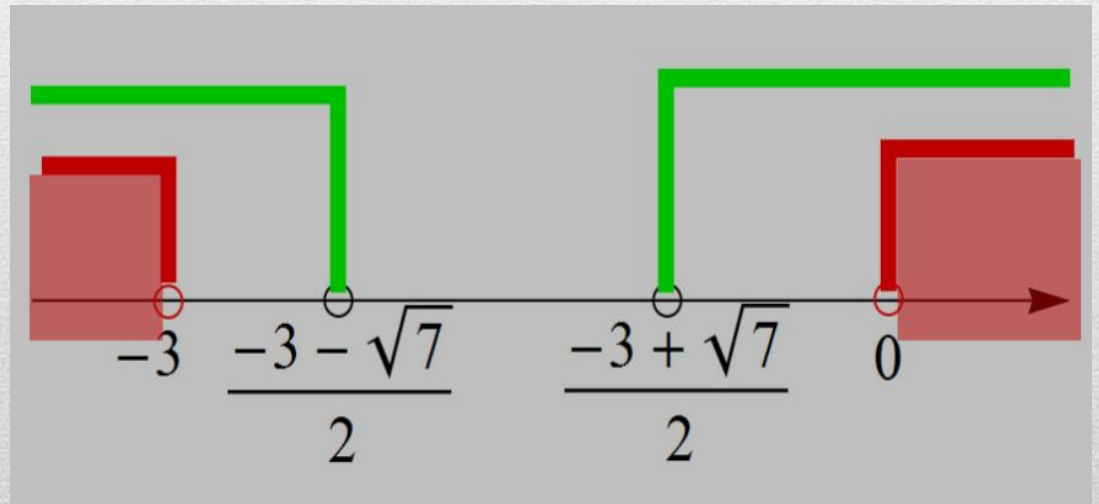
Решение. Используем второй случай. Составим систему неравенств.

- $\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} D > 0 \\ 2f(a) < 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} 2a^2 + 6a + 1 > 0 \\ 2(a^2 + 3a) > 0 \end{cases} \begin{cases} 2 \left(a - \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \right) \left(a - \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \right) > 0 \\ 2a(a + 3) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \left[a > \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \right. \\ \left. a < \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \right] \\ \left[a > 0 \right. \\ \left. a < -3 \right] \end{cases}$$



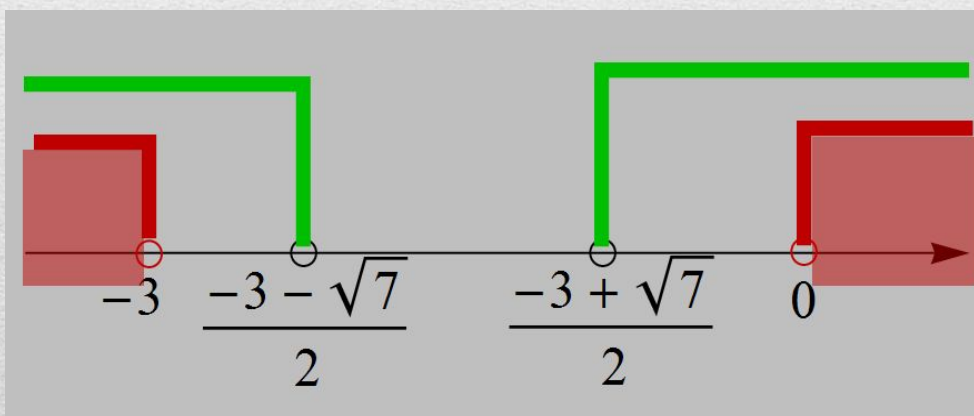
$$a < -3, a > 0.$$

Пример №1. Найти значения a , при которых корни x_1, x_2 уравнения $2x^2 - (2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < a < x_2$.

Решение. Используем второй случай. Составим систему неравенств.

$$\begin{cases} D > 0 \\ 2f(a) < 0 \end{cases} \begin{cases} 2a^2 + 6a + 1 > 0 \\ 2(a^2 + 3a) > 0 \end{cases} \begin{cases} 2\left(a - \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(a - \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}\right) > 0 \\ 2a(a + 3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \\ a < \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \\ a > 0 \\ a < -3 \end{cases}$$



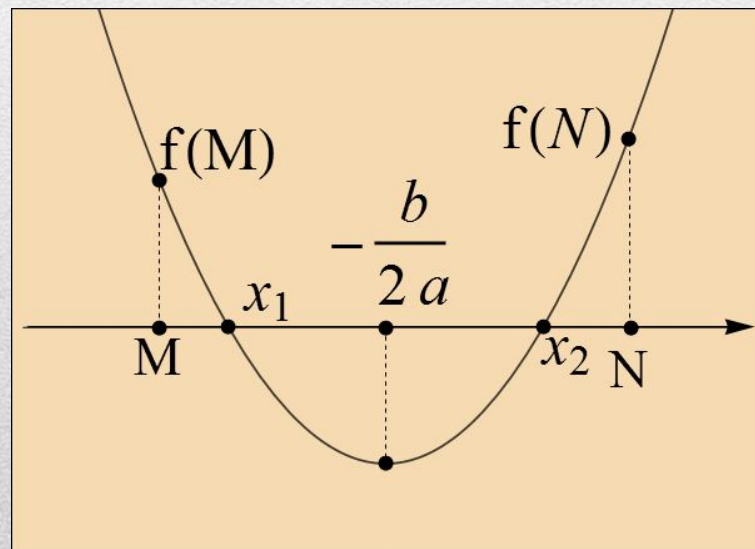
Ответ: $a < -3, a > 0$.

Пример №2. Найти все действительные значения a , при которых корни
 оба корня уравнения $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$
 заключены между -2 и 0 , т.е. $-2 < x_1 \leq x_2 < 0$.

Решение. Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ (2a + 3)f(0) > 0 \\ (2a + 3)f(-2) > 0 \\ -2 < \frac{-a-1}{2(2a+3)} < 0 \end{array} \right.$$



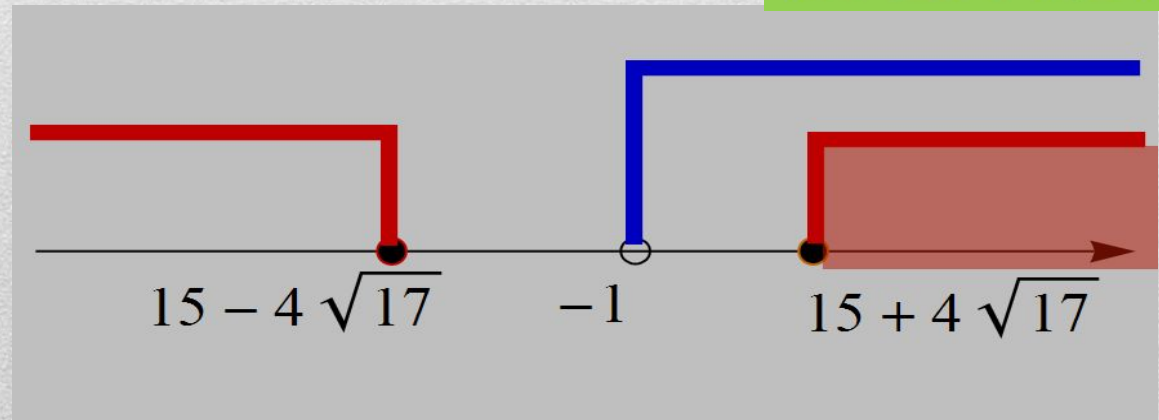
$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (2a + 3)(3a + 7) > 0 \\ \frac{a + 1}{2a + 3} > 0 \\ \frac{7a + 11}{2a + 3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ 3a + 7 > 0 \\ a + 1 > 0 \\ 7a + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1,5 \\ a > -2\frac{1}{3} \\ a > -1 \\ a > -1\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$a > 15 + 4\sqrt{17}$$



Пример №2. Найти все действительные значения a , при которых корни оба корня уравнения $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$ заключены между -2 и 0 , т.е. $-2 < x_1 \leq x_2 < 0$.

Решение. Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.

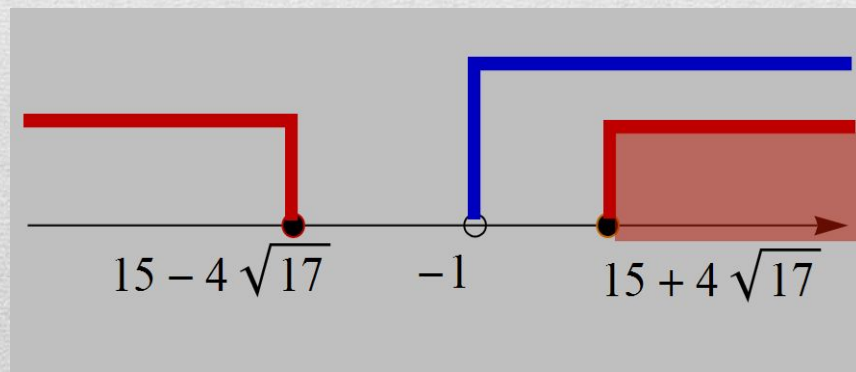
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ (2a + 3)f(0) > 0 \\ (2a + 3)f(-2) > 0 \\ -2 < \frac{-a - 1}{2(2a + 3)} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (2a + 3)(3a + 7) > 0 \\ \frac{a + 1}{2a + 3} > 0 \\ \frac{7a + 11}{2a + 3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ 3a + 7 > 0 \\ a + 1 > 0 \\ 7a + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1,5 \\ a > -2\frac{1}{3} \\ a > -1 \\ a > -1\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1 \end{cases}$$



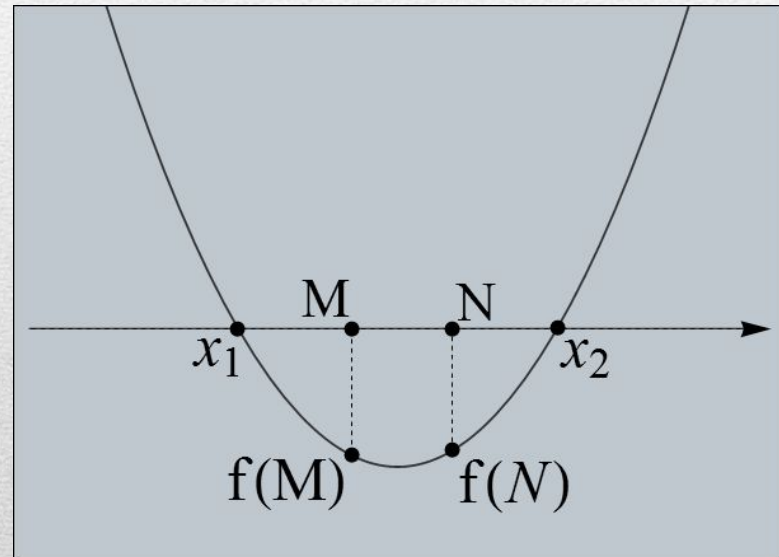
Ответ: $a > 15 + 4\sqrt{17}$

Пример №3. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2 < 3 < x_2$?

Решение. Имеем пятый случай.

$$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \\ af(N) < 0 \end{cases}$$

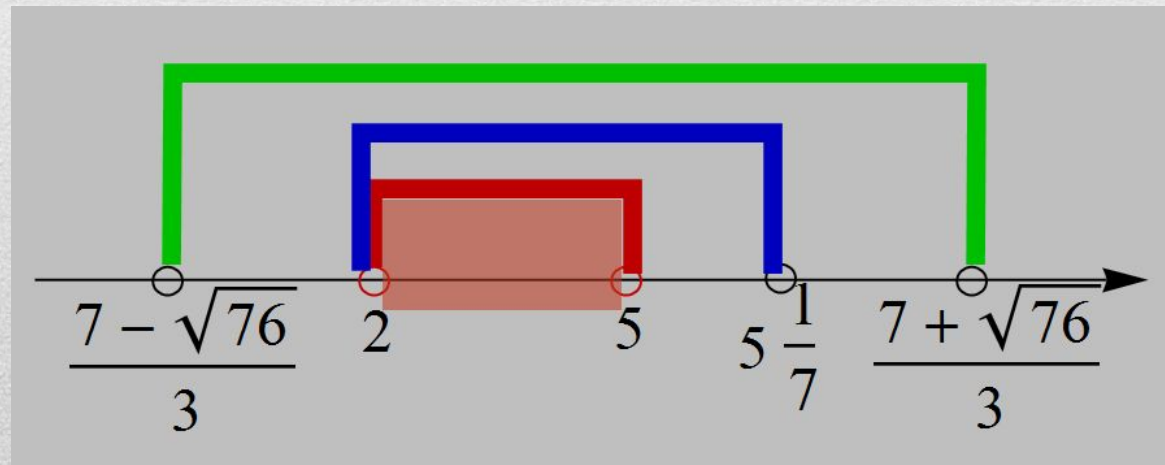
- $$\begin{cases} D > 0 \\ (a - 2)f(2) < 0 \\ (a - 2)f(3) < 0 \end{cases}$$



Самостоятельно

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 14a - 9 < 0 \\ (a - 2)(a - 5) < 0 \\ (a - 2)(7a - 36) < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{7 - \sqrt{76}}{3} < a < \frac{7 + \sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\frac{1}{7} \end{array} \right.$$

$$2 < a < 5$$



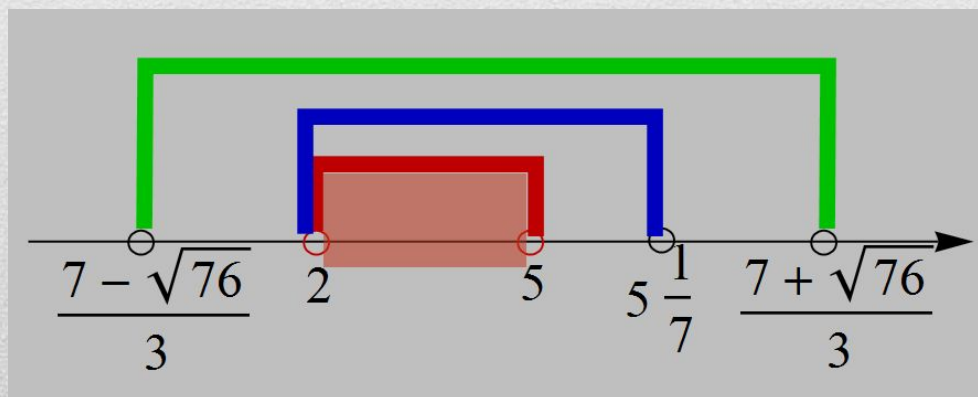
Пример №3. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2 < 3 < x_2$?

Решение. Имеем пятый случай.

$$\bullet \begin{cases} D > 0 \\ (a - 2)f(2) < 0 \\ (a - 2)f(3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 14a - 9 < 0 \\ (a - 2)(a - 5) < 0 \\ (a - 2)(7a - 36) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \frac{7 - \sqrt{76}}{3} < a < \frac{7 + \sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\frac{1}{7} \end{cases}$$



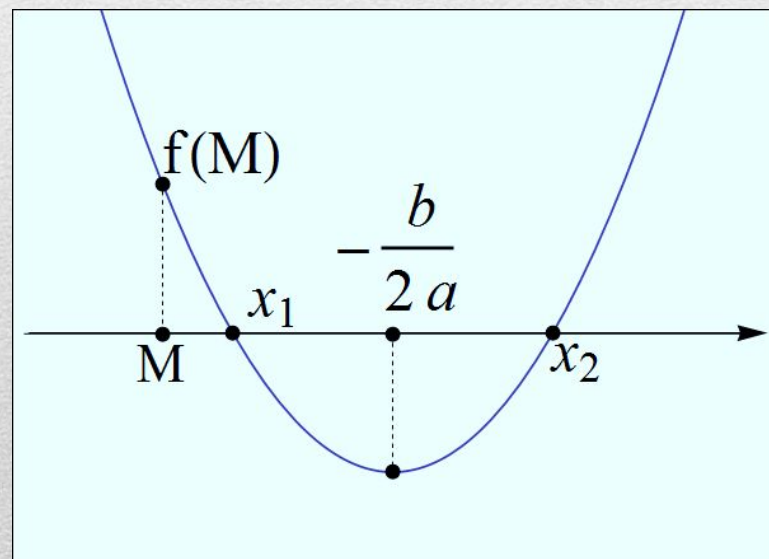
Ответ: $2 < a < 5$

Пример №4. При каких значениях a корни уравнения $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 > x_2 > 1$?

Решение. Имеем третий случай.

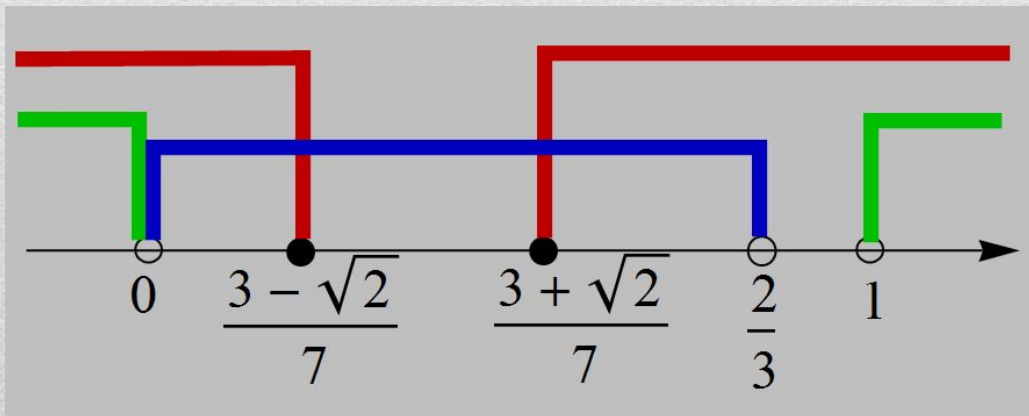
$$\bullet \begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$



$$\bullet \begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ a(3a - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} a \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7} \\ a \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7} \\ \begin{cases} a > 1 \\ a < 0 \end{cases} \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



ни при каких.

Пример №4. При каких значениях a корни уравнения

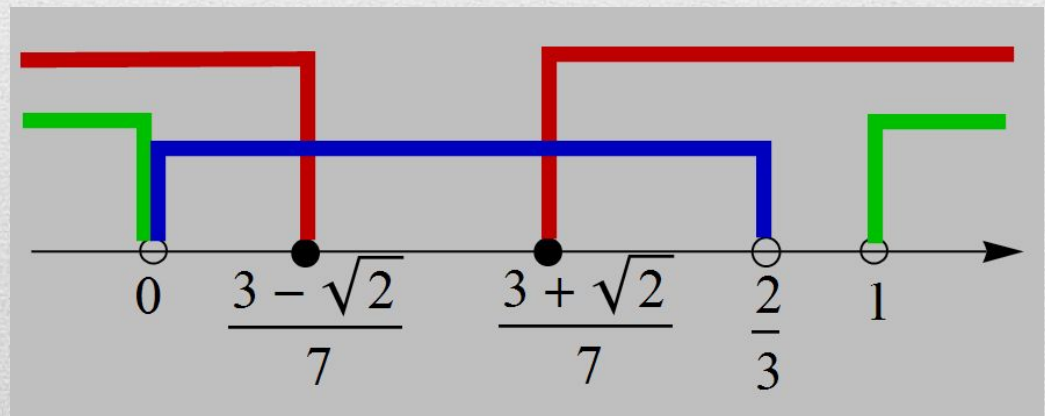
$ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 > x_2 > 1$?

Решение. Имеем третий случай.

$$\bullet \begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ a(3a - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \left[a \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7} \right. \\ \left. a \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7} \right] \\ \left[a > 1 \right. \\ \left. a < 0 \right] \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



Ответ: ни при каких.

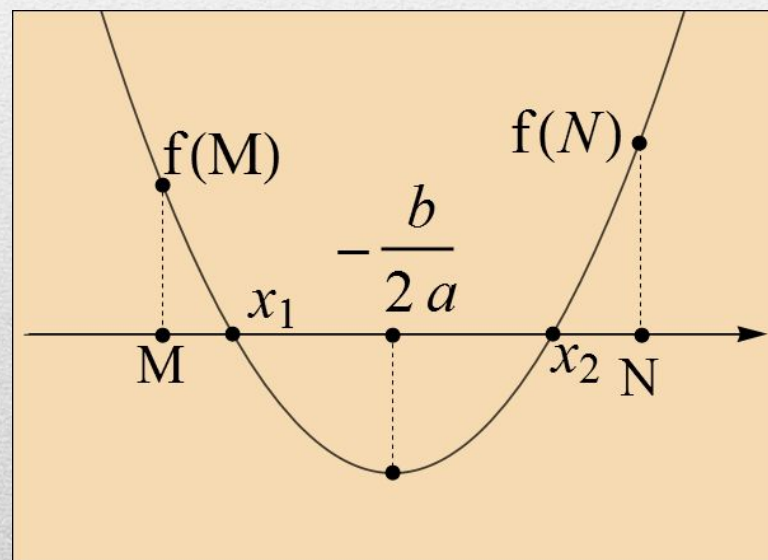
№5. При каких a все решения уравнения

$(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ удовлетворяют условию $0 < x < 3$?

Решение. Имеет место четвёртый случай.

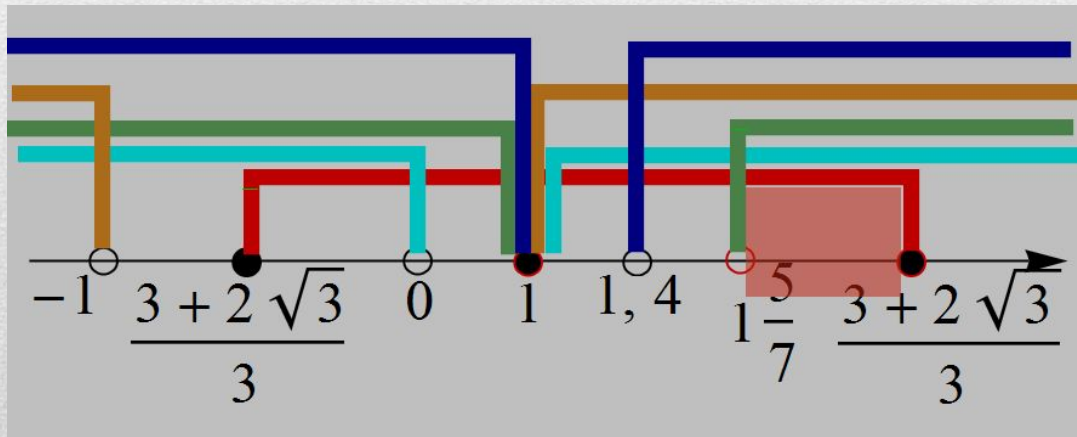
$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ af'(N) > 0 \\ af'(M) < 0 \end{array} \right.$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ (a - 1)f(0) > 0 \\ (a - 1)f(3) > 0 \\ (a - 1)f'(0) < 0 \\ (a - 1)f'(3) > 0 \end{array} \right.$$



Самостоятельно

$$\begin{cases} 3a^2 - 6a - 1 \leq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(7a - 12) > 0 \\ (a - 1)(a + 1) > 0 \\ (a - 1)(5a - 7) > 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{matrix} 3 & - & - & 3 \\ [a < 0 \\ [a > 1 \\ [a > 1\frac{5}{7} \\ [a < 1 \\ [a > 1 \\ [a < -1 \\ [a > 1,4 \\ [a < 1 \end{matrix} \right\}$$

Если $a - 1 = 0$, $a = 1$,
 $x = 0,5$

$$a = 1, \quad 1\frac{5}{7} < a \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

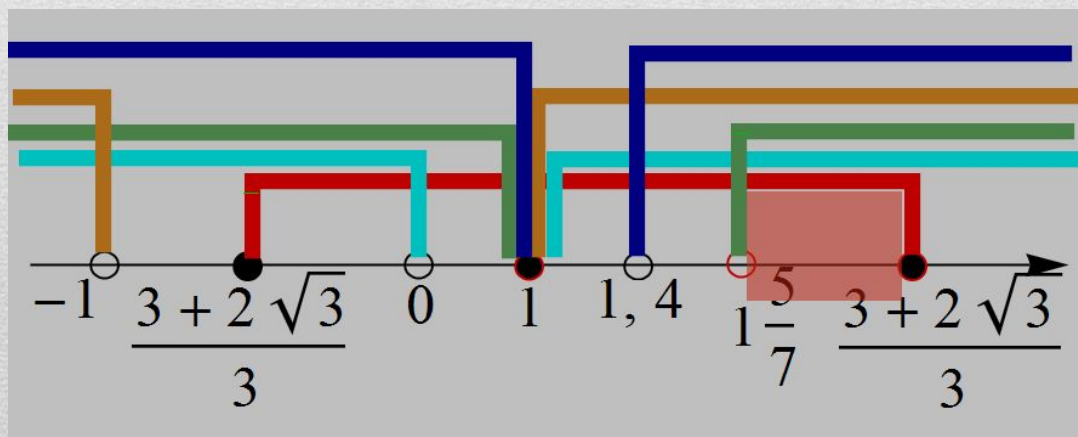
№5. При каких a все решения уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ удовлетворяют условию $0 < x < 3$?

Решение. Имеет место четвёртый случай.

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ (a - 1)f(0) > 0 \\ (a - 1)f(3) > 0 \\ (a - 1)f'(0) < 0 \\ (a - 1)f'(3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 6a - 1 \leq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(7a - 12) > 0 \\ (a - 1)(a + 1) > 0 \\ (a - 1)(5a - 7) > 0 \end{cases}$$

Если $a - 1 = 0$, $a = 1$, $x = 0,5$.



Ответ: $a = 1$, $1\frac{5}{7} < a \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

- **№1.** При каких c оба корня уравнения $x^2 + 4cx + 1 - 2c + 4c^2 = 0$ меньше -1 ?
- **№2.** При каких a оба корня уравнения $(a + 1)x^2 - 3ax + 4 = 0$ больше 1 ?
- **№3.** При каких a один из корней уравнения $x^2 - (3a + 2)x + 2a - 1 = 0$ больше 1 , а другой меньше 1 ?
- **№4.** Найти все значения a , для которых один корень уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ больше 1 , а другой меньше 1 ?
- **№5.** При каких a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?

Упражнения для домашнего задания