Метод рационализации в логарифмических неравенствах

Учителя математики
МКОУ «Суджанская
средняя общеобразовательная
школа № 2»
ПоречнойИ.В.

$$1)\ \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f-a^b)(a-1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$3)\ \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(a-1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$4)\ \log_a f + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fa^b-1)(a-1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$5)\ \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Решение:

$$log_{log_x 2x}(5x-2) \geq 0,$$

$$log_{log_x 2x}(5x-2) \geq log_{log_x 2x}1$$

$$\begin{cases} (log_x 2x - 1)(5x - 2 - 1) \geq 0, \\ log_x 2x > 0, \\ log_x 2x \neq 1, \\ 5x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (log_x 2x - log_x x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0{,}4, \\ (x-1)(2x-1) > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(2x-x)(5x-3) \geq 0, \\ x > 0{,}4, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0{,}5 \\ x > 1 \end{array}\right., \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 0{,}6 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ x > 0{,}4, \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0{,}5 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$0{,}4 < x < 0{,}5; \ x > 1$

Ответ:

$0{,}4 < x < 0{,}5; \ x > 1$

№2. Решить неравенство: $log_x(x-2)log_x(x+2) \leq 0$

Решение: $log_x(x-2)log_x(x+2) \leq 0$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x \neq 1, \\ (x-1)(x-2-1)(x+2-1)(x-1) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (x-1)^2(x-3)(x+1) \leq 0, \end{cases}$$

$2 < x \leq 3$

Ответ: $2 < x \leq 3$

№3.Решить неравенство: $log_x(x^2-3)<0$

Решение: $log_x(x^2-3)<0, \quad log_x(x^2-3)<log_x 1,$

$$\begin{cases}(x^2-3-1)(x-1)<0,\\ x>0,\\ x\neq 1,\\ x^2-3>0\end{cases} \qquad \begin{cases}(x^2-4)(x-1)<0\\ x>\sqrt{3}\end{cases},$$

$$\begin{cases}(x-2)(x+2)(x-1)<0,\\ x>\sqrt{3}\end{cases} \qquad \sqrt{3}<x<2$$

Ответ: $(\sqrt{3};2)$

№4. Решить неравенство $log_{2x+3}x^2-1<0$

Решение:

$log_{2x+3}x^2-1<0$, $log_{2x+3}x^2<log_{2x+3}(2x+3)$,

$$\begin{cases}(2x+3-1)(x^2-2x-3)<0,\\ 2x+3>0,\\ 2x+3\neq 1,\\ x\neq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}(2x+2)(x^2-2x-3)<0,\\ x>-\frac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(x+1)(x+1)(x-3)<0,\\ x>-\frac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ x\neq 0,\end{cases} \begin{cases}2(x+1)^2(x-3)<0,\\ x>-\frac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ x\neq 0,\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}-1{,}5<x<-1\\ -1<x<0\\ 0<x<3\end{array}\right.$$

Ответ: (-1,5;-1);(-1;0);(0;3)

№5. Решить неравенство $log_{|x+2|}(4+7x-2x^2\ )\le 2$

Решение: $log_{|x+2|}(4+7x-2x^2\ )\le 2,$

$log_{|x+2|}(4+7x-2x^2\ )\le log_{|x+2|}(x+2)^2,$

$$\begin{cases}(|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4)\le 0,\\ 4+7x-2x^2>0,\\ |x+2|\ne 1,\\ |x+2|>0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}((x+2)^2-1)(-3x^2+3x)\le 0,\\ -0{,}5<x<4,\\ x\ne -1,\\ x\ne -2,\\ x\ne -3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(x+1)(x+3)(x-1)\ge 0,\\ -0{,}5<x<4,\\ x\ne -1,\\ x\ne -2,\\ x\ne -3\end{cases}$$

Ответ: (-0,5;0]; [1;4)

№6. Решить неравенство

$$log_{x+3}\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

Решение:

$$log_{x+3}\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

$$\begin{cases} (\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1)(x+3-1) > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2}(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> (-1;0) ; (0; 1)

$log_{\frac{x}{3}}\left(log_x\sqrt{3-x}\right) \geq 0$, Решение: $log_{\frac{x}{3}}\left(log_x\sqrt{3-x}\right) \geq log_{\frac{x}{3}}1$,

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(log_x\sqrt{3-x}-1\right) \geq 0, \\ log_x\sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(log_x\sqrt{3-x}-log_x x\right) \geq 0, \\ log_x\sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\sqrt{3-x}-x\right)(x-1) \geq 0, \\ log_x\sqrt{3-x} > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)(3-x-x^2)(x-1) \geq 0, \\ (x-1)(3-x-1) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)(x^2+x-3) \leq 0, \\ (x-1)(2-x) > 0, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x+\dfrac{1+\sqrt{13}}{2})(x+\dfrac{1-\sqrt{13}}{2})\le 0\\ (x-1)(2-x)>0,\\ 0<x<3,\\ x\ne 1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2})(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2})\le 0,\\ 1<x<2,\\ 0<x<3,\\ x\ne 1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2})(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2})\le 0,\\ 1<x<2,\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\ge \frac{-1+\sqrt{13},}{2}\\ x\le \frac{-1-\sqrt{13},}{2}\end{array}\right.\\ 1<x<2,\end{cases}$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\le x<2$$

Ответ: $\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};2\right)$

№8. Решить неравенство $log_{x-2}(x^2-1) > log_{x-2}(2x^2+x-3)$

Решение: $log_{x-2}(x^2-1) > log_{x-2}(2x^2+x-3)$,

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 2x^2+x-3>,0 \\ (x^2-1-2x^2-x+3)(x-2-1)>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 2x^2+x-3>,0 \\ (-x^2-x+2)(x-3)>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>1 \end{array}\right. \\ 2(x-1)(x+1{,}5)>0, \\ (x-3)(x-1)(x+2)<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1{,}5 \\ x>1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ 1<x<3 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2, \\ 1<x<3, \end{cases} \qquad 2<x<3$$

Ответ: $2<x<3$

№11. Решить неравенство $log_{\frac{1}{49}}(26-x)log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1$

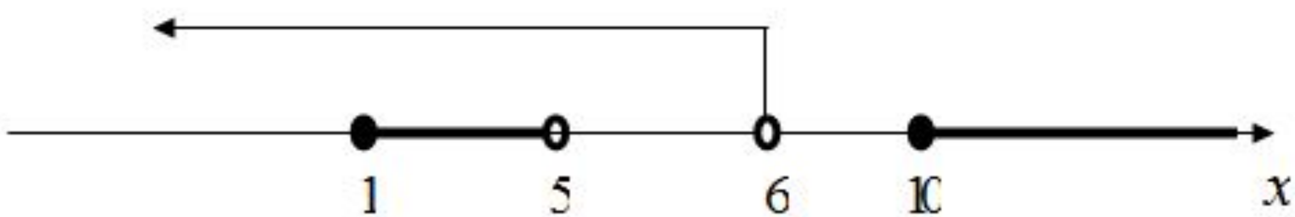
Решение:

$$log_{\frac{1}{49}}(26-x)log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1,$$

$$log_{\frac{1}{7}}(26-x)log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 2, \qquad \frac{log_{\frac{1}{7}}(26-x)}{log_{\frac{1}{7}}(6-x)} \geq 2, \qquad log_{6-x}(26-x) \geq 2,$$

$$\begin{cases} (6-x-1)(26-x-(6-x)^2 \geq 0, \\ 26-x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x \neq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} (5-x)(x^2-11x+10) \leq 0 \\ x<26 \\ x<6 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-x)(x-1)(x-10) \leq 0 \\ x<6 \\ x \neq 5 \end{cases} \qquad 1 \leq x < 5$$



Ответ: $1 \leq x < 5$

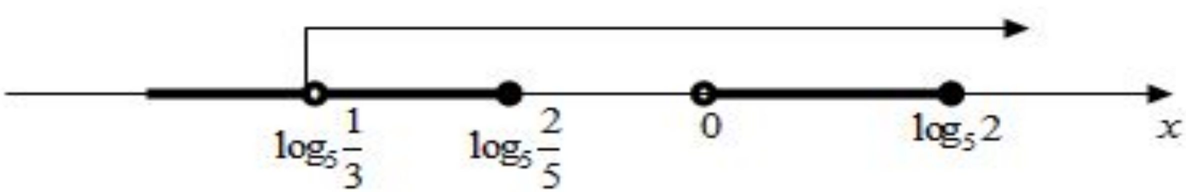
№12. Решить неравенство $\frac{1}{x} log_{0,4} \frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} \le log_{2,5} \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{x} log_{0,4} \frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} \le log_{2,5} \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{x} log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} \le log_{\frac{2}{5}} 5$$

$$\frac{1}{x}(log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} - log_{\frac{2}{5}} 5^{x}) \le 0 \qquad \begin{cases} 12-4\cdot5^{-x} > 0 \\ \frac{1}{x}(\frac{2}{5}-1)(\frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} - 5^{x}) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 12\cdot5^{x}-4>0 \\ \frac{1}{x}(\frac{2}{5}-1)(\frac{12-4\cdot5^{-x}}{5} - 5^{x}) \le 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 5^{x} > \frac{1}{3} \\ \frac{5\cdot5^{2x}-12\cdot5^{x}+4}{x} \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{x} > \frac{1}{3} \\ \frac{(5^{x}-2)(5^{x}-0,4)}{x} \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > log_5 \frac{1}{3} \\ \frac{(x-log_5 2)(x-log_5 \frac{2}{5})}{x} \le 0 \end{cases}$$



Ответ: $log_5 \frac{1}{3} < x \le log_5 \frac{2}{5}$; $0 < x < log_5 2$

Метод рационализации
при решении неравенств,
содержащих
иррациональные выражения.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0 \qquad \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0$$

$$\begin{cases}\frac{(x^2-1)-4(1-x)}{(x+7)-1}\le 0\\ x^2-1\ge 0\\ 1-x\ge 0\\ x+7\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2+4x-5}{x+6}\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\\ x\le 1\\ x\ge -7\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{(x+5)(x-1)}{x+6}\le 0\\ \left[\begin{array}{l}-7\le x\le -1\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}$$

$-7\le x<-6;\ -5\le x\le -1;\ x=1$

Ответ: $-7\le x<-6;\ -5\le x\le -1;\ x=1$

№2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^4-2}-1}{x+1} \le x-1$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x^4-2}-1}{x+1} \le x-1$$

$$\frac{\sqrt{x^4-2}-x^2}{x+1} \le 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^4-2-x^4}{x+1} \le 0 \\ x \ne -1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$x \ge \sqrt[4]{2}$$

Ответ: $x \ge \sqrt[4]{2}$

№3Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x^2+5x-2}<0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x^2+5x-2}<0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)-(1-x)}{(x+2)(3x-1)}<0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{2x}{(x+2)(3x-1)}<0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$0<x<\frac{1}{3}$$

Ответ: $0< x<\frac{1}{3}$

№4Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x+3}}{\sqrt[3]{3x^2+10x+5}+\sqrt[3]{3x^2+7x}} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x+3}}{\sqrt[3]{3x^2+10x+5}+\sqrt[3]{3x^2+7x}} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x+3}}{\sqrt[3]{3x^2+10x+5}-\sqrt[3]{-3x^2-7x}} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2+5x+4-x^2-3x-3}{3x^2+10x+5+3x^2+7x} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{6x^2+17x+5} \geq 0\,, \qquad \frac{(x+1)^2}{(2x+5)(3x+1)} \geq 0$$

$$x < -2{,}5; \quad x > -\frac{1}{3}; x = -1$$

Ответ:

$$x < -2{,}5; \quad x > -\frac{1}{3}; x = -1$$

№5 Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1, \quad \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{(x-2)^2}} \geq 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2-8+x}{8-x-(x-2)^2} \geq 0, \\ x+2>0, \\ 8-x>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x-6}{-x^2+3x+4} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-6}{x^2-3x-4} \leq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x-6}{(x-4)(x+1)} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$$

Ответ: $-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}-x-5}{|3x^2+4x-9|-|x^2+6x+3|} \le 0$$

Решение:

$35+2x-x^2 \ge 0$ при $-5 \le x \le 7$ тогда $x+5 \ge 0$, следовательно

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}-\sqrt{(x+5)^2}}{|3x^2+4x-9|-|x^2+6x+3|} \le 0$$

$$\frac{35+2x-x^2-x^2-10x-25}{(3x^2+4x-9-x^2-6x-3)(3x^2+4x-9+x^2+6x+3)} \le 0$$

$$\frac{-2x^2-8x+10}{(2x^2-2x-12)(2x^2+5x-3)} \le 0 \quad \frac{x^2+4x-5}{(x^2-x-6)(2x^2+5x-3)} \ge 0$$

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)(x+2)(x+3)(x-0{,}5)} \ge 0$$

$x=-5; -3<x<-2;\ 0{,}5<x\le 1; 3<x\le 7$

Ответ: $x=-5$; $-3<x<-2$; $0{,}5<x\le 1$; $3<x\le 7$

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих модули.

№1.Решить неравенство: $|x^2+10x+16|-|x^2-16|\geq 0$.

Решение: $|x^2+10x+16|-|x^2-16|\geq 0$,

$(x^2+10x+16)^2-(x^2-16)^2\geq 0,$

$(x^2+10x+16-x^2+16)(x^2+10x+16+x^2-16)\geq 0,$

$(10x+32)(2x^2+10x)\geq 0$, $(10x+32)2x(x+5)\geq 0$,

$-5\leq x\leq -3{,}2;\ x\geq 0.$

Ответ: $-5\leq x\leq -3{,}2;\ x\geq 0.$

№**2**. Решить неравенство: $\frac{|2x-1|-|x+1|}{|2x+3|-|x-3|} \leq 0$

Решение:

$$\frac{|2x-1|-|x+1|}{|2x+3|-|x-3|} \leq 0$$

$$\frac{(2x-1-x-1)(2x-1+x+1)}{(2x+3-x+3)(2x+3+x-3)} \leq 0, \qquad \frac{(2x-2)3x}{(x+6)3x} \leq 0,$$

$-6 < x < 0; 0 < x \leq 2$

Ответ: $-6 < x < 0; 0 < x \leq 2$

$$\frac{|4x-3|-|3x-4|}{|x^2-x-18|-|x^2+x|}\le 0$$

Решение:

$$\frac{|4x-3|-|3x-4|}{|x^2-x-18|-|x^2+x|}\le 0$$

$$\frac{(4x-3-3x+4)(4x-3+3x-4)}{(x^2-x-18-x^2-x)(x^2-x-18+x^2+x)}\le 0,$$

$$\frac{(x+1)(7x-7)}{(x+9)(2x^2-18)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+9)(x-3)(x+3)}\le 0$$

-9$< x < -3;\ -1\le x\le 1; x>3.$

Ответ: -9$< x < -3;\ -1\le x\le 1; x>3.$

$$\frac{|2x^2-13x+12|-x^2}{|x^2-6x+4|-4} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{(2x^2-13x+12-x^2)(2x^2-13x+12+x^2)}{(x^2-6x+4-4)(x^2-6x+4+4)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2-13x+12)(3x^2-13x+12)}{(x^2-6x)(x^2-6x+8)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x-12)(3x-4)(x-3)}{x(x-6)(x-2)(x-4)} \geq 0,$$

$x< 0$, $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$, $2< x \leq 3$, $4< x < 6$, $x \geq 12$.

Ответ: $x< 0$, $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$, $2< x \leq 3$, $4< x < 6$, $x \geq 12$.

$$\frac{||x^2+x|-3|-3}{||3x+4|-2|-1} \geq 0$$

Решение: $$\frac{||x^2+x|-3|-|3|}{||3x+4|-2|-|1|} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2+x|-3-3)(|x^2+x|-3+3)}{(|3x+4|-2-1)(|3x+4|-2+1)} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2+x|-6)|x^2+x|}{(|3x+4|-3)(|3x+4|-1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2+x-6)(x^2+x+6)|x^2+x|}{(3x+4-3)(3x+4+3)(3x+4-1)(3x+4+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+3)x^2+x+6)|x^2+x|}{(3x+1)(3x-7)(3x+5)(3x+3)} \geq 0,$$

$$x \leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, -1 < x < -\frac{1}{3}, x = 0, x \geq 2.$$

Ответ: x$\leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, -1 < x < -\frac{1}{3}, x = 0, x \geq 2.$

№**8**. Решить неравенство:

$$\frac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1}\le 0$$

$$\frac{|2x^2-x-3|-(x^2+2x+1)}{|3x^2+x-2|-(x^2+2x+1)}\le 0,$$

$$\frac{(2x^2-x-3-x^2-2x-1)(2x^2-x-3+x^2+2x+1)}{(3x^2+x-2-x^2-2x-1)(3x^2+x-2+x^2+2x+1)}\le 0,$$

$$\frac{(x^2-3x-4)(3x^2+x-2)}{(2x^2-x-3)(4x^2+3x-1)}\le 0, \quad \frac{(x+1)(3x-2)(x+1)(x-4)}{(x+1)(4x-1)(x+1)2x-3)}\le 0,$$

$$\frac{1}{4}<x\le\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}<x\le 4$$

Ответ: $\frac{1}{4}<x\le\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}<x\le 4$

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих показательные функции

$$1)\ a^{f} > a^{g} \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} a^{f} > b, \\ b > 0, \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a-1) > 0;$$

$$3)\ \frac{a^{f_1} - a^{g_1}}{a^{f_2} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ a > 0, a \neq 1; \end{cases}$$

№1.Решить неравенство:

$$(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$$

Решение:

$$(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1 \quad ;(x^2-x)\big((4x^2+2x+1)-1\big)>0;$$

$$x^2(x-1)(2x+1)>0; \qquad x\,\epsilon(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$

№2. Решить неравенство:

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3$$

Решение:

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3\,; \left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)\left((x^2+x+1)-1\right) \geq 0;$$

$$\frac{(-2x-1)x(x+1)(x^2+x+2)}{x+2} \geq 0; x \in (-2;-1] \cup [-0{,}5;0]$$

Ответ: $(-2;-1] \cup [-0{,}5;0]$

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2log_2 x - log_2(x+6)} > 1$$

Решение:

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2log_2 x - log_2(x+6)} > 1;$$

$$\begin{cases}(2^x + 3\,\frac{1}{2^x})^{log_2 \frac{x^2}{x+6}} > 1 \\ x > 0\end{cases};\begin{cases}\left(log_2 \frac{x^2}{x+6}\right)(2^x + \frac{3}{2^x} - 1) > 0 \\ x > 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}\left(x^2 - (x+6)\right)(2^{2x} - 2^x + 3) > 0 \\ x > 0\end{cases};\begin{cases}x^2 - x - 6 > 0 \\ x > 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}(x-3)(x+2) > 0 \\ x > 0\end{cases};x > 3$$

Ответ: $x > 3$