

# Градиентные методы

Выполнил студент группы 467  
Павлов Валерий

# Метод градиентного спуска

Суть метода градиентного спуска заключается в том, что в каждой  $i$ -й точке алгоритма вычисляется градиент  $[a = z_1 - 2 * z_2 + z_3]$ , определяются направление движения и шаг. Так как за один шаг невозможно достичь точки минимума целевой функции, то строится последовательность точек, переходя от одной точки к другой, достигают точки минимума. В точке минимума все элементы вектора градиента принимают значение нуля. Для определения координат очередной точки используют направление, противоположное градиенту (антиградиент), а размер шага можно определить по различным правилам.

# Два основных класса правил определения размера шага

С фиксированным коэффициентом изменения размера шага и с оптимальным подбором размера шага. Каждый класс правил содержит несколько конкретных методов поиска минимума. Для случая с фиксированным коэффициентом изменения размера шага координаты точки на  $k$ -м шаге определяются по формуле:  $x^k = x^{(k-1)} - Sk$

Знак минус определяет направление движения против градиента (при поиске минимума целевой функции). Размер шага  $Sk$  на  $k$ -й итерации определяется по формуле:  $Sk = dk * \text{grad } f(x^{(k-1)})$  где  $dk$  — коэффициент изменения шага, как правило, меньше единицы.

# Алгоритм метода градиентного спуска с использованием фиксированного коэффициента изменения шага

1. Задать координаты стартовой точки  $x_i^0$
2. Задать значения  $p, d_k, \varepsilon$ .
3. Вычислить значение целевой функции, значения первых производных в текущей точке по каждой координате и определить антиградиент
4. Определить, достигнут ли минимум целевой функции, т. е. выполняется ли неравенство  $|\text{grad } f(x^k)| < \varepsilon$ , Если «да», то перейти к шагу 8. Если «нет», то перейти к шагу 5

# Алгоритм метода градиентного спуска с использованием фиксированного коэффициента изменения шага

5. Вычислить размер шага по формуле  $S_k = d_k * \text{grad } f(x^{(k-1)})$
6. *Определить, надо ли уменьшать коэффициент изменения шага. Если неравенство  $|f(x^{k-1}) - f(x^k)| \geq d_k |-\text{grad } f(x^{k-1})|$  не выполняется, то коэффициент изменения шага уменьшают в 2 раза,  $d_k = 0,5 d(k-1)$  и переходят к шагу 5. Если неравенство выполняется, то переходят к шагу 7*
7. Определить координаты текущей точки по формуле  $S_k = d_k * \text{grad } f(x^{(k-1)})$  и перейти к шагу 3.
8. Вывод координат точки минимума  $x$  и значения целевой функции в точке минимума  $f(x)$ . Останов алгоритма.

# Пример

Найти минимум целевой функции  $F(x) = x_1^2 + 4x_2^2$  при  $\varepsilon \leq 0,01$  и  $d_0 = 1$ .

Сначала решим задачу при постоянном значении коэффициента (табл. 6.1) изменения шага  $d = 1$  (пункт 6 алгоритма не выполняется).

Таблица 6.1

Итера- ция	$x_1$	$x_2$	$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}$	$\text{grad } f(x^k)$	Размер шага		$d$
						$x_1$	$x_2$	
0	2	2	4	16	16,5	-0,24	-0,97	1
1	1,76	1,03	3,52	8,24	8,96	-0,39	-0,92	1
2	1,37	0,11	2,74	0,88	2,88	-0,95	-0,31	1
3	0,42	-0,2	0,84	-1,6	1,8	-0,46	-0,89	1
4	-0,04	-1,09	-0,08	-8,72	8,72	0,009	1	1
5	-0,03	-0,09	-0,06	-0,72	0,72	0,08	1	1
6	0,05	-0,91	0,1	-7,28	7,28	-0,01	-1	1
7	0,04	-1,91	0,08	-15,28	15,28	-0,01	1	1
8	0,03	-0,91	0,06	-7,28	7,28	-0,01	1	1
9	0,02	0,09	0,04	0,72	0,72	-0,06	-1	1
10	-0,04	-0,91	-0,08	-7,28	7,28	0,01	1	1

# Решение

Начиная с четвертой итерации, вокруг точки минимума целевой функции начинаются колебания, слабо сходящиеся к точке минимума.

Использование п. 6 алгоритма приводит к точке минимума целевой функции по асимптотическому закону, т. е. градиент функции плавно убывает (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Итерация	$x_1$	$x_2$	$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}$	$\text{grad} f(x^k)$	Значение целевой функции		$d$	Размер шага	
						текущее	предшествующее		$x_1$	$x_2$
0	2	2	4	16	16,5	20	0	1	-0,24	-0,97
1	1,76	1,03	3,52	8,24	8,96	7,34	20	1	-0,39	-0,92
2	1,37	0,11	2,74	0,88	2,88	1,93	7,34	1	-0,95	-0,31
3	0,42	-0,2	0,84	-1,6	1,81	0,34	1,93			
<b>Нарушено условие (3.40), для итерации 3</b>								0,5	-0,48	-0,16
3	0,89	-0,05	1,78	0,4	1,82	0,8	1,93	0,5	-0,49	-0,11
4	0,4	-0,16	0,8	-1,28	1,51	0,26	0,8			
<b>Нарушено условие (3.40), для итерации 4</b>								0,25	-0,25	-0,06
4	0,64	-0,11	1,28	-0,88	1,55	0,45	0,8			
<b>Нарушено условие (3.40), для итерации 4</b>								0,125	-0,12	-0,03
4	0,77	-0,08	1,54	-0,64	1,67	0,62	0,8	0,125	-0,12	0,05
5	0,65	-0,03	1,3	-0,24	1,32	0,42	0,62	0,125	-0,12	0,02
6	0,53	-0,01	1,06	-0,08	1,06	0,28	0,42	0,125	-0,13	0,01
7	0,4	0	0,16	0	0,16	0,03	0,28	0,125	-0,31	0
8	0,09	0	0,18	0	0,18	0,01	0,03			
<b>Нарушено условие (3.40), для итерации 8</b>								0,0625	-0,16	0
8	0,24	0	0,48	0	0,24	0,06	0,03	0,0625	-0,06	0
9	0,18	0	0,36	0	0,18	0,03	0,06	0,0625	-0,06	0
10	0,12	0	0,24	0	0,12	0,01	0,03	0,0625	-0,13	0
11	-0,01	0	-0,02	0	0,01	0,01	0,01			

# Главный минус метода градиентного спуска

Процесс поиска минимума целевой функции может закончиться в стационарной точке (точка перегиба, седловая точка). Для выхода из стационарной точки необходимо предпринять дополнительные меры — определить тип точки (стационарная или нет) и в случае положительного ответа применить любой не градиентный метод для выхода из стационарной точки, и далее продолжить поиск методом градиентного спуска.