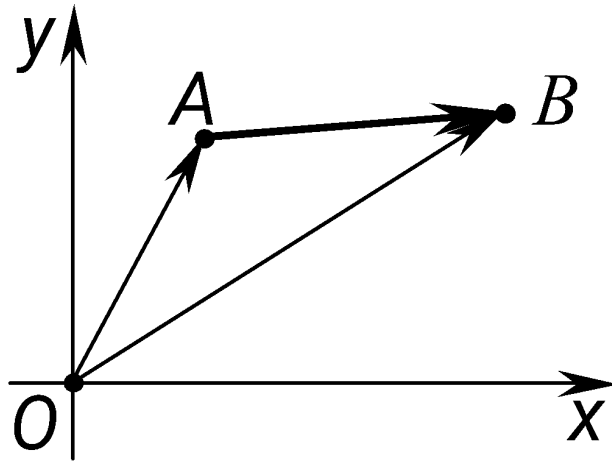


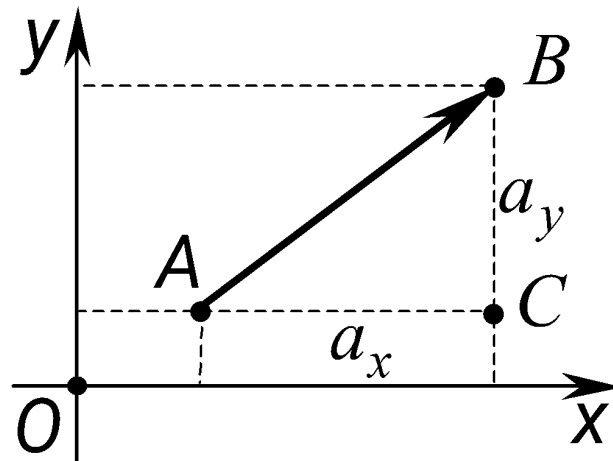
§2. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем во множестве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (\mathbf{i}, \mathbf{j}).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора \overline{AB} , если известны декартовы координаты начала и конца вектора.
Оставьте 5 строчек для доказательства



- **ЗАДАЧА 2.** Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.
- Оставьте 5 строчек для доказательства



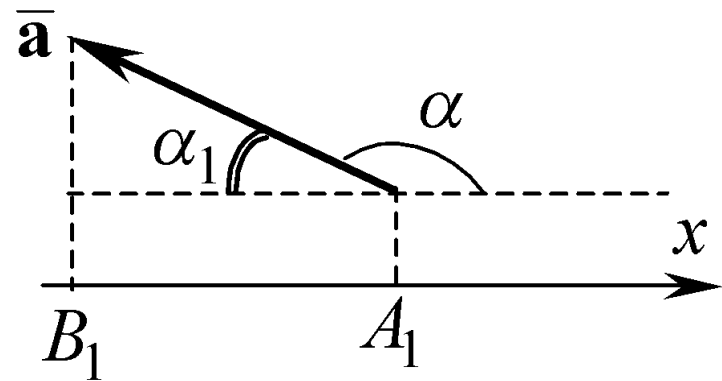
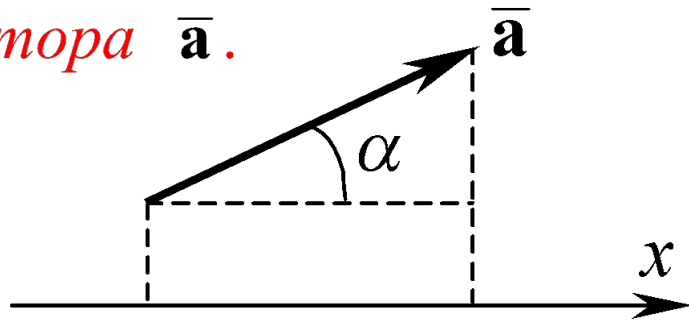
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом вектора $\bar{\mathbf{a}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{a}}_0$, сонаправленный с вектором $\bar{\mathbf{a}}$ и имеющий единичную длину.*

Геометрический смысл координат орта вектора

Будем обозначать через α , β и γ углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox , Oy и Oz соответственно.

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами вектора $\bar{\mathbf{a}}$* .



Координаты орта вектора $\bar{\mathbf{a}}$ являются его направляющими косинусами.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_0| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_0 = \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$, то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

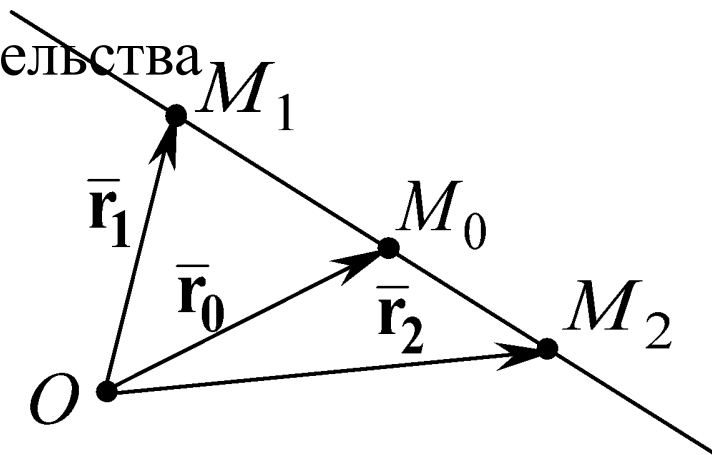
ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ ($\lambda \neq -1$) если $\overline{M_1M_0} = \lambda \cdot \overline{M_0M_2}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2 . В этом случае говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внутреннем отношении.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2 . В этом случае говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внешнем отношении.

Оставьте 5 строчек для доказательства



§3. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

1. Скалярное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число $|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi$.

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ или $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, то скалярное произведение векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ полагают равным нулю.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

После каждого свойства оставьте 3-5 строк для доказательства

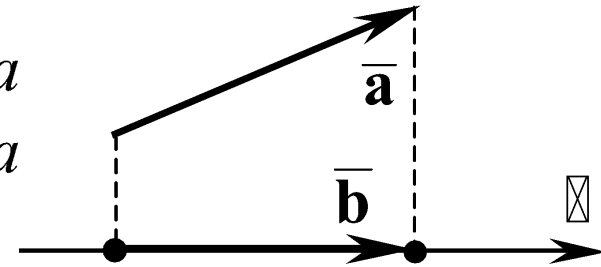
1) Скалярное произведение векторов коммутативно, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$$

2) Скалярное произведение ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равно произведению длины вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на проекцию вектора $\bar{\mathbf{b}}$ на вектор $\bar{\mathbf{a}}$ (длины вектора $\bar{\mathbf{b}}$ на проекцию $\bar{\mathbf{a}}$ на $\bar{\mathbf{b}}$).

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Проекцией вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}}$ называется проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось, определяемую вектором $\bar{\mathbf{b}}$.



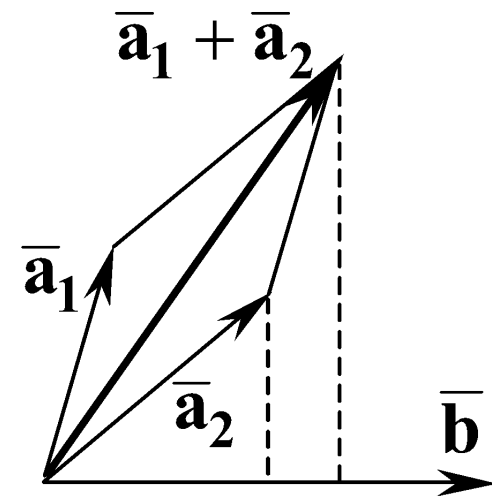
3) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения. Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы. Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}})$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2)$$



5) Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины. Т.е. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$

6) Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю (критерий перпендикулярности векторов).

7) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$,

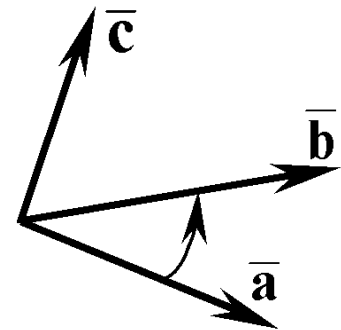
то
$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) Если под действием постоянной силы $\bar{\mathbf{F}}$ точка перемещается по прямой из точки M_1 в M_2 , то работа силы $\bar{\mathbf{F}}$ будет равна $A = (\bar{\mathbf{F}}, \overline{M_1 M_2})$ (физический смысл скалярного произведения).

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется правой, если поворот от вектора $\bar{\mathbf{a}}$ к вектору $\bar{\mathbf{b}}$ на меньший угол виден из конца вектора $\bar{\mathbf{c}}$ против часовой стрелки.*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторным произведением двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;

2) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;

3) тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – правая.

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ или $\bar{\mathbf{b}}$ нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.

Обозначают $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

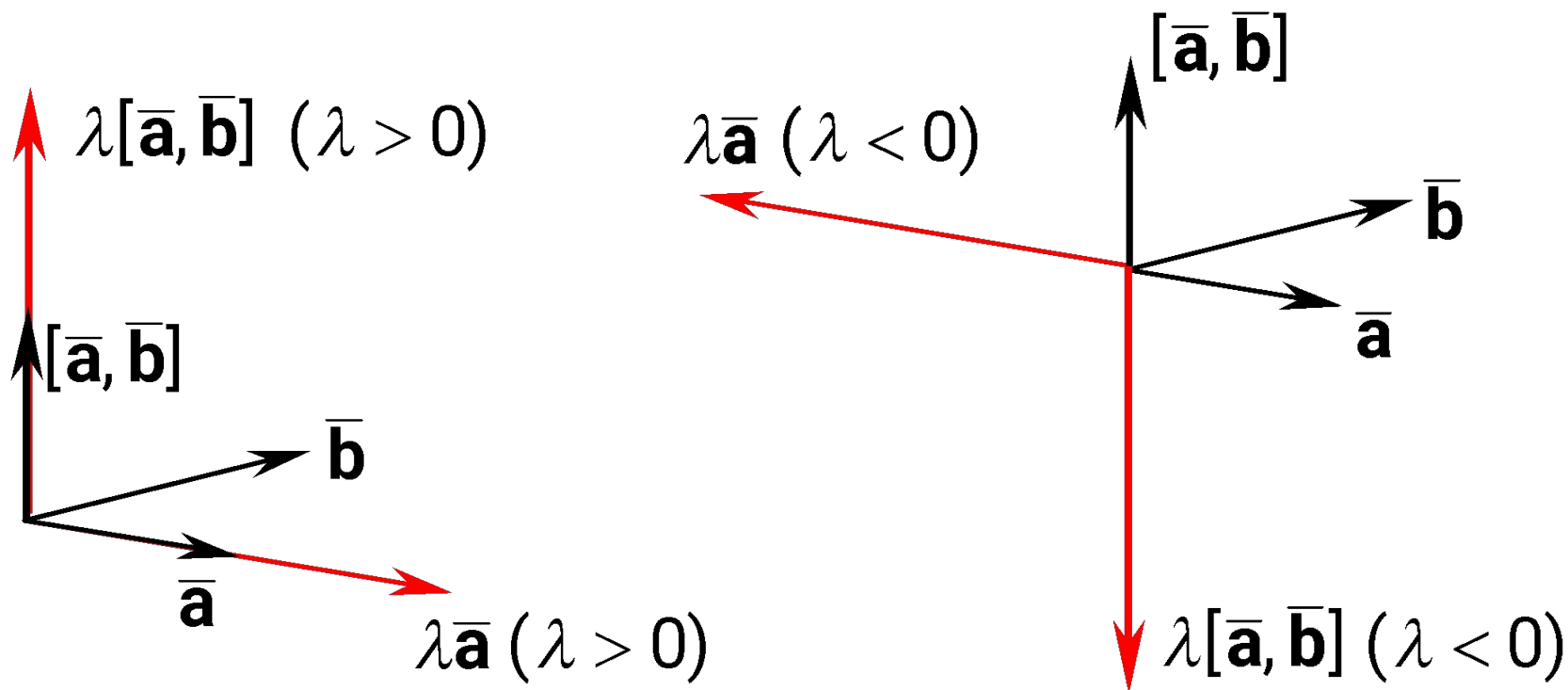
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

- 1) При перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ их векторное произведение меняет знак, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

- 2) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения. Т.е.

$$[\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}] = \lambda [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$



3) Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы. А именно:

$$[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}],$$
$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору (Критерий коллинеарности векторов).

5) Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (Геометрический смысл векторного произведения).

6) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7) (Механический смысл векторного произведения). Если вектор $\bar{\mathbf{F}}$ это сила, приложенная к точке M , то векторное произведение $[\overline{OM}, \bar{\mathbf{F}}]$ представляет собой момент силы $\bar{\mathbf{F}}$ относительно точки O .

Оставьте место для доказательства свойств

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Смешанным произведением трех векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, т.е. $(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$.

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При циклической перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ их смешанное произведение не меняется, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

2) При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.

3) Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения. Т.е.

$$(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda \bar{\mathbf{c}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы. А

именно: $(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}),$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) Ненулевые векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю (Критерий компланарности векторов).

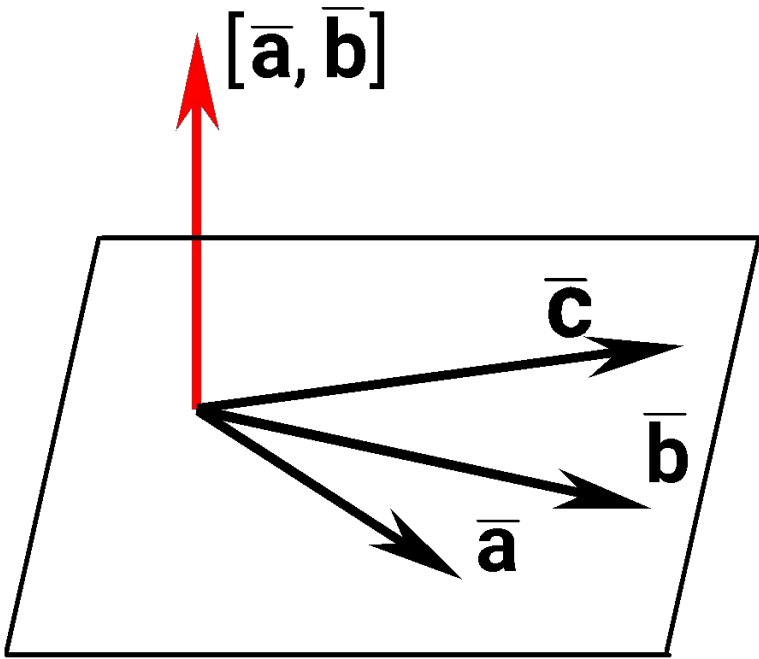


рис. 1

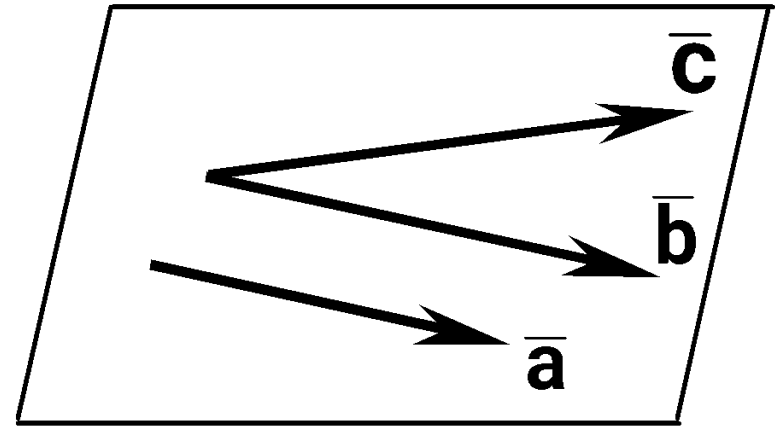


рис. 2

б) Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, то векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ образуют правую тройку. Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, то тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ – левая.

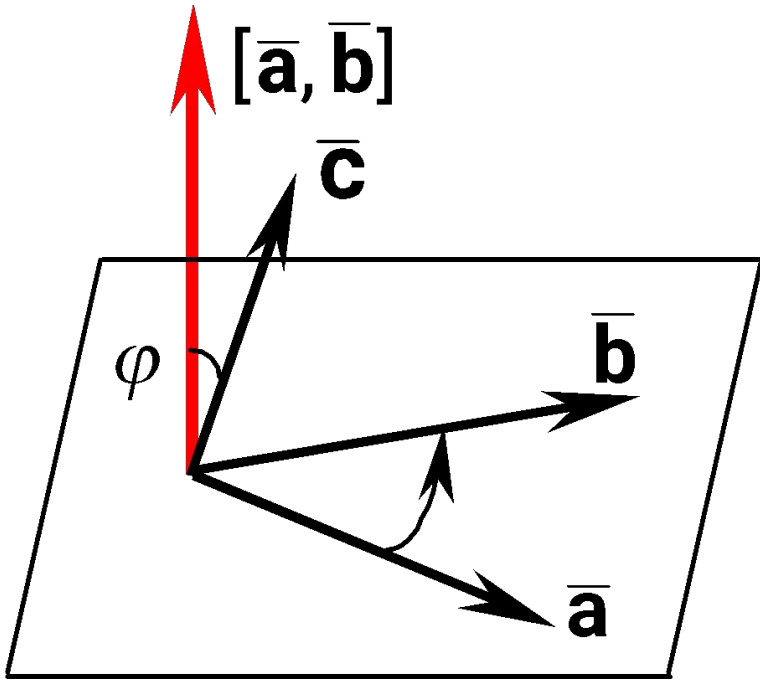


рис. 3

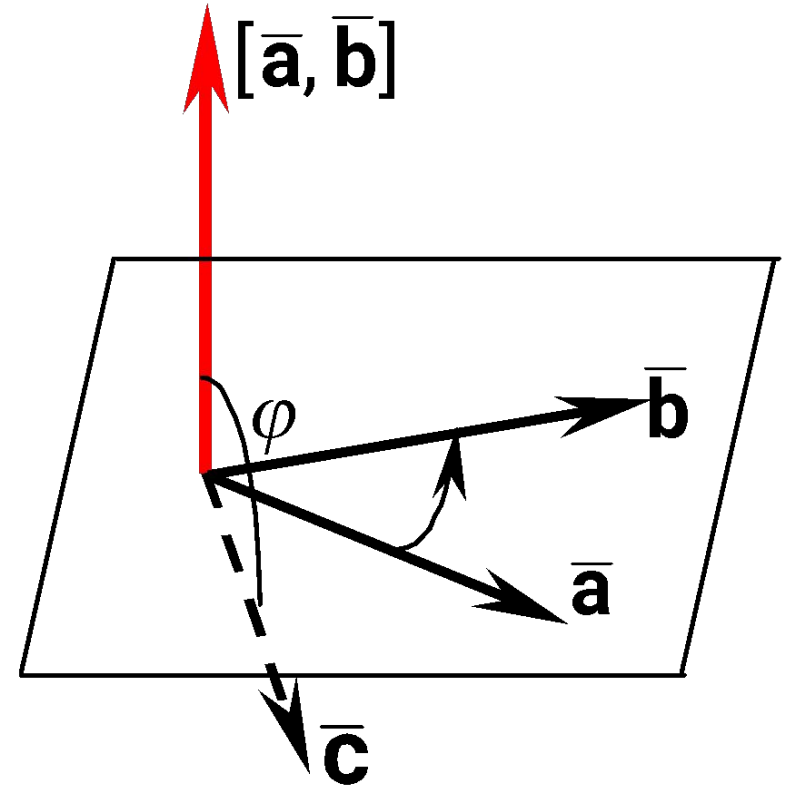


рис.4

7) Модуль смешанного произведения некопланарных векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (Геометрический смысл смешанного произведения).

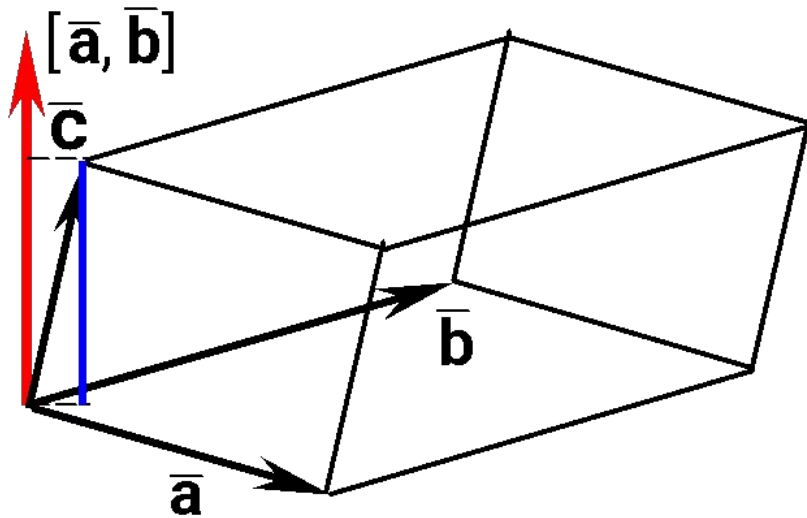


рис. 5

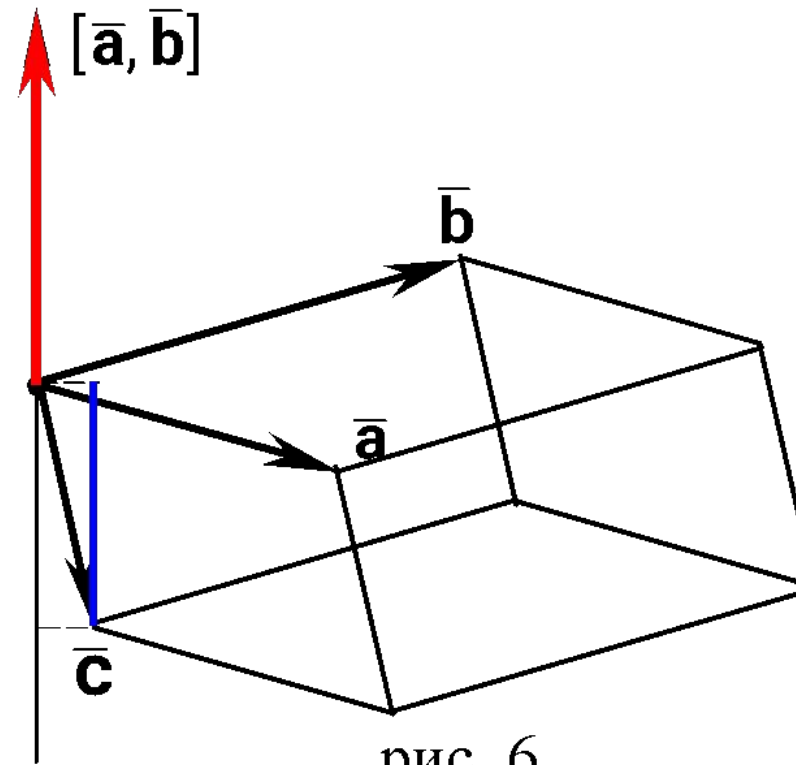


рис. 6

8) (Следствие свойства 7). Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ равен $\frac{1}{6}$ модуля их смешанного произведения.

9) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\bar{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\}$, то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$