РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение полных квадратных уравнений

(общая формула)

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Удобно домножить ур-е на 2

$2x^2-x-1=0$

$D=1-4\cdot(-1)\cdot 2$

$D=9$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}$

$x_1=1, \quad x_2=-\frac{1}{2}$

верно

неверно

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне (4000 лет назад)

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}, \qquad x^2 - x = 14\frac{1}{2}.$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$$

$$x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$$

$$3x^2 - x - 24 = 0$$

$$D = 289$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{8}{3}$$

верно

неверно

Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$ax^2 + bx = c$, $a > 0$. (1)

В уравнении (1) коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача 2

«Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась

А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что автор знал о двузначности корней квадратных уравнений.

Соответствующее задаче 2 уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

,

Бхаскара пишет:

$x^2 - 64x = -768$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем:

x^2 - б4x + 32^2 = -768 + 1024,

$(x - 32)^2 = 256$,

$x - 32 = \pm 16$,

$x_1 = 16$, $x_2 = 48$.

БРАХМАГУПТА

индийский ученый (VII в.)

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$x^2-2,5x+1=0$

$x^2-2,5x+1=0$

$2x^2-5x+2=0$

$D=9$

$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}$

верно

неверно

Квадратные уравнения у Аль-Хорезми.

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1. «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
2. «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
3. «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
4. «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.
5. «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
6. «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.

Для Аль-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Его решение не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида Аль-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства. Приведем пример.

Задача 3. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

$2x^2=5+3x$

$2x^2-17x-9=0$

Ответ: $-1, 2\frac{1}{2}$

Ответ: $9, -\frac{1}{2}$

СОВЕТ: РАСКРЫТЬ СКОБКИ, ПЕРЕНЕСТИ СЛАГАЕМЫЕ В ОДНУ СТОРОНУ, ПРИВЕСТИ ПОДОБНЫЕ.

$$(x+1)(x+2)=(2x-1)(2x-10)$$

Ответ: $8, \frac{1}{3}$

СОВЕТ: ПРИВЕСТИ ДРОБИ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ, ПРИВЕСТИ ПОДОБНЫЕ

$$\frac{5(X^2-1)}{4}=\frac{X}{6}-2$$

Ответ: действительных корней нет

$$\frac{x-3}{4}+\frac{2x+3}{6}=\frac{x^2-11}{12}$$

$$(x+3)(x-2)+(x+2)^2=3x+10$$

Ответ: -1, 8

Ответ: $\pm\sqrt{6}$

$x^2+6x+8=0$

$3x^2-8x+5=0$

Ответ: -4; -2

Ответ: 1, $1\frac{2}{3}$

$$x^2-6x-6=0$$

КОРНИ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ НУЖНО УПРОСТИТЬ, ТАК ИХ УДОБНЕЕ ОЦЕНИВАТЬ.

$$x^2-6x-6=0$$

$$D=12$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2(3\pm\sqrt{3})}{2}$$

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}$$

Ответ: $3\pm\sqrt{3}$

Ответ: $3\pm\sqrt{3}$

ФОРМУЛА ВТОРОГО ЧЕТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a},$$

где $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

- Последние три уравнения имеют общую особенность. Второй коэффициент – четный. Для таких случаев есть облегченная формула нахождения корней.
- Зная эту формулу последнее уравнение решается быстрее.

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ, ИСПОЛЬЗУЯ ФОРМУЛУ ВТОРОГО ЧЕТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

$8x^2-10x+3=0$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 8 \cdot 3$$

$$\frac{D}{4} = 1$$

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{8}$

$x_1=\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $x_2=\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$

$8x^2-10x+3=0$

$D=100-4 \cdot 8 \cdot 3$

$D=4$

$x_{1,2}=\frac{10\pm2}{16}$