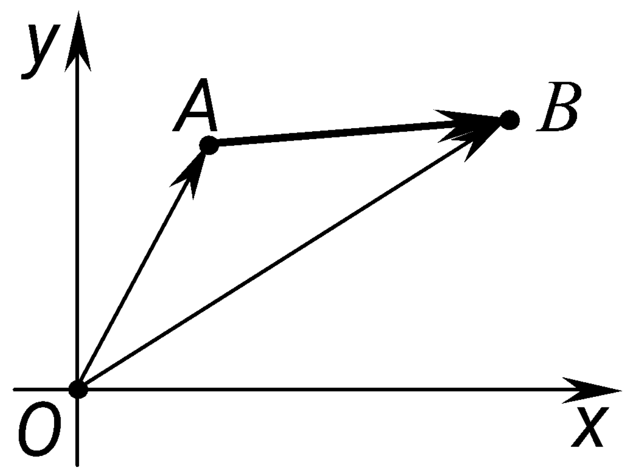
§2. Простейшие задачи векторной алгебры

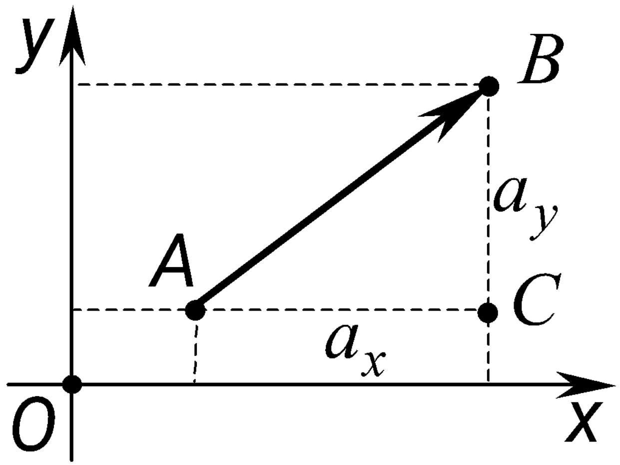
Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем во множестве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис **i, j, k** (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.

Оставьте 5 строчек для доказательства



- **ЗАДАЧА 2.** Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.
- Оставьте 5 строчек для доказательства
-



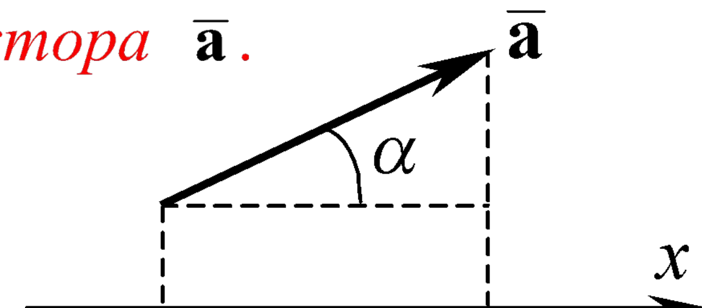
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

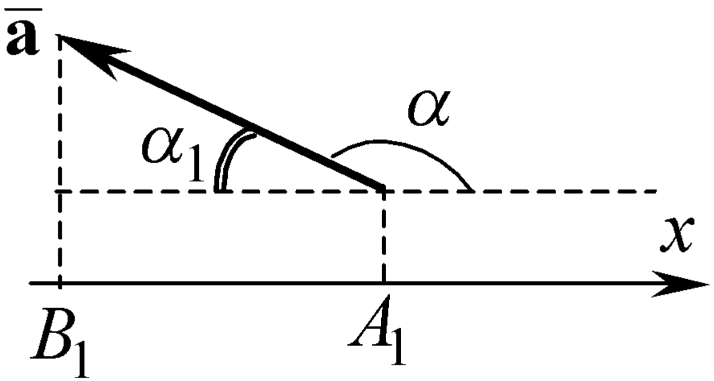
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_0$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину.*

Геометрический смысл координат орта вектора

Будем обозначать через α, β и γ углы, которые вектор $\overline{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\overline{\mathbf{a}}$.





К*оординаты орта вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами.*

Замечание. Так как $\left|\overline{\mathbf{a}}_0\right| = 1$ и $\overline{\mathbf{a}}_0 = \left\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

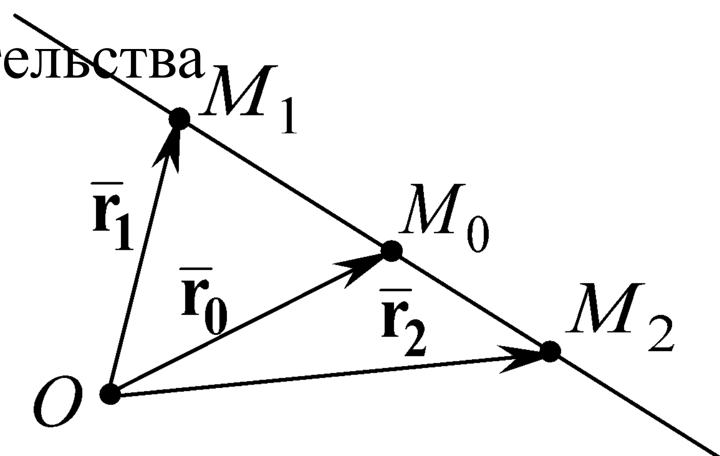
ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка* M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ $(\lambda \neq -1)$ *если* $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2. В этом случае говорят, что точка M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2. В этом случае говорят, что точка M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внешнем отношении*.

Оставьте 5 строчек для доказательства



§3. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

1. Скалярное произведение векторов

[redacted]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число* $|\overline{\mathbf{a}}|\cdot|\overline{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi$.

Если $\overline{\mathbf{a}}=\overline{\mathbf{0}}$ *или* $\overline{\mathbf{b}}=\overline{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

После каждого свойства оставьте 3-5 строк для доказательства

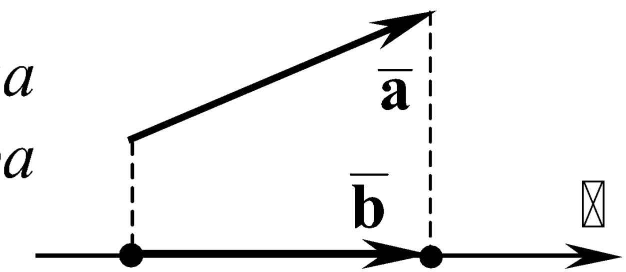
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\overline{\mathbf{b}}$ *на вектор* $\overline{\mathbf{a}}$ *(длины вектора* $\overline{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\overline{\mathbf{a}}$ *на* $\overline{\mathbf{b}}$*).*

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = \left|\overline{\mathbf{a}}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{a}}}\overline{\mathbf{b}} = \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\overline{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\overline{\mathbf{b}}$.



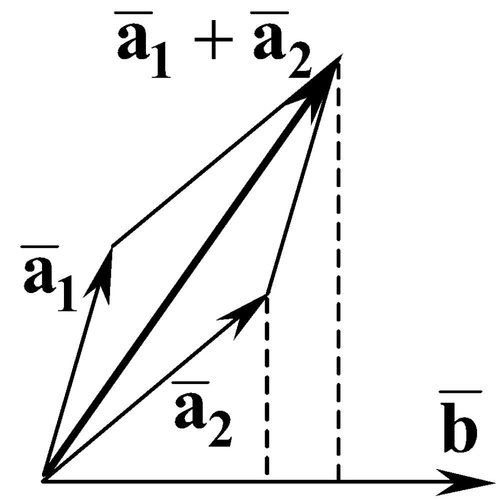
3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}) = \lambda(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы.* Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}})$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2)$$



5) *Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины.* Т.е. $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{a}}) = |\overline{\mathbf{a}}|^2$

6) *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* (критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$,

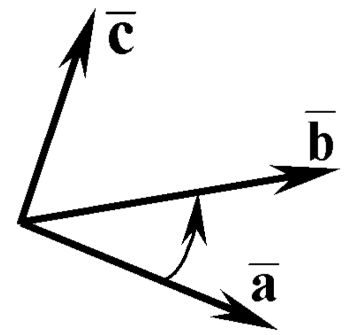
то
$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) *Если под действием постоянной силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2, *то работа силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *будет равна* $A = \left(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{M_1 M_2}}\right)$ (физический смысл скалярного произведения).

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется правой, если поворот от вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\bar{\mathbf{b}}$ *на меньший угол виден из конца вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *против часовой стрелки.*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{c}}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *– угол между векторами* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

2) *вектор* $\bar{\mathbf{c}}$ *ортогонален векторам* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

3) *тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– правая.*

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Обозначают $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

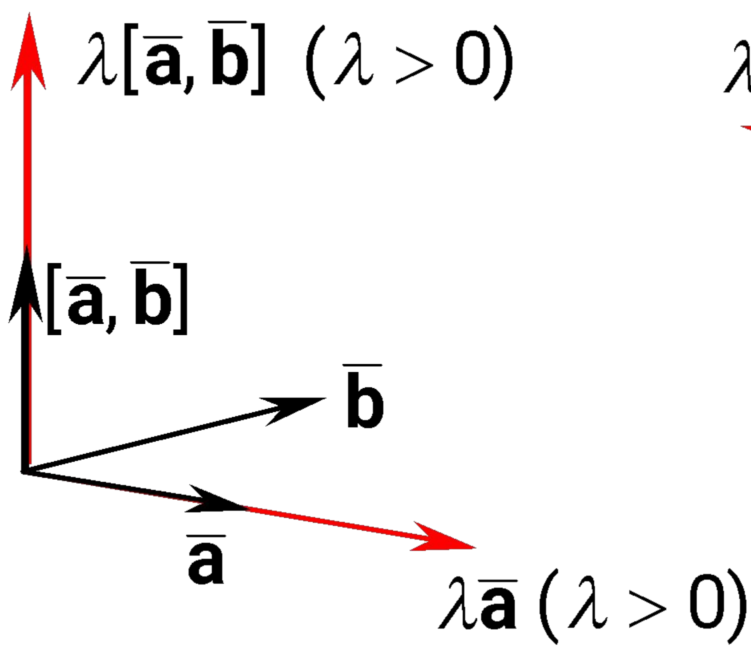
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

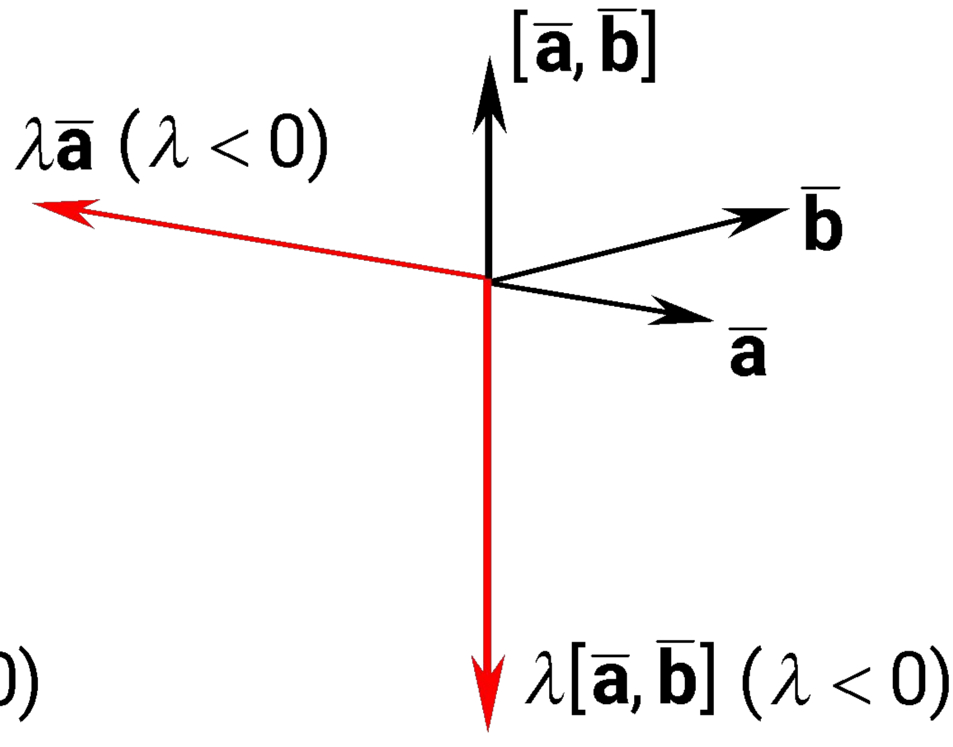
1) *При перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

2) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения*. Т.е.

$$[\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}] = \lambda[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$





3) *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно: $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$,

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору* (Критерий коллинеарности векторов).

5) *Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах* (Геометрический смысл векторного произведения).

6) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x;b_y;b_z\}$, *то*

$$[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7) (Механический смысл векторного произведения). *Если вектор* $\overline{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* M, *то векторное произведение* $\left[\overline{\mathbf{OM}},\overline{\mathbf{F}}\right]$ *представляет собой момент силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *относительно точки* O.

Оставьте место для доказательства свойств

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением трех векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\bar{a}$ *на векторное произведение векторов* $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$, *т.е.* $(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Обозначают: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) *При циклической перестановке векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *их смешанное произведение не меняется*, т.е.

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{b},\bar{c},\bar{a}) = (\bar{c},\bar{a},\bar{b}).$$

2) *При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.*

3) *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения*. Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda\bar{\mathbf{c}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю* (Критерий компланарности векторов).

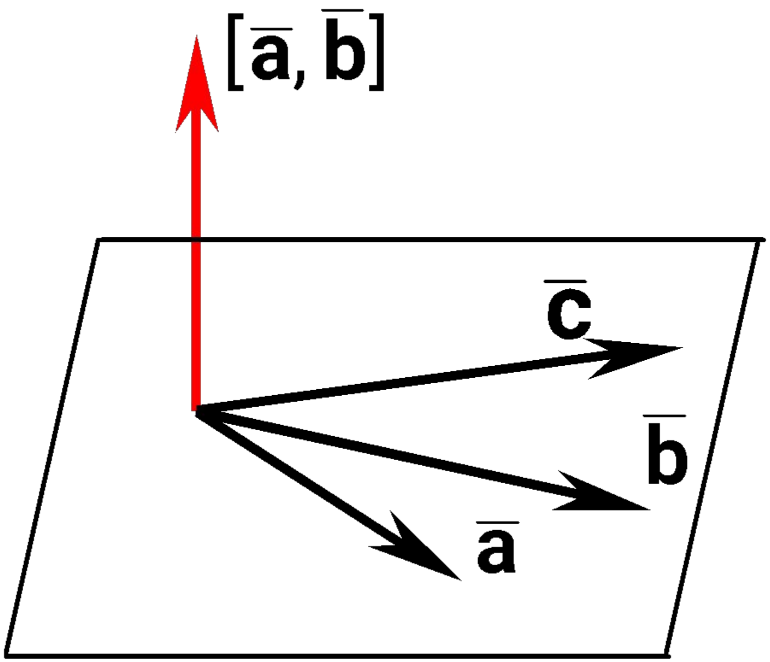


рис. 1

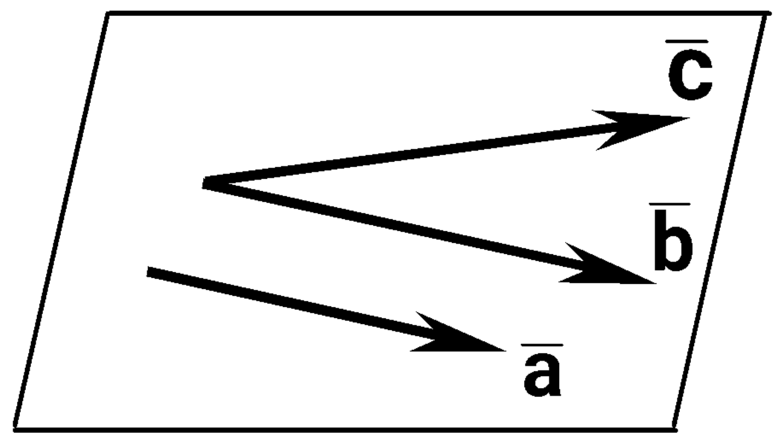


рис. 2

6) *Если* $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, *то векторы* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *образуют правую тройку. Если* $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$, *то тройка векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *– левая.*

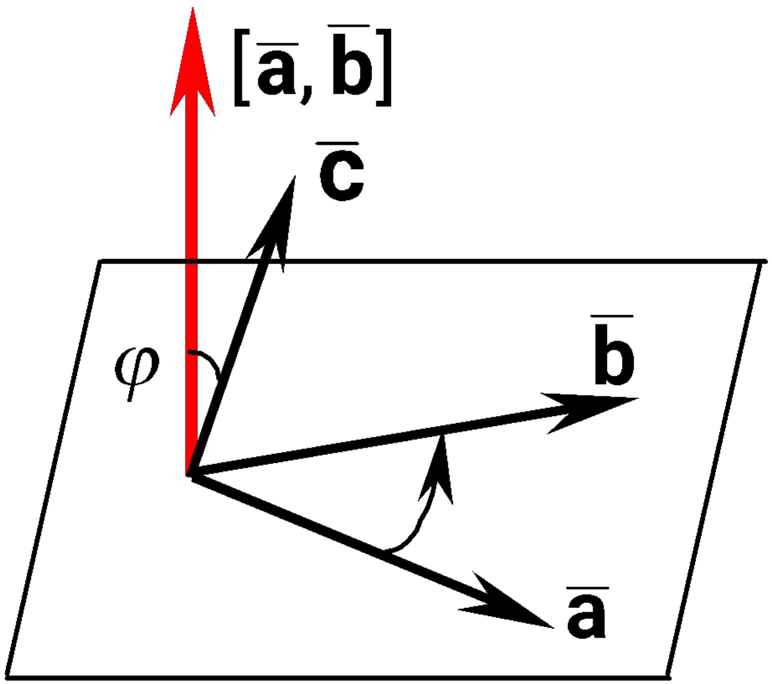


рис. 3

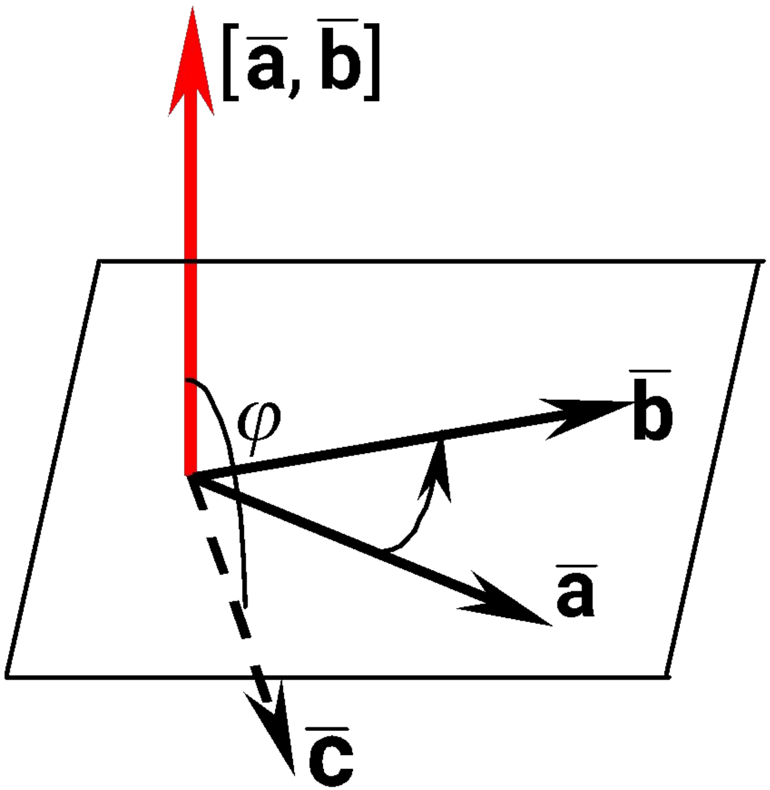


рис.4

7) *Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах* (Геометрический смысл смешанного произведения).

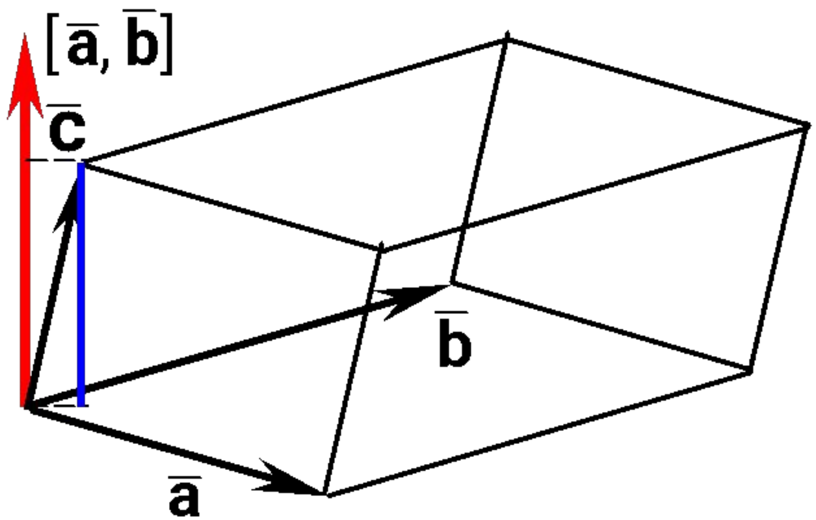


рис. 5

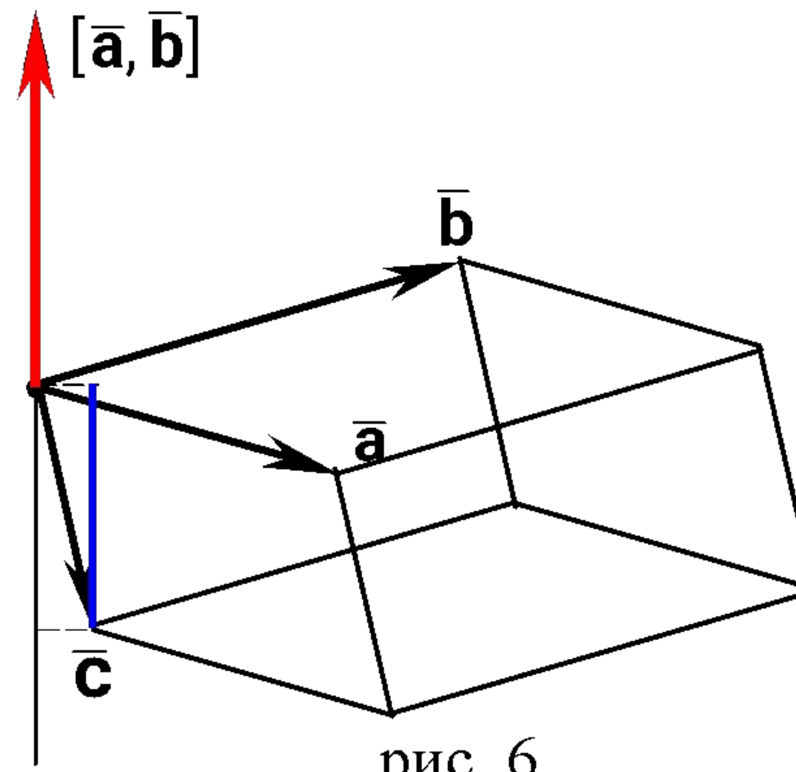


рис. 6

8) (Следствие свойства 7). *Объем пирамиды, построенной на векторах* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *равен* $\frac{1}{6}$ *модуля их смешанного произведения.*

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *имеют координаты*: $\bar{\mathbf{a}}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}}=\{b_x;b_y;b_z\}$, $\bar{\mathbf{c}}=\{c_x;c_y;c_z\}$, *то*

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$