Тангенс суммы и разности аргументов

Упражнение:

- Упростите выражения:

$$\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha = \cos 4\alpha$$

$$\frac{\sin 37° \cdot \cos 8° + \cos 37° \cdot \sin 8°}{\sin 30° \cdot \cos 15° + \sin 15° \cdot \cos 30°} = 1$$

$$tg\,(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\dfrac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\dfrac{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=$$

$tg\ x$ $tg\ y$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y}+\dfrac{\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\dfrac{\cos x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y}-\dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$$

$tg\ x$ $tg\ y$

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z,x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$$

$$tg\,(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y}=\frac{\dfrac{\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\dfrac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=$$

$tg\ x$ $tg\ y$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y}-\dfrac{\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\dfrac{\cos x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y}+\dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$$

$tg\ x$ $tg\ y$

$$tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z,x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$$

Пример:

- Вычислить $tg\ 15°$.

$$tg(x-y)=\frac{tg\ x-tg\ y}{1+tg\ x\cdot tg\ y}$$

Решение:

$15°=45°-30°$

$$tg\ 15°=\frac{tg\ 45°-tg\ 30°}{1+tg\ 45°\cdot tg\ 30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{9-3}=\frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{6}=2-\sqrt{3}$$

Ответ: $tg\ 15°=2-\sqrt{3}$

Пример:

- Вычислить $tg\ 75°$.

$$tg(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y}$$

Решение:

$75° = 45° + 30°$

$$tg\ 75° = \frac{tg\ 45° + tg\ 30°}{1 - tg\ 45° \cdot tg\ 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6\left(2+\sqrt{3}\right)}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

Ответ: $tg\ 75° = 2 + \sqrt{3}$

Пример:

- Упростить выражение:

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$$

$$\frac{tg\,2{,}22+tg\,0{,}91}{1-tg\,2{,}22\cdot tg\,0{,}91}.$$

Решение:

$$\frac{tg\,0{,}22+tg\,0{,}91}{1-tg\,0{,}22\cdot tg\,0{,}91}=tg\,(0{,}22+0{,}91)=tg\,3{,}13$$

Ответ: $tg\,3{,}13$.

Пример:

- Упростить выражение

$$\frac{tg\,(45° + \alpha) - tg\,\alpha}{1 + tg\,(45° + \alpha) \cdot tg\,\alpha}.$$

$$tg(x - y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$$

Решение:

$$\frac{tg\,(45° + \alpha) - tg\,\alpha}{1 + tg\,(45° + \alpha) \cdot tg\,\alpha} = tg\,(45° + \alpha - \alpha) = tg\,45° = 1$$

Пример:

$$tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$$

- Доказать тождество

$$\frac{1 - tg\,2\alpha}{1 + tg\,2\alpha} = tg\,(45° - 2\alpha)$$

Доказательство:

$$tg\,(45° - 2\alpha) = \frac{tg\,45° - tg\,2\alpha}{1 + tg\,45° \cdot tg\,2\alpha} = \frac{1 - tg\,2\alpha}{1 + tg\,2\alpha}$$

Пример:

Решить уравнение

- $$\frac{tg\,5x - tg\,3x}{1 + tg\,3x \cdot tg\,5x} = \sqrt{3}.$$

$$tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$$

Решение:

$$\frac{tg\,5x - tg\,3x}{1 + tg\,3x \cdot tg\,5x} = tg\,(5x - 3x) = tg\,2x$$

$$tg\,2x = \sqrt{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример:

$$tg\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\ \alpha$$

- Вычислить $tg\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $ctg\ \alpha=\frac{4}{3}$.

Решение:

$$tg\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{tg\ \frac{\pi}{2}+tg\ \alpha}{1-tg\ \frac{\pi}{2}\cdot tg\ \alpha}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\ \alpha=-\frac{4}{3}$$

Ответ: $tg\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{4}{3}$.

Пример:

- Вычислить $tg\ (\alpha + \beta)$, если $tg\ \alpha = \frac{1}{2}, tg\ \beta = \frac{1}{3}$.

Решение:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

Ответ: 1.

Пример:

$$tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$$

$$tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1$$

- Вычислить $ctg\,\alpha$, если $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=0{,}2.$

Решение:

$$tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\frac{\pi}{4}}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\frac{\pi}{4}}=\frac{tg\,\alpha-1}{1+tg\,\alpha}$$

$$\frac{tg\,\alpha-1}{1+tg\,\alpha}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{5tg\,\alpha-5-(1+tg\,\alpha)}{5+5tg\,\alpha}=0\Rightarrow\frac{4tg\,\alpha-6}{5(1+tg\,\alpha)}=0$$

$$\begin{cases}4tg\,\alpha-6=0\\ tg\,\alpha\neq-1\end{cases}\Rightarrow 4tg\,\alpha=6\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{3}{2}=1{,}5\Rightarrow ctg\,\alpha=\frac{2}{3}$$

Ответ: $ctg\,\alpha=\frac{2}{3}$.