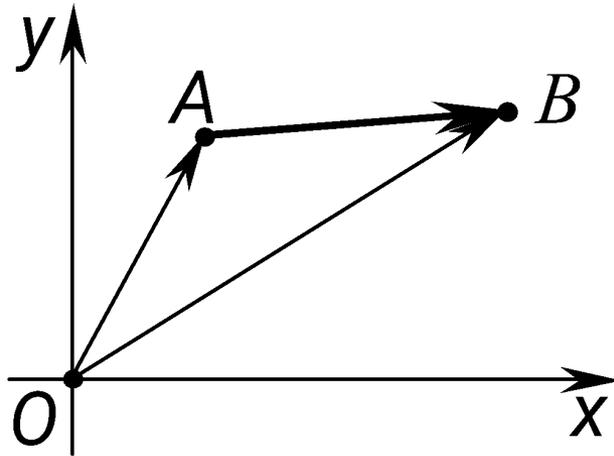


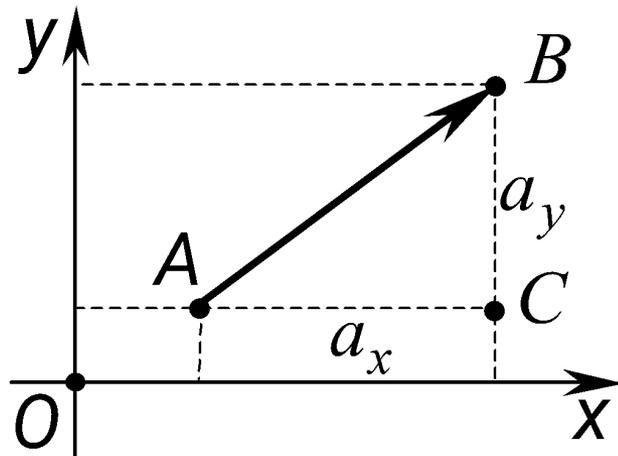
## §2. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем во множестве  $V^{(3)}$  ( $V^{(2)}$ ) декартов прямоугольный базис  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ).

**ЗАДАЧА 1.** Найти координаты вектора  $\overline{AB}$ , если известны декартовы координаты начала и конца вектора.  
Оставьте 5 строчек для доказательства



- **ЗАДАЧА 2.** Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.
- Оставьте 5 строчек для доказательства
- 



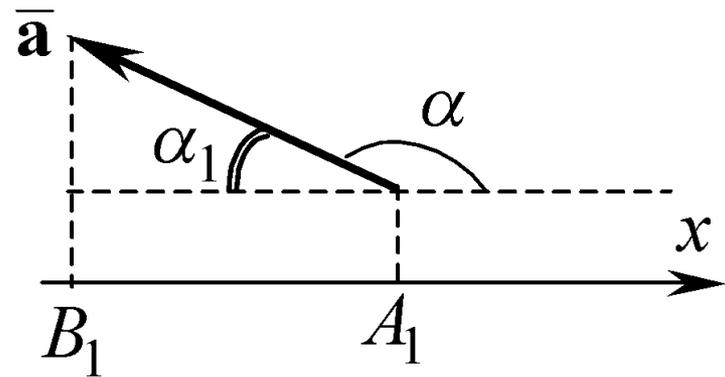
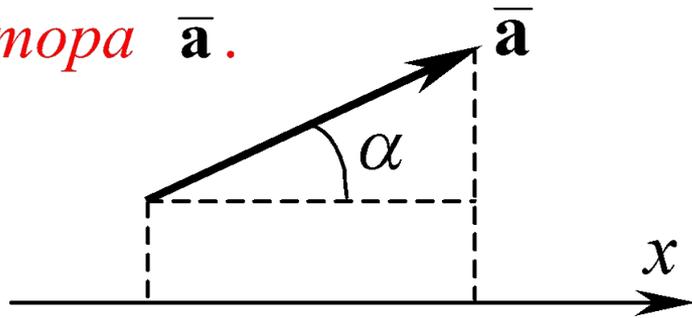
**ЗАДАЧА 3.** Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Ортом вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  называется вектор  $\bar{\mathbf{a}}_0$ , сонаправленный с вектором  $\bar{\mathbf{a}}$  и имеющий единичную длину.*

## Геометрический смысл координат орта вектора

Будем обозначать через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углы, которые вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  образует с координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

$\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  называются *направляющими косинусами вектора  $\bar{\mathbf{a}}$* .



Координаты орта вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  являются его направляющими косинусами.

*Замечание.* Так как  $|\bar{\mathbf{a}}_0| = 1$  и  $\bar{\mathbf{a}}_0 = \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$ , то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

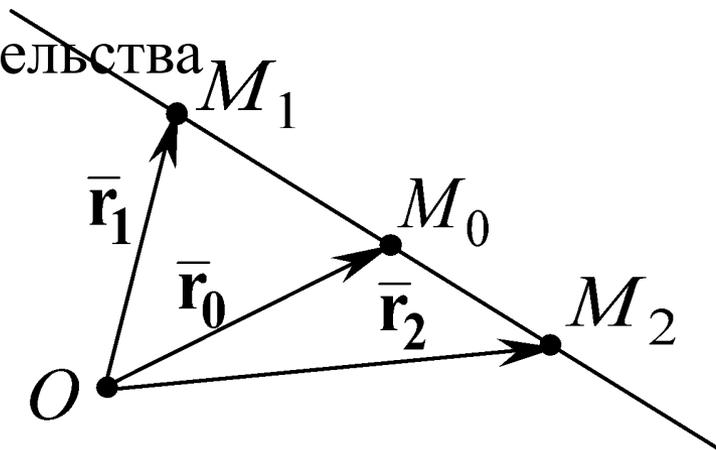
**ЗАДАЧА 4.** Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Говорят, что точка  $M_0$  делит отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $\lambda$  ( $\lambda \neq -1$ ) если  $\overline{M_1M_0} = \lambda \cdot \overline{M_0M_2}$ .

Если  $\lambda > 0$ , то точка  $M_0$  лежит между точками  $M_1$  и  $M_2$ . В этом случае говорят, что точка  $M_0$  делит отрезок  $M_1M_2$  во внутреннем отношении.

Если  $\lambda < 0$ , то точка  $M_0$  лежит на продолжении отрезка  $M_1M_2$ . В этом случае говорят, что точка  $M_0$  делит отрезок  $M_1M_2$  во внешнем отношении.

Оставьте 5 строчек для доказательства



### §3. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

#### 1. Скалярное произведение векторов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число  $|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi$ .

Если  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$  или  $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$ , то скалярное произведение векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  полагают равным нулю.

#### СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

После каждого свойства оставьте 3-5 строк для доказательства

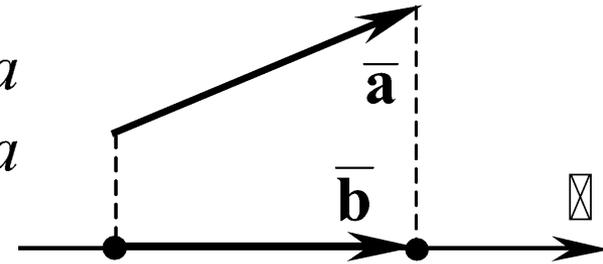
1) Скалярное произведение векторов коммутативно, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$$

2) Скалярное произведение ненулевых векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  равно произведению длины вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на проекцию вектора  $\bar{\mathbf{b}}$  на вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  (длины вектора  $\bar{\mathbf{b}}$  на проекцию  $\bar{\mathbf{a}}$  на  $\bar{\mathbf{b}}$ ).

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Проекцией вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на вектор  $\bar{\mathbf{b}}$  называется проекция вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на ось, определяемую вектором  $\bar{\mathbf{b}}$ .



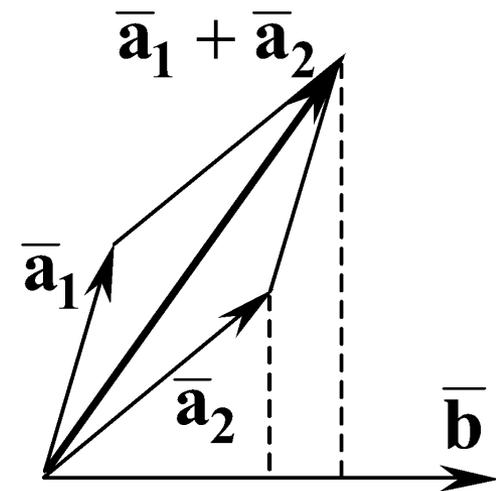
3) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения. Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы. Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}})$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2)$$



5) Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины. Т.е.  $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$

6) Ненулевые векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю (критерий перпендикулярности векторов).

7) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  имеют координаты:  $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$ ,

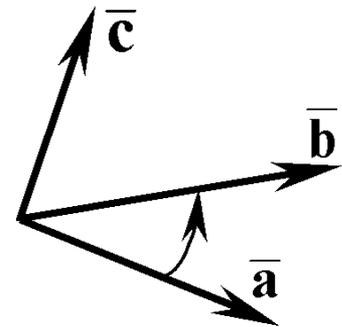
то 
$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) Если под действием постоянной силы  $\bar{\mathbf{F}}$  точка перемещается по прямой из точки  $M_1$  в  $M_2$ , то работа силы  $\bar{\mathbf{F}}$  будет равна  $A = (\bar{\mathbf{F}}, \overline{M_1 M_2})$  (физический смысл скалярного произведения).

## 2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  называется правой, если поворот от вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  к вектору  $\bar{\mathbf{b}}$  на меньший угол виден из конца вектора  $\bar{\mathbf{c}}$  против часовой стрелки.*



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Векторным произведением двух ненулевых векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называется вектор  $\bar{\mathbf{c}}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

1)  $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ ;

2) вектор  $\bar{\mathbf{c}}$  ортогонален векторам  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ ;

3) тройка векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  – правая.

Если хотя бы один из векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  или  $\bar{\mathbf{b}}$  нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.

Обозначают  $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$  или  $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$ .

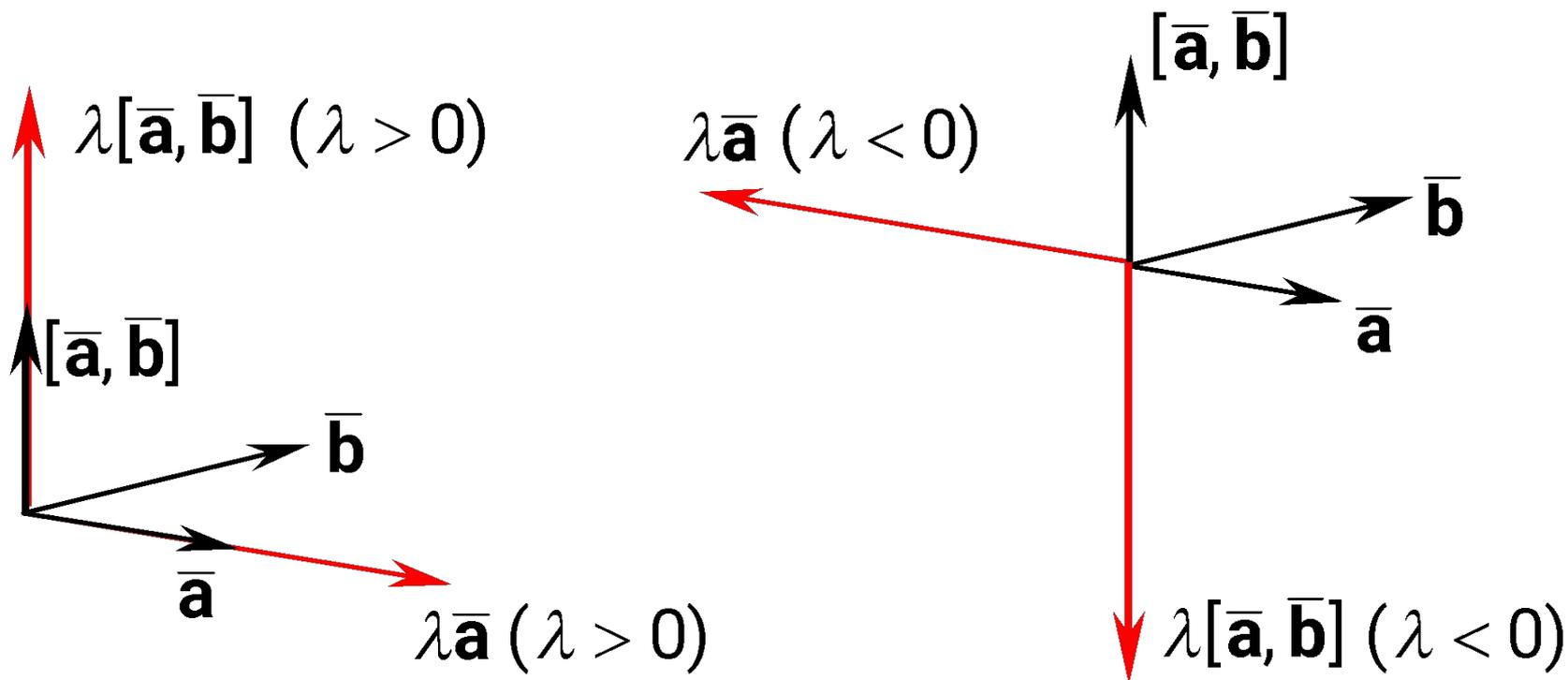
# СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

- 1) При перестановке векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  их векторное произведение меняет знак, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

- 2) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения. Т.е.

$$[\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}] = \lambda [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$



3) Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы. А именно:

$$[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}],$$
$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) Ненулевые векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору (Критерий коллинеарности векторов).

5) Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (Геометрический смысл векторного произведения).

6) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  имеют координаты:  $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$ , то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7) (Механический смысл векторного произведения). Если вектор  $\bar{\mathbf{F}}$  это сила, приложенная к точке  $M$ , то векторное произведение  $[\overline{OM}, \bar{\mathbf{F}}]$  представляет собой момент силы  $\bar{\mathbf{F}}$  относительно точки  $O$ .

Оставьте место для доказательства свойств

### 3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Смешанным произведением трех векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  называется число, равное скалярному произведению вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на векторное произведение векторов  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$ , т.е.  $(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$ .

Обозначают:  $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$  или  $\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}}$ .

### СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При циклической перестановке векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$  их смешанное произведение не меняется, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

2) При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.

3) Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения. Т.е.

$$(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda \bar{\mathbf{c}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы. А

именно:  $(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}),$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) Ненулевые векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю (Критерий компланарности векторов).

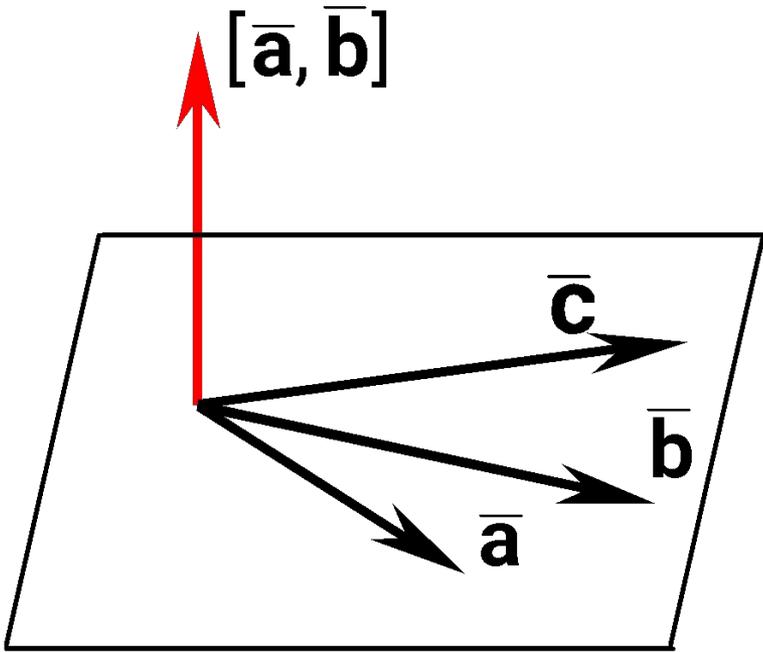


рис. 1

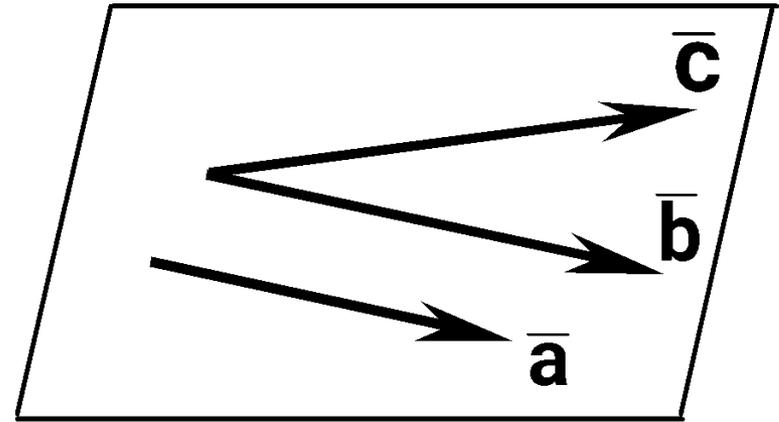


рис. 2

б) Если  $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$ , то векторы  $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$  образуют правую тройку. Если  $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$ , то тройка векторов  $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$  – левая.

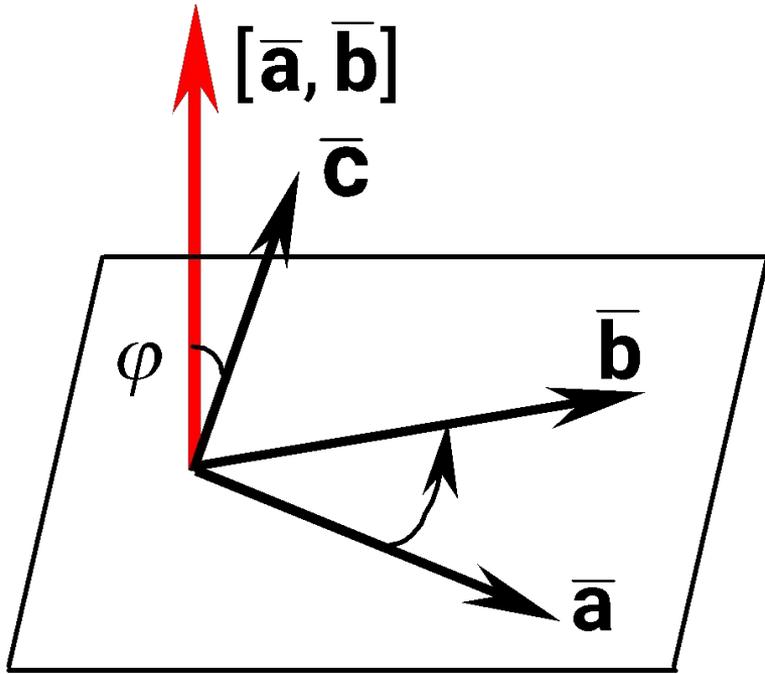


рис. 3

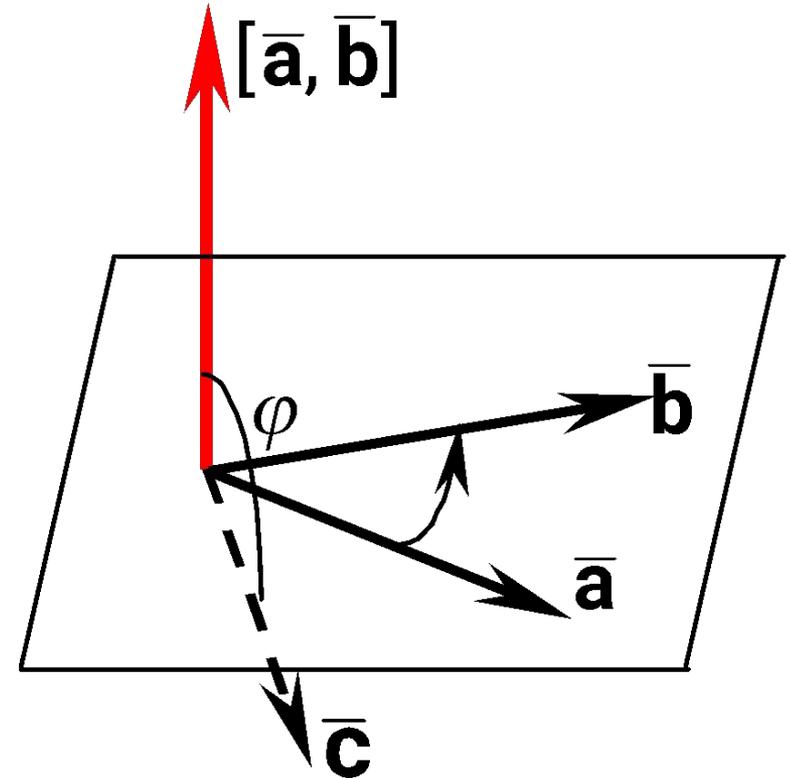


рис.4

7) Модуль смешанного произведения некопланарных векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (Геометрический смысл смешанного произведения).

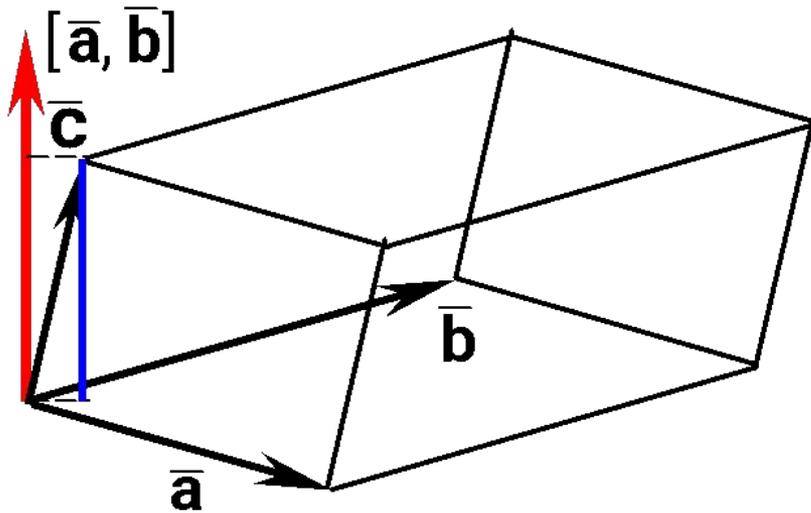


рис. 5

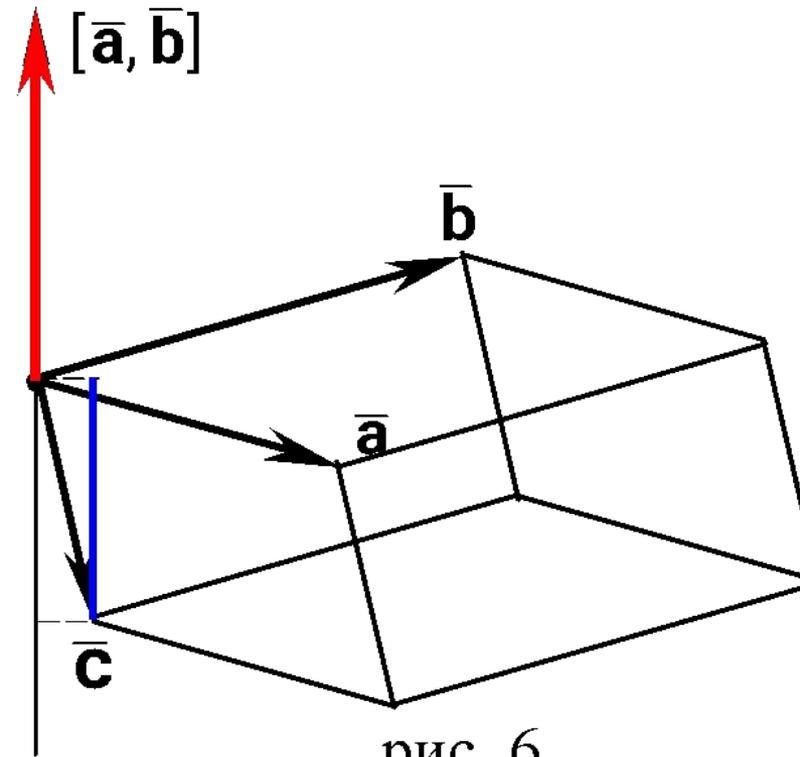


рис. 6

8) (Следствие свойства 7). Объем пирамиды, построенной на векторах  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$  равен  $\frac{1}{6}$  модуля их смешанного произведения.

9) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$  имеют координаты:  $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\}$ , то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$