

Теоретическая механика

Задачи

Динамика

Динамика материальной точки

§ 27. Дифференциальные уравнения движения

Криволинейное движение

Дом. задание :

27.42, 27.43

N27.42.

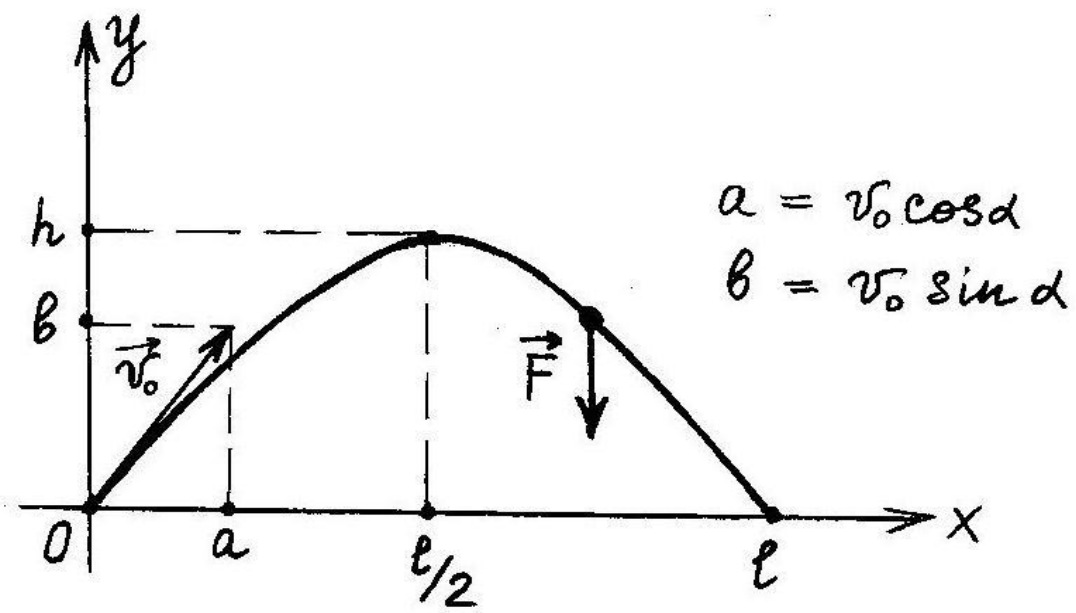
Дано:

$$l_{\max} = L,$$

$$\alpha_0 = 30^\circ$$

$$l(\alpha_0) - ?$$

$$h(\alpha_0) - ?$$



$$1) F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \Rightarrow w = \frac{1}{m} F = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha, \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases} \quad (1)$$

— уравнение движения

$$(x_0 = y_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases} \quad (1)$$

— ур-я движе-
ния снаряда

($x_0 = y_0 = 0$)

2) l - ? $y = 0 \Rightarrow \frac{gT}{2} = v_0 \sin \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2)$$

— время полета

$$l(\alpha) = x(T) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (3)$$

— дальность (в
зависимости от
угла α)

3) $L = l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ (4) — достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Пусть $\alpha = \alpha_0 = 30^\circ$. Тогда

$$\underline{l(30^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} L.}$$

4) $\underline{h - ?}$ $t_1 = t_{\text{верн.}} = \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{h = y(t_1) = y\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}} \quad (5)$$

— время-
та (в
зависимо-
сти от α)

$$\underline{h(30^\circ) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{L}{8}.}$$

N27.43. Дано: α , l_α и $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Найти l_β .

1) и 2) — как в N27.42.

(*) $l_\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ — зависит только от нач. скорости v_0 и угла α .

3) $\beta = \alpha/2$

$$\begin{aligned} l_\beta &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g \cdot 2 \cos \alpha} \cdot \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \underbrace{\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha}_{l_\alpha} = \frac{l_\alpha}{2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Подготовка к контрольной работе № 2

1. «Определение сил по заданному движению» :
26.1, 26.2, 26.3, 26.11
2. «Дифф. уравнения движения : прямолинейное движение» :
27.2, 27.4, 27.5, 27.7, 27.31
3. «Дифф. уравнения движения : криволинейное движение» :
27.40 – 27.43
4. **Задача.** Материальная точка массы 2 кг движется относительно ИСО из точки $A(3, 0, 0)$ под действием трех сил: $F_1 = (2, 4, 6)^T$, $F_2 = (4 \cos t, 4 \sin t, 0)^T$ и $F_3 = (0, 0, 2e^t)^T$.
Найти уравнения движения точки и ее скорость в момент времени $t_1 = 1$ (сек), если известно, что в начальный момент скорость точки равна $(0, 2, 0)^T$.

Задача 4

II закон Ньютона: $m\ddot{z} = F_1 + F_2 + F_3$,

т.е. $2 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ 4 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^t \end{pmatrix},$

или
$$\begin{cases} \ddot{x} = 1 + 2 \cos t, \\ \ddot{y} = 2 + 2 \sin t, \\ \ddot{z} = 3 + e^t. \end{cases}$$

Имеем: $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 2, \dot{z}(0) = 0;$
 $x(0) = 3, y(0) = z(0) = 0.$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t + 2\sin t + C_1, \\ \dot{y}(t) = 2t - 2\cos t + C_2, \\ \dot{z}(t) = 3t + e^t + C_3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= C_1 = 0, \\ \dot{y}(0) &= C_2 - 2 = 2, \\ \dot{z}(0) &= 1 + C_3 = 0; \end{aligned}$$

$$C_1 = 0, C_2 = -4, C_3 = -1$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} t + 2\sin t \\ 2t - 2\cos t + 4 \\ 3t + e^t - 1 \end{pmatrix} \text{ — скорость точки}$$

$$v(1) = \begin{pmatrix} 1 + 2\sin 1 \\ 6 - 2\cos 1 \\ 2 + e \end{pmatrix}$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - 2 \cos t + D_1 \\ t^2 - 2 \sin t + 4t + D_2 \\ \frac{3}{2} t^2 + e^t - t + D_3 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = D_1 - 2 = 3,$$

$$y(0) = D_2 = 0,$$

$$z(0) = 1 + D_3 = 0$$

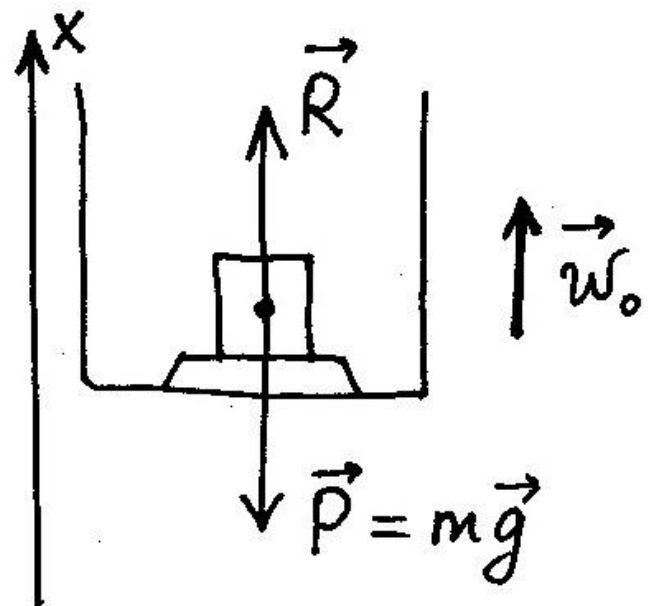
$$D_1 = 5, D_2 = 0, D_3 = -1$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + 5 - 2 \cos t \\ t^2 + 4t - 2 \sin t \\ \frac{3}{2} t^2 - t - 1 + e^t \end{pmatrix}$$

— закон движения
точки

N 26.11.

$P_1 = 50 \text{ Н}; P_2 = 51 \text{ Н}; w_0 - ?$



\vec{N} - сила давления груза на весы;

$\vec{R} = -\vec{N}$ - реакция опоры.

На груз действуют две силы:

$\vec{P} = m\vec{g}$ и \vec{R} .

II закон Ньютона : $m\vec{w}_0 = m\vec{g} + \vec{R}$.

Ox : $m\ddot{x} = |R| - mg = |N| - mg$.

1-й случай : $|N| = P_1 ; w_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mg = |N| = P_1 \Rightarrow m = \frac{50}{g} \text{ (кг)}$

II закон Ньютона: $m\vec{w}_0 = m\vec{g} + \vec{R}$.

$$\text{Ох: } m\ddot{x} = |R| - mg = |N| - mg.$$

1-й случай: $|N| = P_1$; $w_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{mg = |N| = P_1} \Rightarrow \underline{m = \frac{50}{g} \text{ (кг)}}$$

2-й случай: $|N| = P_2$; $m w_x = m \ddot{x} =$

$$= |N| - mg = P_2 - P_1 = 1 \text{ (Н)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{w_x = \frac{1}{m} = \frac{g}{50} = \frac{9,8}{50} \approx 0,196 \text{ (м/с}^2\text{)}}$$

