

# Задачи с параметрами

## Расположение корней квадратного трёхчлена

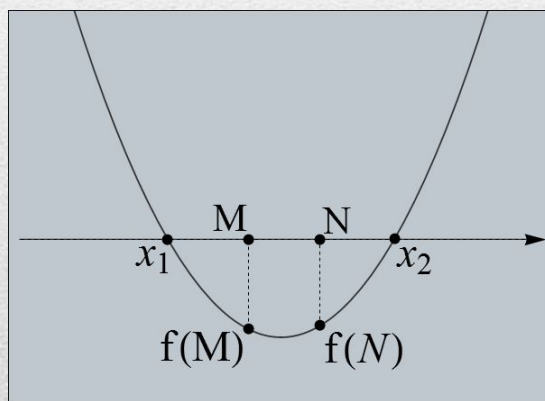
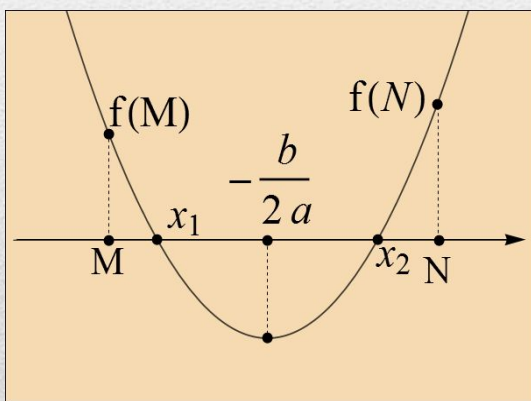
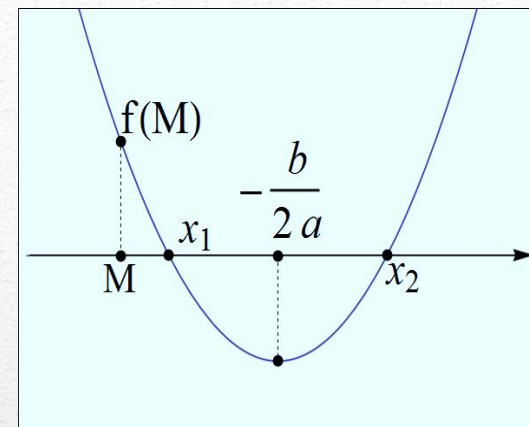
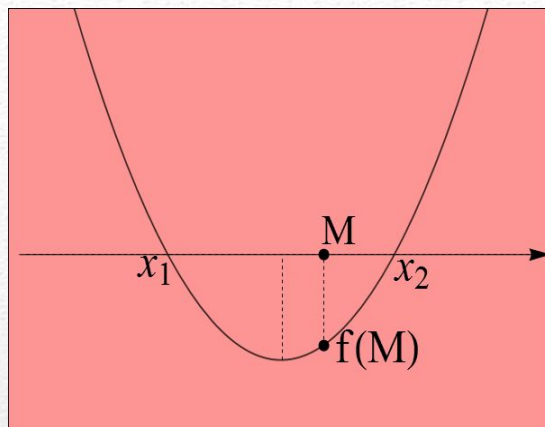
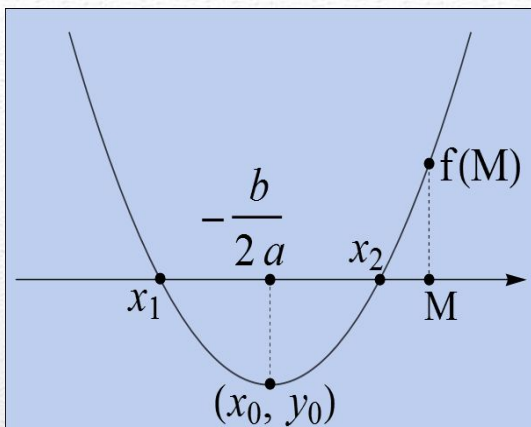
Презентация к уроку алгебры в 11 классе.  
Учитель математики Лодина Виолетта Сергеевна.

МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожный Московской области

---

- В классах с углубленным изучением математики часто практикуется решение задач на выяснение расположения корней квадратного трёхчлена.
- В общеобразовательных классах эта тема изучается на элективных курсах. Ниже предлагается описание моего опыта работы по данной теме в 11 классе на занятиях элективного курса «Решение задач с параметрами». Используются два способа: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

**Изучение нового материала**



**Замечание. Следует отдельно рассмотреть случай  $a = 0$ .**

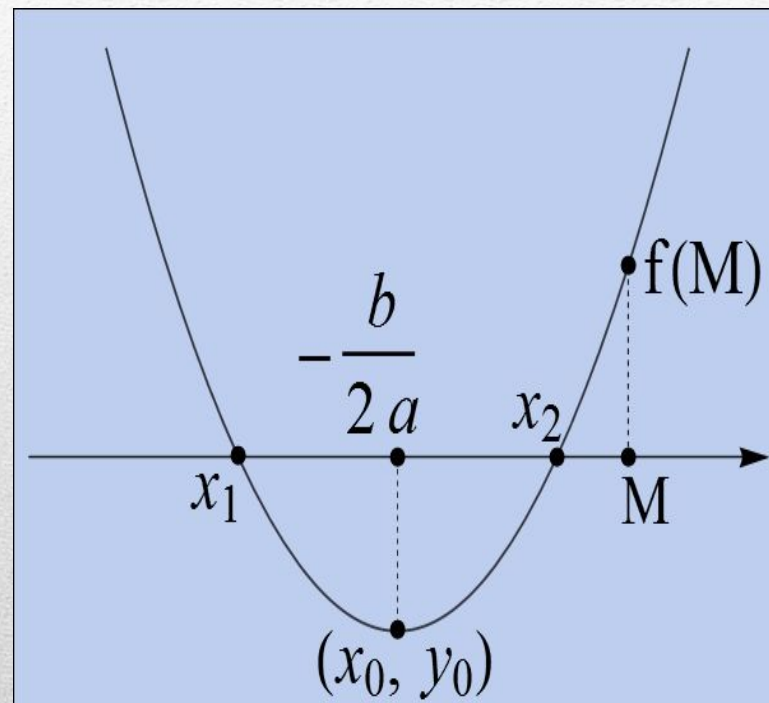
**Рассмотрим все возможные пять случаев расположения корней квадратного трёхчлена**

$$ax^2 + bx + c.$$

Оба корня меньше  $M$ ,  $x_1 \leq x_2 < M$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < M \text{ или } af'(M) > 0 \\ af(M) > 0 \end{array} \right.$$

*Два способа решения*

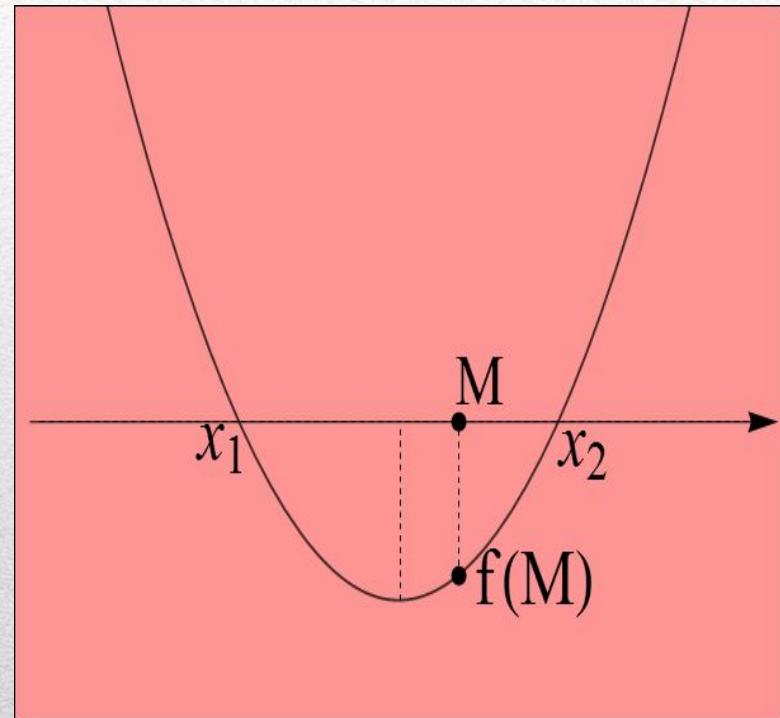


**1 случай**

Один корень меньше,

а другой больше  $M$ ,  $x_1 < M < x_2$

- $$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$$

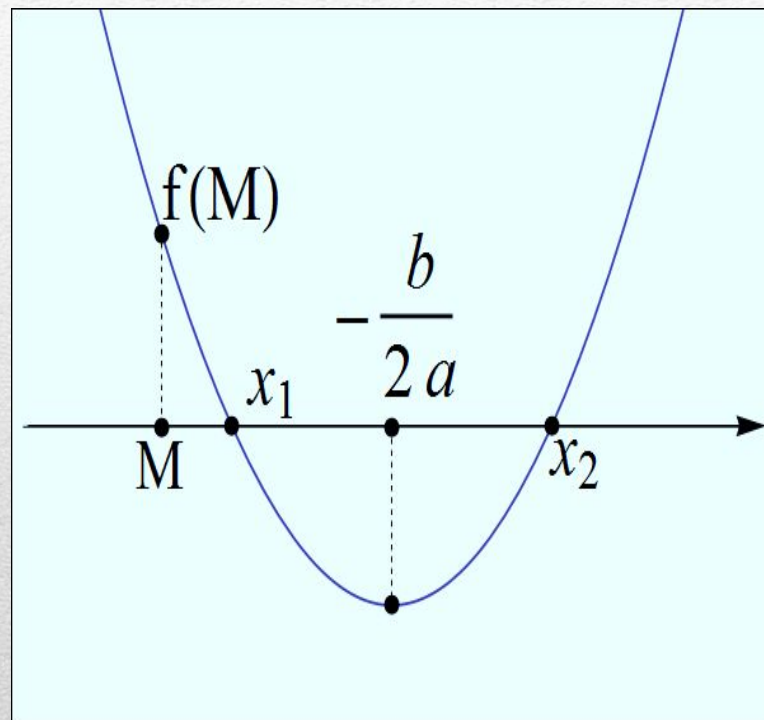


**2 случай**

Оба корня больше  $M$ ,  $M < x_1 \leq x_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{array} \right.$$

*Два способа решения*



**3 случай**

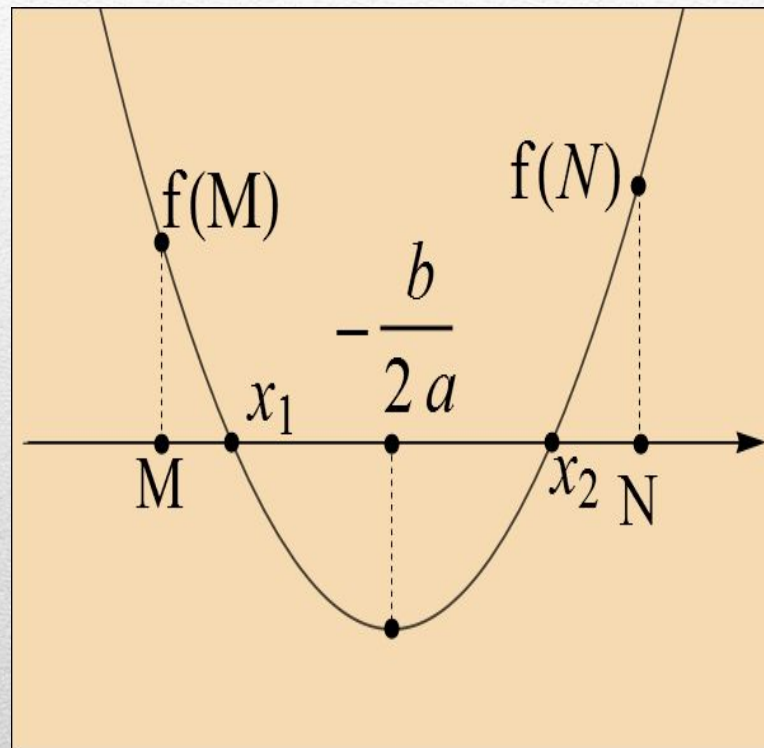
Оба корня внутри  
интервала  $(M; N)$ ,

$$M < x_1 \leq x_2 < N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N \end{array} \right.$$

или

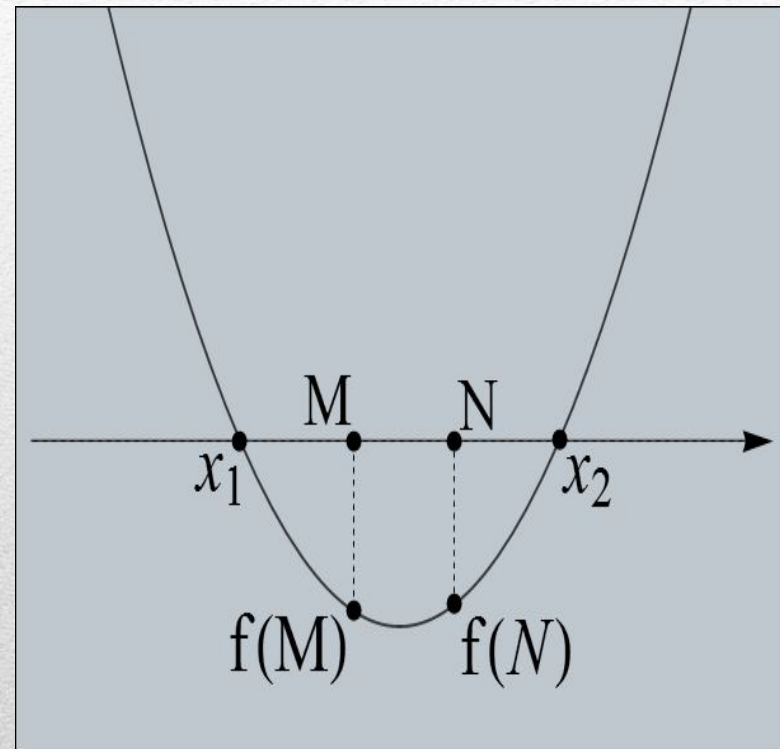
$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ af'(N) > 0 \\ af'(M) < 0 \end{array} \right.$$



**4 случай**

$$x_1 < M < N < x_2$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \\ af(N) < 0 \end{cases}$$



**5 случай**



# ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрим примеры применения рассмотренного учебного материала. Используем два способа решения: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

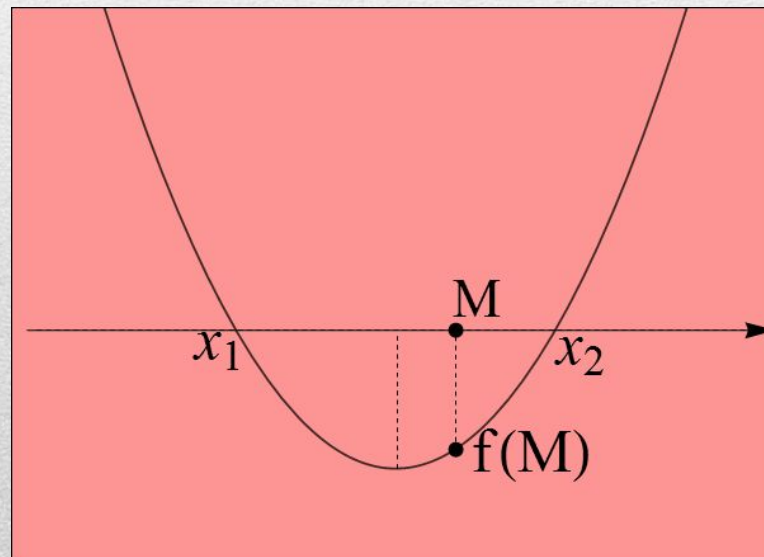
Замечание. Следует особо рассмотреть случай  $a = 0$ .

**Пример №1. Найти значения  $a$ , при которых корни  $x_1, x_2$  уравнения**

**$2x^2 - (2a + 1)x + a(a - 1) = 0$  удовлетворяют условиям  $x_1 < a < x_2$ .**

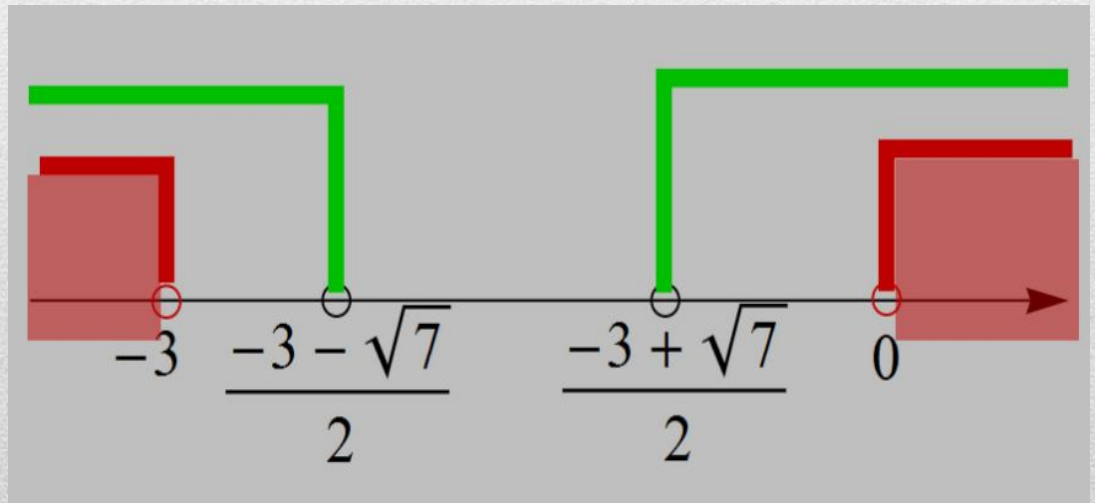
**Решение. Используем второй случай. Составим систему неравенств.**

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} D > 0 \\ 2f(a) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 2a^2 + 6a + 1 > 0 \\ 2(a^2 + 3a) > 0 \end{cases} \begin{cases} 2 \left( a - \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \right) \left( a - \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \right) > 0 \\ 2a(a + 3) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \left[ a > \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \right. \\ \left. a < \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \right] \\ \left[ a > 0 \right. \\ \left. a < -3 \right] \end{cases}$$



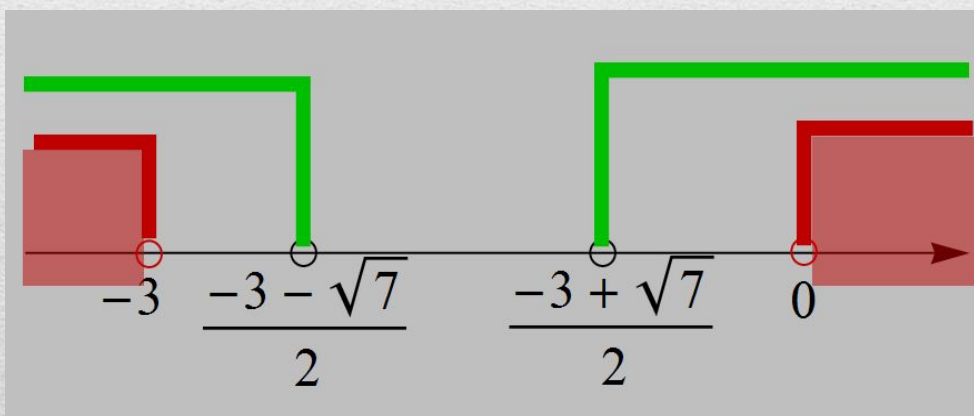
$$a < -3, a > 0.$$

**Пример №1. Найти значения  $a$ , при которых корни  $x_1, x_2$  уравнения  $2x^2 - (2a + 1)x + a(a - 1) = 0$  удовлетворяют условиям  $x_1 < a < x_2$ .**

**Решение. Используем второй случай. Составим систему неравенств.**

$$\begin{cases} D > 0 \\ 2f(a) < 0 \end{cases} \begin{cases} 2a^2 + 6a + 1 > 0 \\ 2(a^2 + 3a) > 0 \end{cases} \begin{cases} 2\left(a - \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(a - \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}\right) > 0 \\ 2a(a + 3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \\ a < \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \\ a > 0 \\ a < -3 \end{cases}$$



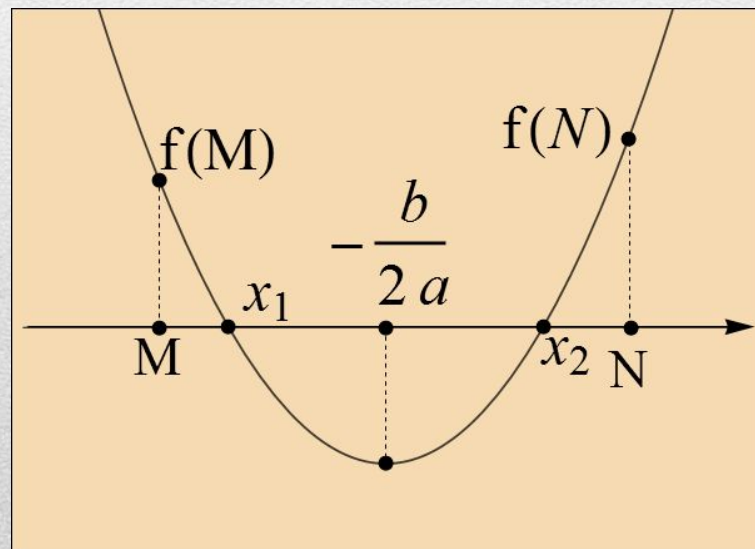
**Ответ:  $a < -3, a > 0$ .**

**Пример №2.** Найти все действительные значения  $a$ , при которых корни  
 оба корня уравнения  $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$   
 заключены между  $-2$  и  $0$ , т.е.  $-2 < x_1 \leq x_2 < 0$ .

**Решение.** Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ (2a + 3)f(0) > 0 \\ (2a + 3)f(-2) > 0 \\ -2 < \frac{-a-1}{2(2a+3)} < 0 \end{array} \right.$$



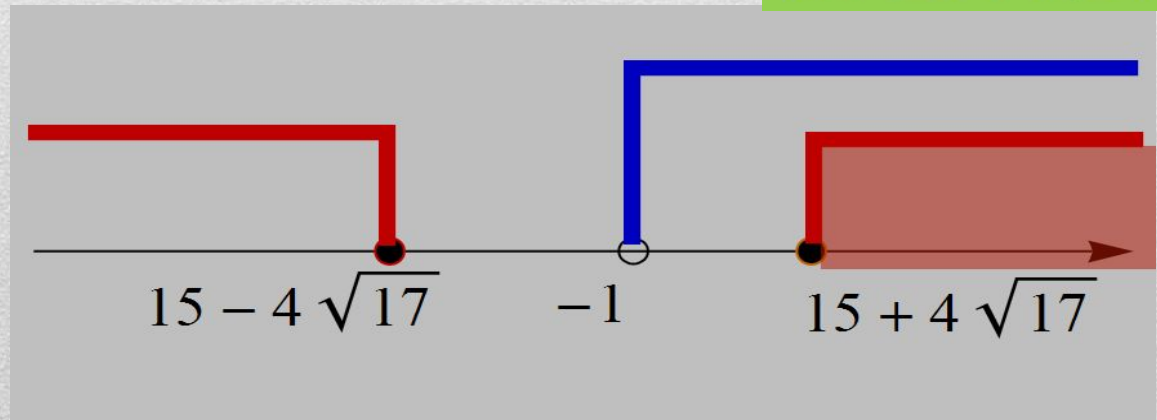
$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (2a + 3)(3a + 7) > 0 \\ \frac{a + 1}{2a + 3} > 0 \\ \frac{7a + 11}{2a + 3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ 3a + 7 > 0 \\ a + 1 > 0 \\ 7a + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1,5 \\ a > -2\frac{1}{3} \\ a > -1 \\ a > -1\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$a > 15 + 4\sqrt{17}$$



**Пример №2. Найти все действительные значения  $a$ , при которых корни оба корня уравнения  $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$  заключены между  $-2$  и  $0$ , т.е.  $-2 < x_1 \leq x_2 < 0$ .**

**Решение. Имеем четвёртый случай. Составим систему неравенств.**

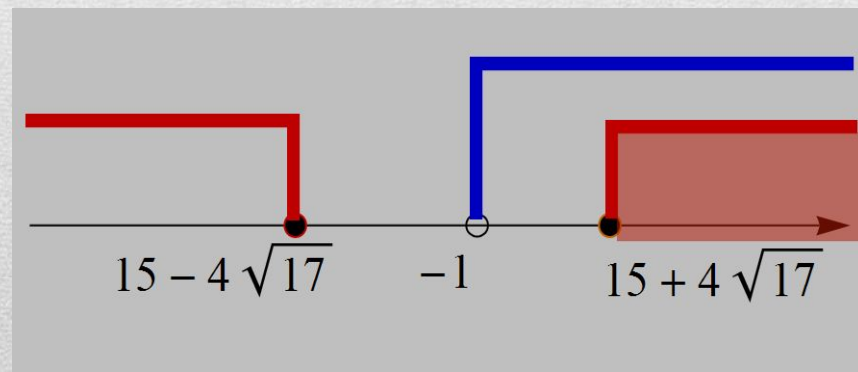
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ (2a + 3)f(0) > 0 \\ (2a + 3)f(-2) > 0 \\ -2 < \frac{-a - 1}{2(2a + 3)} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (2a + 3)(3a + 7) > 0 \\ \frac{a + 1}{2a + 3} > 0 \\ \frac{7a + 11}{2a + 3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 30a - 47 \geq 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ 3a + 7 > 0 \\ a + 1 > 0 \\ 7a + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1,5 \\ a > -2\frac{1}{3} \\ a > -1 \\ a > -1\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 15 + 4\sqrt{17} \\ a \leq 15 - 4\sqrt{17} \\ a > -1 \end{cases}$$



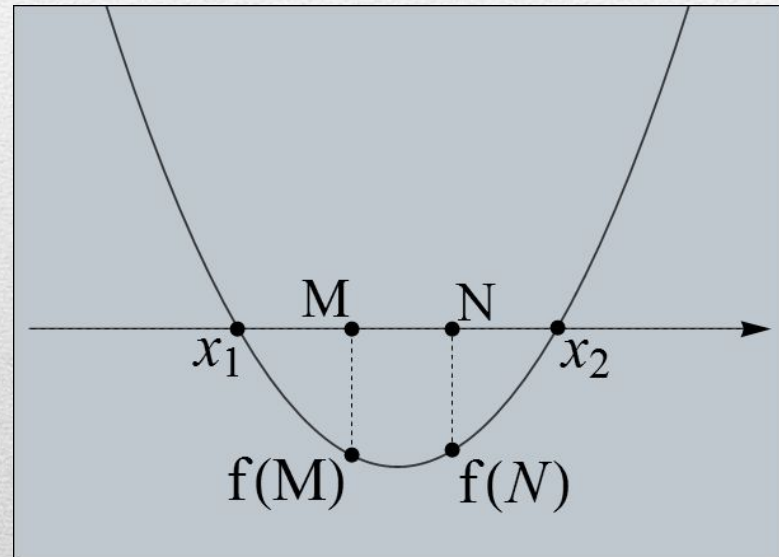
**Ответ:  $a > 15 + 4\sqrt{17}$**

**Пример №3.** При каких значениях  $a$  корни  $x_1, x_2$  уравнения  $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 < 2 < 3 < x_2$ ?

**Решение.** Имеем пятый случай.

$$\begin{cases} D > 0 \\ af(M) < 0 \\ af(N) < 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} D > 0 \\ (a - 2)f(2) < 0 \\ (a - 2)f(3) < 0 \end{cases}$$

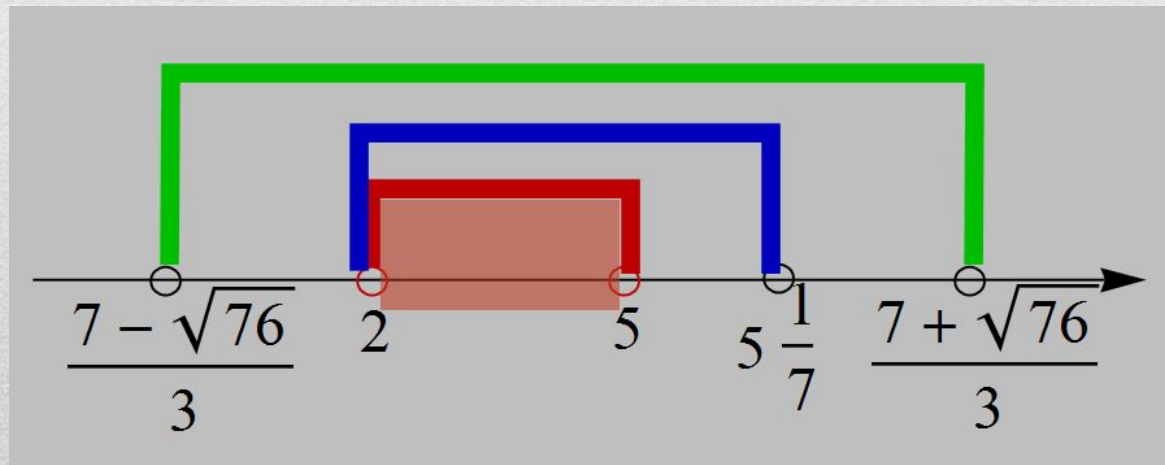


**Самостоятельно**



$$\left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 14a - 9 < 0 \\ (a - 2)(a - 5) < 0 \\ (a - 2)(7a - 36) < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{7 - \sqrt{76}}{3} < a < \frac{7 + \sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\frac{1}{7} \end{array} \right.$$

$$2 < a < 5$$



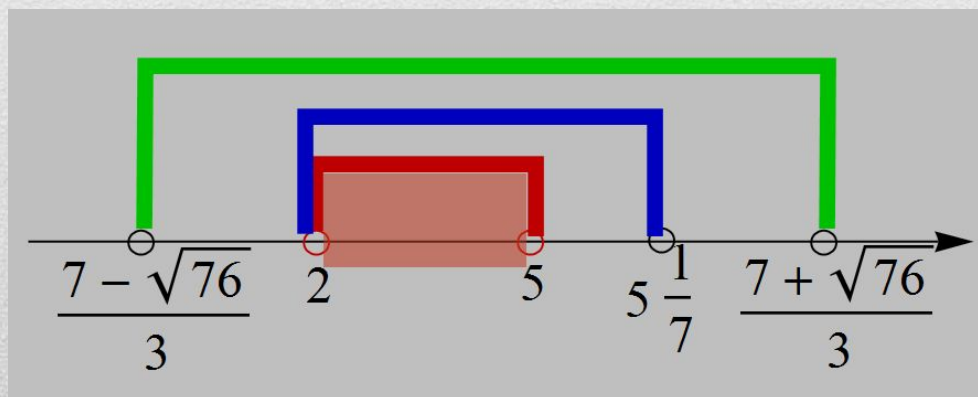
**Пример №3.** При каких значениях  $a$  корни  $x_1, x_2$  уравнения  $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 < 2 < 3 < x_2$ ?

**Решение.** Имеем пятый случай.

$$\bullet \begin{cases} D > 0 \\ (a - 2)f(2) < 0 \\ (a - 2)f(3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 14a - 9 < 0 \\ (a - 2)(a - 5) < 0 \\ (a - 2)(7a - 36) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \frac{7 - \sqrt{76}}{3} < a < \frac{7 + \sqrt{76}}{3} \\ 2 < a < 5 \\ 2 < a < 5\frac{1}{7} \end{cases}$$



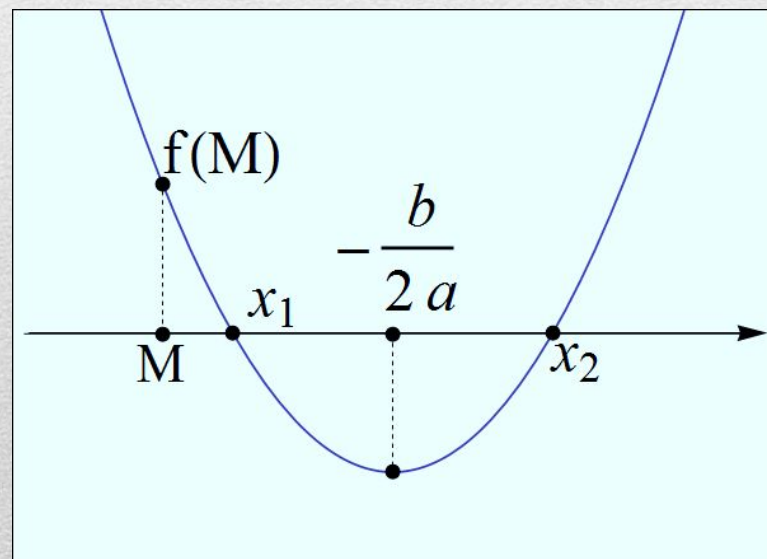
**Ответ:**  $2 < a < 5$

**Пример №4.** При каких значениях  $a$  корни уравнения  $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 > x_2 > 1$ ?

**Решение.** Имеем третий случай.

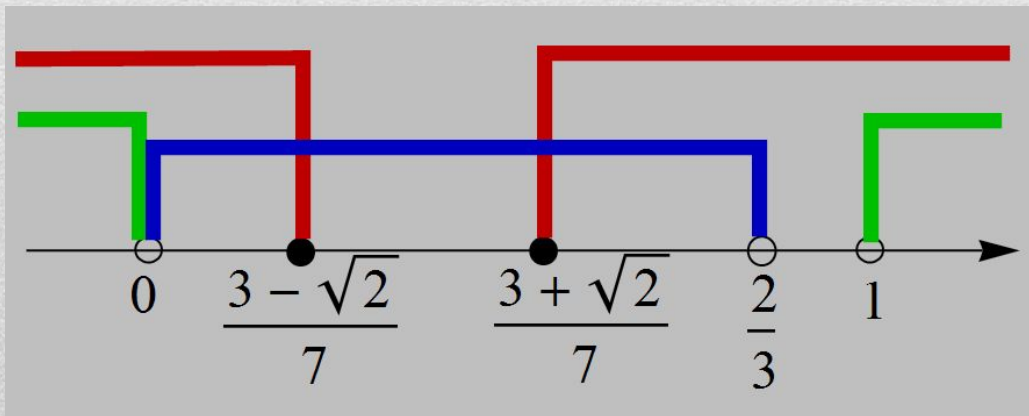
$$\bullet \begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > M \text{ или } af'(M) < 0 \\ af(M) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$



$$\bullet \begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ a(3a - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} a \geq \frac{3 + \sqrt{2}}{7} \\ a \leq \frac{3 - \sqrt{2}}{7} \\ \begin{cases} a > 1 \\ a < 0 \end{cases} \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



**ни при каких.**

**Пример №4. При каких значениях  $a$  корни уравнения**

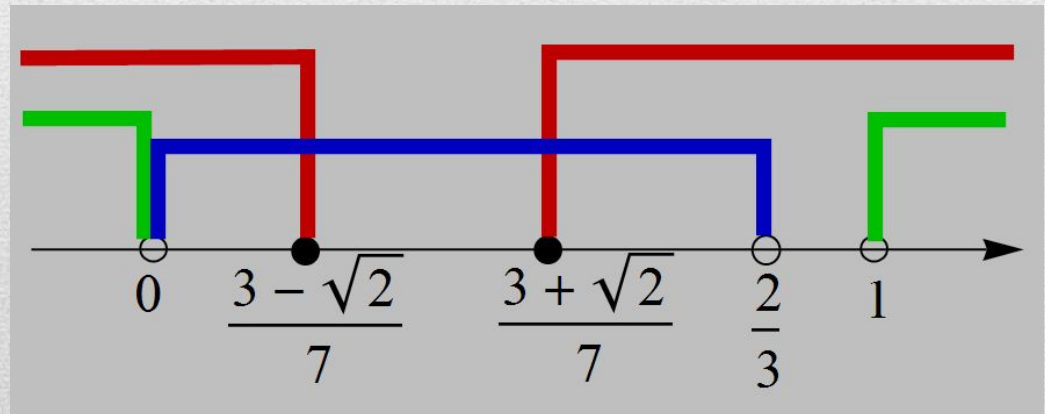
**$ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 > x_2 > 1$ ?**

**Решение. Имеем третий случай.**

$$\bullet \begin{cases} D \geq 0 \\ af'(1) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a^2 - 6a + 1 \geq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ a(3a - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \left[ a \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7} \right. \\ \left. a \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7} \right] \\ \left[ a > 1 \right. \\ \left. a < 0 \right] \\ 0 < a < \frac{2}{3} \end{cases}$$



**Ответ: ни при каких.**

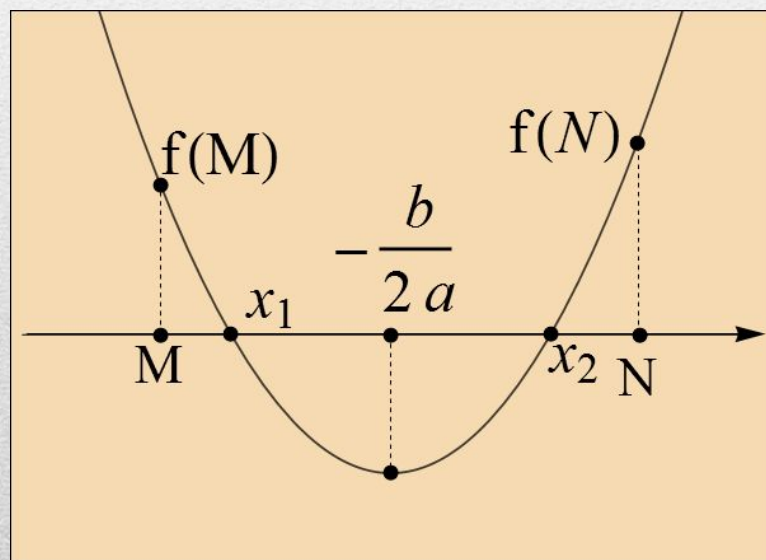
**№5. При каких  $a$  все решения уравнения**

**$(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$  удовлетворяют условию  $0 < x < 3$ ?**

**Решение. Имеет место четвёртый случай.**

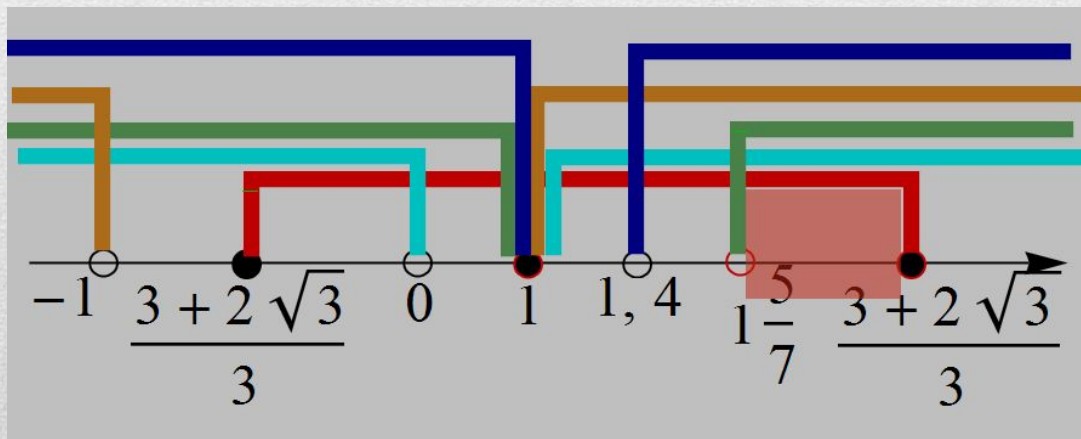
- $$\begin{cases} af(M) > 0 \\ af(N) > 0 \\ af'(N) > 0 \\ af'(M) < 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} D \geq 0 \\ (a - 1)f(0) > 0 \\ (a - 1)f(3) > 0 \\ (a - 1)f'(0) < 0 \\ (a - 1)f'(3) > 0 \end{cases}$$



**Самостоятельно**

$$\begin{cases} 3a^2 - 6a - 1 \leq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(7a - 12) > 0 \\ (a - 1)(a + 1) > 0 \\ (a - 1)(5a - 7) > 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{matrix} 3 & - & - & 3 \\ [a < 0 \\ [a > 1 \\ [a > 1\frac{5}{7} \\ [a < 1 \\ [a > 1 \\ [a < -1 \\ [a > 1,4 \\ [a < 1 \end{matrix} \right\}$$

Если  $a - 1 = 0$ ,  $a = 1$ ,  
 $x = 0,5$

$$a = 1, \quad 1\frac{5}{7} < a \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

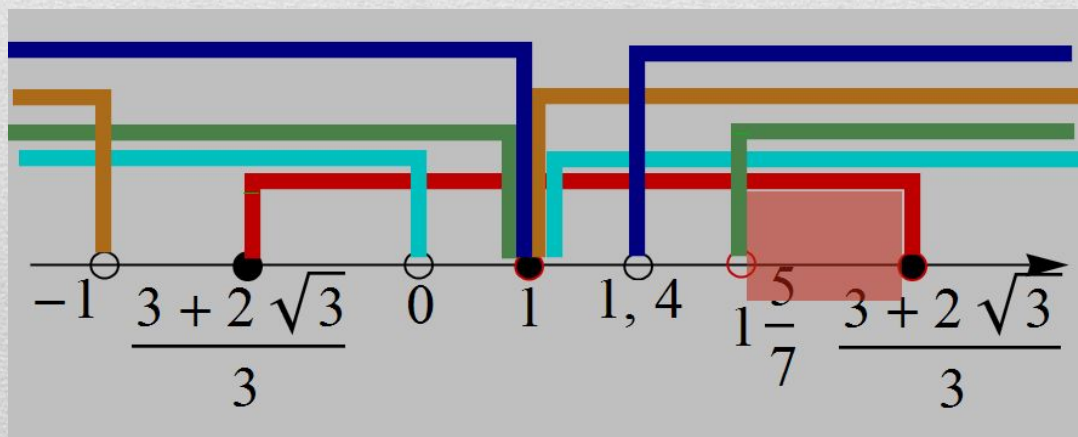
№5. При каких  $a$  все решения уравнения  $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$  удовлетворяют условию  $0 < x < 3$ ?

**Решение.** Имеет место четвёртый случай.

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ (a - 1)f(0) > 0 \\ (a - 1)f(3) > 0 \\ (a - 1)f'(0) < 0 \\ (a - 1)f'(3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 6a - 1 \leq 0 \\ a(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(7a - 12) > 0 \\ (a - 1)(a + 1) > 0 \\ (a - 1)(5a - 7) > 0 \end{cases}$$

Если  $a - 1 = 0$ ,  $a = 1$ ,  $x = 0,5$ .



Ответ:  $a = 1$ ,  $1\frac{5}{7} < a \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ .



- **№1.** При каких  $c$  оба корня уравнения  $x^2 + 4cx + 1 - 2c + 4c^2 = 0$  меньше  $-1$ ?
- **№2.** При каких  $a$  оба корня уравнения  $(a + 1)x^2 - 3ax + 4 = 0$  больше  $1$ ?
- **№3.** При каких  $a$  один из корней уравнения  $x^2 - (3a + 2)x + 2a - 1 = 0$  больше  $1$ , а другой меньше  $1$ ?
- **№4.** Найти все значения  $a$ , для которых один корень уравнения  $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$  больше  $1$ , а другой меньше  $1$ ?
- **№5.** При каких  $a$  существует единственный корень уравнения  $x^2 - ax + 2 = 0$ , удовлетворяющий условию  $1 < x < 3$ ?

**Упражнения для домашнего задания**