

# Метод рационализации в логарифмических неравенствах

Учителя математики  
МКОУ «Суджанская  
средняя общеобразовательная  
школа № 2»  
Поречной И.В.

$$1) \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$3) \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$4) \log_a f + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fa^b - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$5) \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Решение:

$$\log_{\log_x 2x} (5x - 2) \geq 0,$$

$$\log_{\log_x 2x} (5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\log_x 2x - 1)(5x - 2 - 1) \geq 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 5x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\log_x 2x - \log_x x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ (x - 1)(2x - 1) > 0, \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)(2x-x)(5x-3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ x \neq 1, \\ \left[ \begin{array}{l} x < 0,5 \\ x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 0 < x \leq 0,6 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \\ x > 0,4, \\ x \neq 1 \\ \left[ \begin{array}{l} x < 0,5 \\ x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$0,4 < x < 0,5; \quad x > 1$$

Ответ:

$$0,4 < x < 0,5; \quad x > 1$$

№2. Решить неравенство:  $\log_x(x-2)\log_x(x+2) \leq 0$

Решение:  $\log_x(x-2)\log_x(x+2) \leq 0$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x \neq 1, \\ (x-1)(x-2-1)(x+2-1)(x-1) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (x-1)^2(x-3)(x+1) \leq 0, \end{cases}$$

$$2 < x \leq 3$$

Ответ:  $2 < x \leq 3$

№3. Решить неравенство:  $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:  $\log_x(x^2 - 3) < 0$ ,  $\log_x(x^2 - 3) < \log_x 1$ ,

$$\begin{cases} (x^2 - 3 - 1)(x - 1) < 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - 4)(x - 1) < 0, \\ x > \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 2)(x - 1) < 0, \\ x > \sqrt{3} \end{cases} \quad \sqrt{3} < x < 2$$

Ответ:  $(\sqrt{3}; 2)$

№4. Решить неравенство  $\log_{2x+3}x^2 - 1 < 0$

Решение:

$$\log_{2x+3}x^2 - 1 < 0, \quad \log_{2x+3}x^2 < \log_{2x+3}(2x+3),$$

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1,5 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

Ответ:  $(-1,5;-1);(-1;0);(0;3)$



№5. Решить неравенство  $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$

Решение:  $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2,$

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq \log_{|x+2|}(x + 2)^2,$$

$$\begin{cases} (|x + 2| - 1)(4 + 7x - 2x^2 - x^2 - 4x - 4) \leq 0, \\ 4 + 7x - 2x^2 > 0, \\ |x + 2| \neq 1, \\ |x + 2| > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x + 2)^2 - 1)(-3x^2 + 3x) \leq 0, \\ -0,5 < x < 4, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + 1)(x + 3)(x - 1) \geq 0, \\ -0,5 < x < 4, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -3 \end{cases}$$

|Ответ: (-0,5;0];[1;4)

**№6.** Решить неравенство

$$\log_{x+3} \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

Решение:

$$\log_{x+3} \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1\right)(x+3-1) > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2}(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0); (0;1)

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0, \text{ Решение:}$$

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq \log_{\frac{x}{3}} 1,$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right) (\log_x \sqrt{3-x} - 1) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right) (\log_x \sqrt{3-x} - \log_x x) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right) (\sqrt{3-x} - x)(x - 1) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right) (3 - x - x^2)(x - 1) \geq 0, \\ (x - 1)(3 - x - 1) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 1)(x^2 + x - 3) \leq 0, \\ (x - 1)(2 - x) > 0, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0 \\ (x-1)(2-x) > 0, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0, \\ 1 < x < 2, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0, \\ 1 < x < 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \\ x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \\ 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \leq x < 2$$

Ответ:  $\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; 2\right)$

№8. Решить неравенство  $\log_{x-2}(x^2 - 1) > \log_{x-2}(2x^2 + x - 3)$

Решение:  $\log_{x-2}(x^2 - 1) > \log_{x-2}(2x^2 + x - 3)$ ,

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 + x - 3 > 0, \\ (x^2 - 1 - 2x^2 - x + 3)(x - 2 - 1) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 + x - 3 > 0, \\ (-x^2 - x + 2)(x - 3) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > 1 \end{cases} \\ 2(x - 1)(x + 1,5) > 0, \\ (x - 3)(x - 1)(x + 2) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \begin{cases} x < -1,5 \\ x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 1 < x < 3, \end{cases} \quad 2 < x < 3$$

Ответ:  $2 < x < 3$

№11. Решить неравенство  $\log_{\frac{1}{49}}(26-x)\log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1$

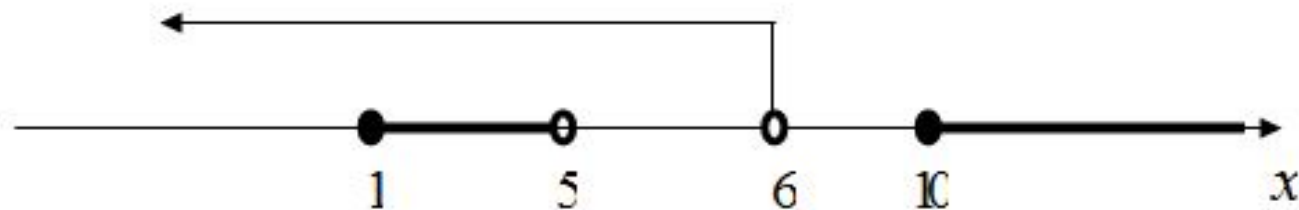
Решение:

$$\log_{\frac{1}{49}}(26-x)\log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1,$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-x)\log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 2, \quad \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} \geq 2, \quad \log_{6-x}(26-x) \geq 2,$$

$$\begin{cases} (6-x-1)(26-x-(6-x))^2 \geq 0, \\ 26-x > 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (5-x)(x^2-11x+10) \leq 0 \\ x < 26 \\ x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-x)(x-1)(x-10) \leq 0 \\ x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases} \quad 1 \leq x < 5$$



Ответ:  $1 \leq x < 5$

№12. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \log_{0,4} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{2,5} \frac{1}{5}$$

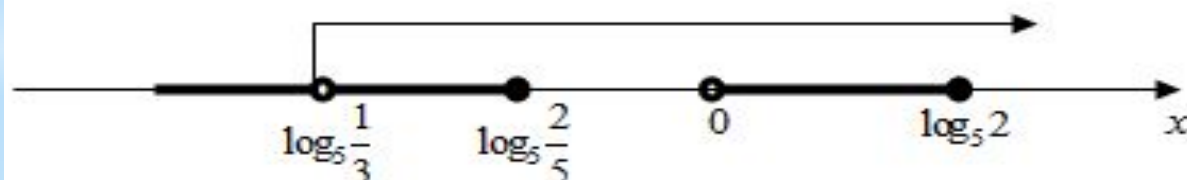
$$\frac{1}{x} \log_{0,4} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{2,5} \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{x} \log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{\frac{2}{5}} 5$$

$$\frac{1}{x} (\log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} - \log_{\frac{2}{5}} 5^x) \leq 0 \quad \begin{cases} 12 - 4 \cdot 5^{-x} > 0 \\ \frac{1}{x} (\frac{2}{5} - 1) (\frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} - 5^x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} (\frac{2}{5} - 1) (\frac{12 \cdot 5^x - 4}{5} - 5^x) \leq 0 \quad \begin{cases} 5^x > \frac{1}{3} \\ \frac{5 \cdot 5^{2x} - 12 \cdot 5^x + 4}{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x > \frac{1}{3} \\ \frac{(5^x - 2)(5^x - 0,4)}{x} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \log_5 \frac{1}{3} \\ \frac{(x - \log_5 2)(x - \log_5 \frac{2}{5})}{x} \leq 0 \end{cases}$$



Ответ:  $\log_5 \frac{1}{3} < x \leq \log_5 \frac{2}{5}$ ;  $0 < x < \log_5 2$

**Метод рационализации  
при решении неравенств,  
содержащих  
иррациональные выражения.**



$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4(1 - x)}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4(1 - x)}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0 \\ \frac{(x^2 - 1) - 4(1 - x)}{(x + 7) - 1} \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 6} \leq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x \leq 1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x + 6} \leq 0 \\ \begin{cases} -7 \leq x \leq -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$-7 \leq x < -6; -5 \leq x \leq -1; x = 1$$

Ответ:  $-7 \leq x < -6; -5 \leq x \leq -1; x = 1$

№2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - 1}{x + 1} \leq x - 1$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - 1}{x + 1} \leq x - 1$$

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - x^2}{x + 1} \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{x^4 - 2 - x^4}{x + 1} \leq 0 \\ x \neq -1 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{x + 1} \geq 0 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$x \geq \sqrt[4]{2}$$

Ответ:  $x \geq \sqrt[4]{2}$

**№3** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x^2 + 5x - 2} < 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x^2 + 5x - 2} < 0,$$
$$\begin{cases} \frac{(x+1) - (1-x)}{(x+2)(3x-1)} < 0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} \frac{2x}{(x+2)(3x-1)} < 0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$0 < x < \frac{1}{3}$$

Ответ:  $0 < x < \frac{1}{3}$

**№4** Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} + \sqrt[3]{3x^2 + 7x}} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} + \sqrt[3]{3x^2 + 7x}} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} - \sqrt[3]{-3x^2 - 7x}} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 4 - x^2 - 3x - 3}{3x^2 + 10x + 5 + 3x^2 + 7x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{6x^2 + 17x + 5} \geq 0,$$

$$\frac{(x + 1)^2}{(2x + 5)(3x + 1)} \geq 0$$

$$x < -2,5; \quad x > -\frac{1}{3}; \quad x = -1$$

Ответ:

$$x < -2,5; \quad x > -\frac{1}{3}; \quad x = -1$$

№5 Решить неравенство:  $\frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1, \quad \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{(x-2)^2}} \geq 0,$$

$$\begin{cases} \frac{x+2-8+x}{8-x-(x-2)^2} \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ 8-x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-6}{-x^2+3x+4} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-6}{x^2-3x-4} \leq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-6}{(x-4)(x+1)} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$$

Ответ:  $-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$

$$\frac{\sqrt{35 + 2x - x^2} - x - 5}{|3x^2 + 4x - 9| - |x^2 + 6x + 3|} \leq 0$$

Решение:

$35 + 2x - x^2 \geq 0$  при  $-5 \leq x \leq 7$  тогда  $x + 5 \geq 0$ , следовательно

$$\frac{\sqrt{35 + 2x - x^2} - \sqrt{(x + 5)^2}}{|3x^2 + 4x - 9| - |x^2 + 6x + 3|} \leq 0$$

$$\frac{35 + 2x - x^2 - x^2 - 10x - 25}{(3x^2 + 4x - 9 - x^2 - 6x - 3)(3x^2 + 4x - 9 + x^2 + 6x + 3)} \leq 0$$

$$\frac{-2x^2 - 8x + 10}{(2x^2 - 2x - 12)(2x^2 + 5x - 3)} \leq 0 \quad \frac{x^2 + 4x - 5}{(x^2 - x - 6)(2x^2 + 5x - 3)} \geq 0$$

$$\frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 3)(x + 2)(x + 3)(x - 0,5)} \geq 0$$

$$x = -5; -3 < x < -2; 0,5 < x \leq 1; 3 < x \leq 7$$

$$\text{Ответ: } x = -5; \quad -3 < x < -2; \quad 0,5 < x \leq 1; \quad 3 < x \leq 7$$

# **Метод рационализации при решении неравенств, содержащих модули.**

**№1.** Решить неравенство:  $|x^2 + 10x + 16| - |x^2 - 16| \geq 0$  .

Решение:  $|x^2 + 10x + 16| - |x^2 - 16| \geq 0$  ,

$$(x^2 + 10x + 16)^2 - (x^2 - 16)^2 \geq 0,$$

$$(x^2 + 10x + 16 - x^2 + 16)(x^2 + 10x + 16 + x^2 - 16) \geq 0,$$

$$(10x+32)(2x^2 + 10x) \geq 0, \quad (10x+32)2x(x+5) \geq 0 ,$$

$$-5 \leq x \leq -3,2; \quad x \geq 0.$$

Ответ:  $-5 \leq x \leq -3,2; \quad x \geq 0$ .



№2. Решить неравенство:  $\frac{|2x - 1| - |x + 1|}{|2x + 3| - |x - 3|} \leq 0$

Решение:

$$\frac{|2x - 1| - |x + 1|}{|2x + 3| - |x - 3|} \leq 0$$

$$\frac{(2x - 1 - x - 1)(2x - 1 + x + 1)}{(2x + 3 - x + 3)(2x + 3 + x - 3)} \leq 0, \quad \frac{(2x - 2)3x}{(x + 6)3x} \leq 0,$$

$$-6 < x < 0; 0 < x \leq 2$$

Ответ:  $-6 < x < 0; 0 < x \leq 2$

$$\frac{|4x - 3| - |3x - 4|}{|x^2 - x - 18| - |x^2 + x|} \leq 0$$

Решение:

$$\frac{|4x - 3| - |3x - 4|}{|x^2 - x - 18| - |x^2 + x|} \leq 0$$

$$\frac{(4x - 3 - 3x + 4)(4x - 3 + 3x - 4)}{(x^2 - x - 18 - x^2 - x)(x^2 - x - 18 + x^2 + x)} \leq 0,$$

$$\frac{(x + 1)(7x - 7)}{(x + 9)(2x^2 - 18)} \leq 0$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 9)(x - 3)(x + 3)} \leq 0$$

$$-9 < x < -3; \quad -1 \leq x \leq 1; \quad x > 3.$$

Ответ:  $-9 < x < -3; \quad -1 \leq x \leq 1; \quad x > 3.$

$$\frac{|2x^2 - 13x + 12| - x^2}{|x^2 - 6x + 4| - 4} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{(2x^2 - 13x + 12 - x^2)(2x^2 - 13x + 12 + x^2)}{(x^2 - 6x + 4 - 4)(x^2 - 6x + 4 + 4)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 - 13x + 12)(3x^2 - 13x + 12)}{(x^2 - 6x)(x^2 - 6x + 8)} \geq 0$$

$$\frac{(x - 1)(x - 12)(3x - 4)(x - 3)}{x(x - 6)(x - 2)(x - 4)} \geq 0,$$

$$x < 0, \quad 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad 2 < x \leq 3, \quad 4 < x < 6, \quad x \geq 12.$$

$$\text{Ответ: } x < 0, \quad 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad 2 < x \leq 3, \quad 4 < x < 6, \quad x \geq 12|$$

$$\frac{||x^2 + x| - 3| - 3}{||3x + 4| - 2| - 1} \geq 0 \quad \text{Решение:} \quad \frac{||x^2 + x| - 3| - |3|}{||3x + 4| - 2| - |1|} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2 + x| - 3 - 3)(|x^2 + x| - 3 + 3)}{(|3x + 4| - 2 - 1)(|3x + 4| - 2 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2 + x| - 6)|x^2 + x|}{(|3x + 4| - 3)(|3x + 4| - 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 + x + 6)|x^2 + x|}{(3x + 4 - 3)(3x + 4 + 3)(3x + 4 - 1)(3x + 4 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x + 3)x^2 + x + 6)|x^2 + x|}{(3x + 1)(3x - 7)(3x + 5)(3x + 3)} \geq 0,$$

$$x \leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, \quad -1 < x < -\frac{1}{3}, \quad x = 0, \quad x \geq 2.$$

$$\text{Ответ: } x \leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, \quad -1 < x < -\frac{1}{3}, \quad x = 0, \quad x \geq 2.$$

№8. Решить неравенство:

$$\frac{|2x^2 - x - 3| - x^2 - 2x - 1}{|3x^2 + x - 2| - x^2 - 2x - 1} \leq 0$$

$$\frac{|2x^2 - x - 3| - (x^2 + 2x + 1)}{|3x^2 + x - 2| - (x^2 + 2x + 1)} \leq 0,$$

$$\frac{(2x^2 - x - 3 - x^2 - 2x - 1)(2x^2 - x - 3 + x^2 + 2x + 1)}{(3x^2 + x - 2 - x^2 - 2x - 1)(3x^2 + x - 2 + x^2 + 2x + 1)} \leq 0,$$

$$\frac{(x^2 - 3x - 4)(3x^2 + x - 2)}{(2x^2 - x - 3)(4x^2 + 3x - 1)} \leq 0, \quad \frac{(x + 1)(3x - 2)(x + 1)(x - 4)}{(x + 1)(4x - 1)(x + 1)2x - 3)} \leq 0,$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} < x \leq 4$$

Ответ:  $\frac{1}{4} < x \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} < x \leq 4$

**Метод рационализации  
при решении неравенств,  
содержащих  
показательные функции**

$$1) a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^f > b, \\ b > 0, \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a - 1) > 0;$$

$$3) \frac{a^{f_1} - a^{g_1}}{a^{f_2} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ a > 0, a \neq 1; \end{cases}$$

**№1. Решить неравенство:**

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$$

Решение:

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1 \quad ; \quad (x^2 - x)((4x^2 + 2x + 1) - 1) > 0;$$

$$x^2(x - 1)(2x + 1) > 0; \quad x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$$

Ответ:  $(-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$



№2. Решить неравенство:

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$$

Решение:

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3 ; \left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right) ((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0;$$

$$\frac{(-2x - 1)x(x + 1)(x^2 + x + 2)}{x + 2} \geq 0; x \in (-2; -1] \cup [-0,5; 0]$$

Ответ:  $(-2; -1] \cup [-0,5; 0]$

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$$

Решение:

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2^x + 3 \frac{1}{2^x})^{\log_2 \frac{x^2}{x+6}} > 1 \\ x > 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \left( \log_2 \frac{x^2}{x+6} \right) (2^x + \frac{3}{2^x} - 1) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - (x+6))(2^{2x} - 2^x + 3) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 6 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x+2) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ; x > 3$$

Ответ:  $x > 3$