Решение простейших логарифмических уравнений

Понятие логарифма

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ степень a^p с произвольным действительным показателем p определена и равна некоторому положительному действительному числу b: $a^p = b$. Показатель p степени a^p называется логарифмом этой степени с основанием a.

Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a: $log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x.

$$a^{log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = log_a x$$

Свойства логарифмов

- 1) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$, то

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

- Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$, то

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(-x) + \log_a(-y).$$

- 2) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

- Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(-x) - \log_a(-y).$$

Во всех равенствах

$$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, x > 0, y > 0 .$$

3) $\log_a(x^c) = c\log_a x$;

4) $\log_{a^d}(x^c) = \frac{c}{d}\log_a x$;

5) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

6) $\log_a x \cdot \log_b y = \log_b x \cdot \log_a y$;

7) $\log_{\sqrt[n]{a}} x = n\log_a x$;

8) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$;

9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

10) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $a^{(\log_a x)^2} = x^{\log_a x}$;

11) $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$, $y \neq 1$;

12) $\log_a(xy) + \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x^2\right)$, если $xy > 0$;

13) $\log_a\left(x^k\right) = k\log_a|x|$, если k –чётное число,

$\log_a\left(x^k\right) = k\log_a(x)$, если k –нечётное число.

Десятичный логарифм и натуральный логарифм

- Десятичным логарифмом называется логарифм, если его основание равно 10.
- Обозначение десятичного логарифма: $\boldsymbol{lg\,x}$.

- Натуральным логарифмом называется логарифм, если его основание равно числу $\boldsymbol{e}$.
- Обозначение натурального логарифма: $\boldsymbol{ln\,x}$.

Простейшие логарифмические уравнения

- Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида:
- $\log_a x = b; \log_a f(x) = b; \log_a f(x) = \log_a u(x)$,
- где a и b – действительные числа,
- $a \neq 1;\ a > 0;\ \ f(x),\ u(x)$ - выражения, содержащие x.

Методы решения простейших логарифмических уравнений

1. По определению логарифма.

- А) Если $a \neq 1$, $a > 0$, то уравнение $log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

- В) Уравнение $log_{a(x)} f(x) = b$ равносильно системе

$$\begin{cases} a(x)^b = f(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

2. Метод потенцирования.

- А) Если $a \neq 1, \quad a > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a u(x)$
- равносильно системе $\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0). \end{cases}$

- В) Уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} u(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0, \quad a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - u(x)}{a(x) - 1} = 0, \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0. \end{cases}$$