

## **1.4. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом**

*1.4.1. Электрические и магнитные дипольные моменты и энергия взаимодействия микрочастиц с внешним полем*

Рассмотрим взаимодействие электромагнитного поля с элементами вещества – атомами, молекулами или ионами. Такое взаимодействие возможно благодаря наличию у них дипольных, квадрупольных и мультипольных электрических и магнитных моментов. Для нейтрального атома, содержащего ядро и отрицательно заряженный электрон, дипольный момент равен:

$$\vec{p} = e\vec{r}, \quad (1.4.1)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, соединяющий электрон с ядром,  $e$  - элементарный электрический заряд. Для более сложного атома полный дипольный момент может быть получен как векторная сумма частных моментов.

Если рассматриваемый атом находится во внешнем поле с электрической напряженностью  $\vec{E}$ , то энергия взаимодействия диполя с полем равна:

$$V = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.4.2)$$

При квантовомеханическом рассмотрении величины  $\vec{p}$ ,  $\vec{r}$  и  $E$  нужно заменить операторами. Мы будем пользоваться полуклассическим приближением, когда поле рассматривается классически (не квантуется):

$$V = -\vec{p} \cdot \vec{r} E \quad , \quad (1.4.3)$$

где  $\vec{p} = e\vec{r}$  - оператор электродипольного момента. В энергетическом представлении  $\vec{p}$  изображается матрицей с элементами:

$$p_m^n = \int \psi_m^* e\vec{r} \psi_n dV \quad , \quad (1.4.4)$$

где  $\psi_m^n(r, t)$  - собственные функции оператора энергии.

Обычно  $\psi_m$ , входящие в (1.4.4), обладают определенной четностью, то функции есть каждая из этих функций либо четная, либо нечетная функция координат. Тогда

при  $m=n$  произведение  $\psi_m^* \psi_m = |\psi_m|^2$  является четной функцией, а  $\psi_m^* r \psi_m$  - нечетная функция. Поэтому диагональные матричные элементы оператора

электродипольного момента равны нулю:

$$\overset{\Gamma}{P}_{mm} = 0 . \quad (1.4.5)$$

Кроме того, те из  $\overset{\Gamma}{P}_{mn}$ , которые соответствуют состояниям с одинаковой четностью, также равны нулю. Это означает, что *электродипольные переходы между состояниями с одинаковой четностью запрещены.*

Если атом (частица) обладает магнитным моментом, то он также будет взаимодействовать с электромагнитным полем:

$$\overset{V}{V} = -\overset{\mu}{\mu} \cdot \overset{H}{H} , \quad (1.4.6)$$

за счет составляющей  $\overset{\Gamma}{H}$ .

Самым сильным является электродипольное взаимодействие. Если же  $\overset{\Gamma}{P}_m = 0$ , то следует учесть магнитодипольное взаимодействие. При  $\overset{\Gamma}{P}_{mn} = 0$  и  $\overset{\mu}{\mu}_{mn} = 0$  взаимодействие частицы с полем является слабым и осуществляется за счет *квадрупольных и мультипольных электрических моментов.*

## 1.4.2. Двухуровневая система микрочастиц во внешнем поле. Основные уравнения. Вероятности индуцированных переходов

Рассмотрим ансамбль микрочастиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле. Полагаем, что у данных частиц имеется пара энергетических уровней 1 и 2, расстояние между которыми  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$  соответствует частоте  $\omega_{21} \cong \omega$ , близкой к частоте приложенного поля  $\omega$ . Тогда наличием всех прочих уровней можно пренебречь и рассматривать данную систему как двухуровневую.

Нас интересует мощность  $P$ , поглощаемая веществом, которая, как было показано ранее, равна:

$$P = \hbar \omega W(N_1 - N_2) \quad (1.4.7)$$

Здесь нам неизвестны как вероятность индуцированных переходов, так и населенности уровней  $N_1$  и  $N_2$ . Последние можно выразить через диагональные элементы матрицы плотности:

$$N_k = \rho_{kk} N, \text{ где } N - \text{ полное число частиц.}$$

Таким образом, **расчет поглощаемой мощности связан с решением уравнений для матрицы плотности.**

В случае двухуровневой системы общие уравнения для  $\rho$  существенно упрощаются. Найдем вначале матричные элементы оператора энергии взаимодействия микрочастицы с полем:

$$\begin{aligned} V_{11} &= -\rho_{11} \cdot \vec{E} = 0, V_{22} = -\rho_{22} \cdot \vec{E} = 0, \\ V_{12} &= -\rho_{12} \cdot \vec{E}, V_{21} = -\rho_{21} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

С учетом этого запишем уравнения для матричных элементов  $\rho_{11}$  и  $\rho_{12}$ :

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \Gamma_{21}\rho_{22} - \Gamma_{12}\rho_{11} + \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}V_{21} - V_{12}\rho_{21}), \quad (1.4.9)$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} + \frac{\rho_{12}}{\tau} - i\omega_{21} = \frac{i}{\hbar}(\rho_{11}V_{12} - V_{12}\rho_{22}), \quad (1.4.10)$$

где учтено:  $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau$ .

Уравнения (1.4.9) и (1.4.10) содержат 4 неизвестных,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$ . Поэтому к ним нужно добавить еще 2 уравнения. В качестве таковых можно использовать общее соотношение,  $Sp \hat{\rho} = 1$ , которое в данном случае имеет вид:

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1, \quad (1.4.11)$$

и учесть условие самосопряженности матрицы  $\hat{\rho}$ :

$$\rho_{12}^* = \rho_{21}. \quad (1.4.12)$$

Система уравнений (1.4.9)-(1.4.12) позволяет определить все элементы матрицы плотности.

Для ее решения выпишем в явном виде значения  $V_{ik}$ . Для поля  $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t)$  имеем:

$$V_{12} = -\frac{p_{12} \cdot \vec{E}_m}{2} [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]. \quad (1.4.13)$$

Входящая в уравнение (1.4.10) вынуждающая сила в этом случае содержит две составляющие, пропорциональные  $\exp(i\omega t)$  и  $\exp(-i\omega t)$ . Поскольку собственные колебания системы, определяемые левой частью (однородным уравнением), происходят по закону  $\exp(-t/\tau)\exp(i\omega_{21}t)$ , то основной вклад в решение даст «резонансное» слагаемое в (1.4.13), пропорциональное  $\exp(i\omega t)$ :

$$V_{12} \cong -\frac{p_{12} \cdot \vec{E}_m}{2} \exp(i\omega t). \quad (1.4.14)$$

Из условия самосопряженности находим:

$$V_{21} = V_{12}^* = -\frac{\overline{p}_{12} \cdot E_m}{2} \exp(-i\omega t) \quad (1.4.15)$$

Отыскивая решение в виде  $\rho_{12} = \rho_{12}^m \exp(i\omega t)$ , где  $\rho_{12}^m$  - медленно меняющаяся функция времени, так что ее производной можно пренебречь, из (1.4.10) находим:

$$\rho_{12}^m = -\frac{(i/\overline{\tau})(\overline{p}_{12} \cdot E_m/2)}{1/\tau + i(\omega - \omega_{21})} (\rho_{11} - \rho_{22}). \quad (1.4.16)$$

Учитывая соотношение  $[(-i/\hbar)V_{12}\rho_{21}] = [(i/\hbar)V_{21}\rho_{12}]^*$ , найдем последний член в правой части уравнения (1.4.9):

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}V_{21} - V_{12}\rho_{21}) &= -\frac{1}{4} \left| \frac{\hbar}{\hbar} \mathbf{p}_{12} \cdot \mathbf{E}_m \right|^2 \left[ \frac{1}{1/\tau + i(\omega - \omega_{21})} + \frac{1}{1/\tau - i(\omega - \omega_{21})} \right] (\rho_{11} - \rho_{22}) \\ &= -\frac{(1/2\tau) \left| (\mathbf{p}_{12} \cdot \mathbf{E}_m) / \hbar \right|^2}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2} (\rho_{11} - \rho_{22}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (1.4.9) и вводя обозначения

$$W = \frac{|\Lambda|^2 / (2\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}, \quad \Lambda = \frac{\hbar}{\hbar} \mathbf{p}_{12} \cdot \mathbf{E}_m, \quad (1.4.17)$$

окончательно получаем:

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = (\Gamma_{21} + W)\rho_{22} - (\Gamma_{12} + W)\rho_{11}. \quad (1.4.18)$$

Рассмотрим физический смысл членов, входящих в данное уравнение.

В левой части определяется относительная скорость изменения числа частиц на нижнем уровне с энергией  $E_1$ . Первый член в правой части характеризует приток частиц на данный уровень. Тепловые (безызлучательные) переходы имеют вероятность  $\Gamma_{21}$ , а величина  $W$  определяет, очевидно, вероятность индуцированного перехода одной частицы в единицу времени.

Второе слагаемое в правой части (1.4.18), характеризующее отток частиц с уровня 1, показывает, что вероятности индуцированного перехода сверху вниз и снизу вверх одинаковы, и в случае двухуровневой системы частиц определяются формулами (1.4.17).

Определим мощность, поглощаемую двухуровневой системой, для стационарного случая, когда  $d\rho_{11}/dt = d\rho_{22}/dt = 0$ . Из (1.4.18) получаем:

$$(\Gamma_{21} + W)\rho_{22} - (\Gamma_{12} + W)\rho_{11} = 0. \quad (1.4.19)$$

Используя соотношение (1.4.11), находим:

$$\rho_{11} = \frac{\Gamma_{21} + W}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}, \quad \rho_{22} = \frac{\Gamma_{12} + W}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}, \quad (1.4.20)$$

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{\Gamma_{21} - \Gamma_{12}}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}. \quad (1.4.21)$$

Перепишем уравнение детального равновесия в виде

$$\frac{\rho_{11}^e}{\Gamma_{21}} = \frac{\rho_{22}^e}{\Gamma_{12}} = T_1, \quad (1.4.22)$$

где величина  $T_1$  имеет размерность времени и характеризует скорость релаксации за счет взаимодействия с термостатом, вместо (1.4.21) можно получить:

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{1}{1 + 2WT_1} (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e). \quad (1.4.23)$$

Таким образом, поглощаемая двухуровневой системой мощность может быть найдена в виде:

$$\begin{aligned} P &= \hbar \omega_{21} W (N_1 - N_2) = \hbar \omega_{21} W N (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) = \\ &= \hbar \omega_{21} N \frac{W}{1 + 2WT_1} (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e). \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

### 1.4.3. Анализ поглощения электромагнитного поля двухуровневой системой. Эффект насыщения

Применим общее выражение (1.4.24) для анализа двух предельных случаев.

1. Слабое поле, вероятность индуцированного перехода  $W \ll 1/T_1$ . Тогда слагаемым  $2WT_1$  в знаменателе можно пренебречь. Подставляя в (1.4.24) для этого случая  $W$  из формулы (1.4.17), получаем:

$$P = \hbar\omega_{21}N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{|\Lambda|^2/(2\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}. \quad (1.4.25)$$

Отсюда видно, что мощность, поглощаемая от поля веществом, пропорциональна квадрату напряженности внешнего поля, а значит, пропорциональна его мощности.

Такая связь характерна для линейной электродинамики, когда параметры среды не зависят от величины поля.

Частотная зависимость поглощаемой мощности описывается функцией

$$g(\omega) = \frac{1/(\pi\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}, \quad (1.4.26)$$

называемой кривой Лоренца, и совпадающей по виду с резонансной кривой простого колебательного контура (рис. 1.4.1).

Максимум поглощения достигается при частоте внешнего поля  $\omega = \omega_{21}$ . Полуширина кривой  $\Delta\omega$  по уровню 0.5 равна  $\Delta\omega = 1/\tau$ .

Отсюда следует, что время релаксации  $\tau$  можно определить экспериментально, если снять частотную зависимость поглощаемой мощности.

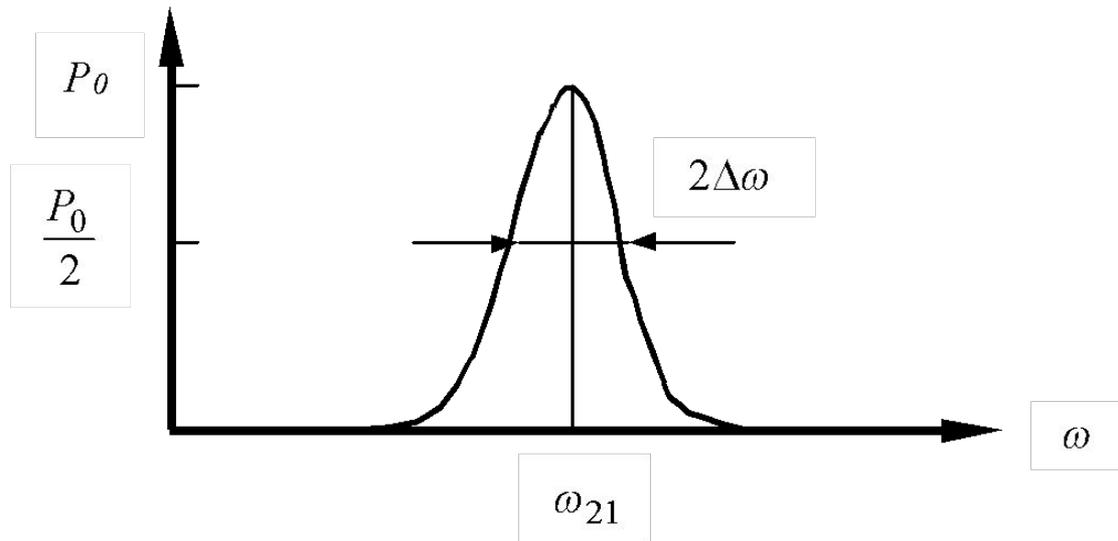


Рис.1.4.1. Частотная зависимость поглощаемой мощности.

2. Сильное поле, вероятность индуцированного перехода  $W$  сравнима с вероятностью переходов под действием термостата  $1/T_1$ .

В этом случае из (1.4.24) и (1.4.17) получаем:

$$P = \hbar \omega_{21} N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{\frac{1}{2\tau} |\Lambda|^2}{\frac{1}{\tau^2} + (\omega - \omega_{21})^2 + \frac{T_1}{\tau} |\Lambda|^2}. \quad (1.4.27)$$

Отсюда видно, что связь между мощностями внешнего поля и поглощаемой веществом нелинейна. Когда внешнее поле очень велико ( $|\Lambda|^2 \rightarrow \infty$ ), мощность поглощения не зависит от внешнего поля и равна:

$$P_{sat} = \hbar \omega_{21} N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{1}{2T_1}. \quad (1.4.28)$$

Величина предельной мощности поглощения определяется скоростью, с которой энергия передается термостату,  $1/T_1$ .

График зависимости поглощаемой мощности от мощности падающего излучения  $P_{inp} \sim |E_m|^2 \sim |\Lambda|^2$  схематично изображен на рис. 1.4.2.

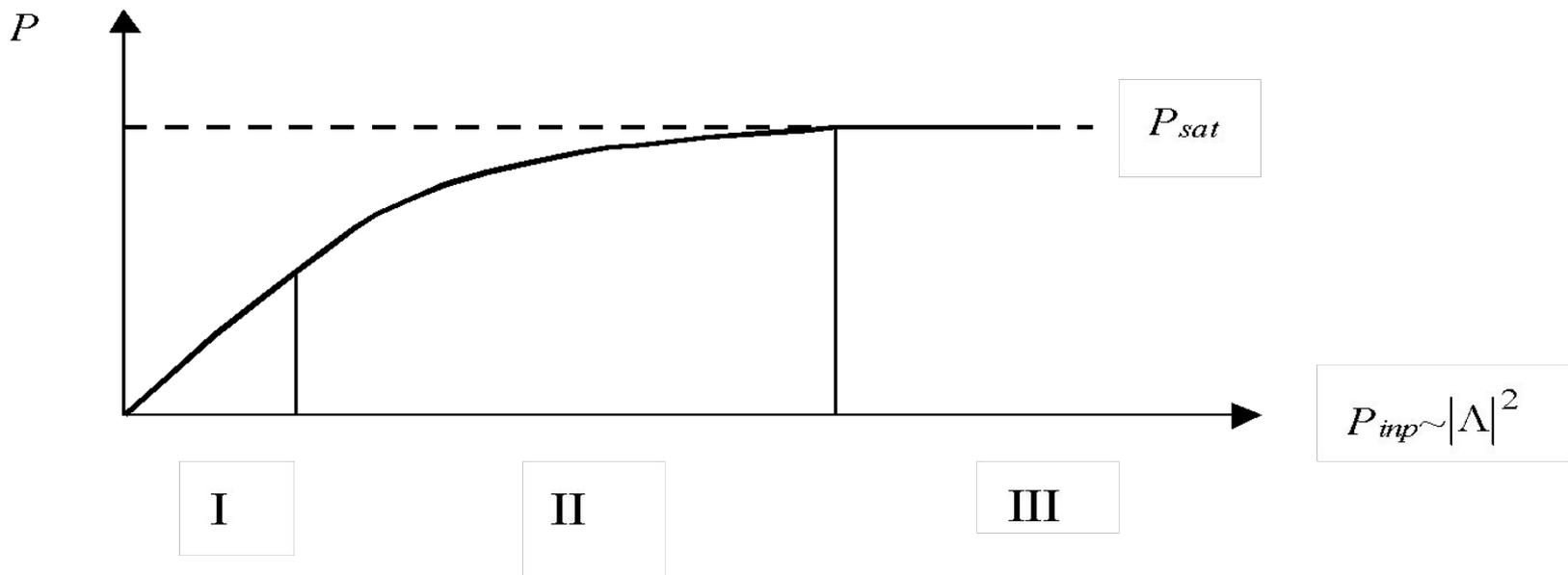


Рис. 1.4.2. Зависимость мощности, поглощаемой веществом, от входной мощности.

Область I на этом рисунке соответствует линейной электродинамике (слабое поле). В области III поглощенная веществом мощность не зависит от входной мощности. Говорят, что **вещество в этой области просветляется – почти все излучение проходит через образец.**

Нелинейность зависимости поглощаемой мощности от падающей мощности называют эффектом насыщения.

Физической причиной насыщения является выравнивание населенностей уровней,  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$ , при увеличении вероятности индуцированных переходов  $W$ . Действительно, из (1.4.23) получаем:

$$\rho_{11} - \rho_{22} \cong (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{1}{2WT_1}, \quad (1.4.29)$$

и видим, что разность населенностей уровней  $(\rho_{11} - \rho_{22}) \rightarrow 0$  при  $WT_1 \rightarrow \infty$ .

## 1.4.4. Спонтанные переходы

В предыдущих разделах 1.4.2 и 1.4.3 учитывались только индуцированные и тепловые (безизлучательные) переходы. Кроме них, существуют спонтанные (самопроизвольные) переходы с верхнего на нижний уровень. При  $E_m > E_n$  имеем:

$$A_{mn} \neq 0, A_{nm} = 0, \quad (1.4.30)$$

где  $A_{mn}$  - вероятность спонтанного перехода одной частицы в единицу времени с  $m$ -го на  $n$ -й уровень. Следует напомнить, что при спонтанном переходе излучается поле с произвольной фазой, поляризацией и направлением распространения во всем телесном угле.

Частотная зависимость мощности спонтанного излучения определяется функцией  $g(\omega) = (1/\pi\tau) / [1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2]$ , где  $\tau = 1/A_{21}$ .

Вероятность спонтанного перехода была найдена А. Эйнштейном из анализа формулы Планка для равновесного излучения абсолютно черного тела в виде (в системе единиц СГСЕ):

$$A_{21} = \frac{8\pi\nu_{21}^3}{c^3} B, \quad (1.4.31)$$

где  $B = [(4\pi^2)/(3\hbar^2)] |p_{12}|^2$  - коэффициент Эйнштейна и  $\nu_{21}$  - частота перехода в Гц.

Отметим, что  $A_{21} \sim \nu_{21}^3$ . Поэтому очень велико значение спонтанных переходов для оптического диапазона.

Для безизлучательных переходов вероятность  $\Gamma_{mn}$  велика при  $\hbar\omega_{mn} \sim kT$ . Это означает, что их роль является определяющей в СВЧ-диапазоне, где  $\Gamma_{mn} \gg A_{mn}$ , и мала в оптическом диапазоне, где  $\Gamma_{mn} \ll A_{mn}$ .

## 1.4.5. Балансные уравнения

Одна из задач квантовой электроники – нахождение распределения числа частиц по энергетическим уровням. Её строгое решение может быть проведено на основе общих уравнений для матрицы плотности и электромагнитного поля, когда учитывается динамика как диагональных, так и недиагональных элементов.

Существует приближенный подход, когда **используются балансные (кинетические) уравнения для числа частиц на энергетических уровнях.**

Вспомним в качестве примера уравнения для двухуровневой схемы:

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \Gamma_{21}\rho_{22} - \Gamma_{12}\rho_{11} + W\rho_{22} - W\rho_{11}.$$

Здесь не учтены спонтанные переходы и наличие других уровней. В общем случае запишем следующее **балансное (кинетическое) уравнение:**

$$\frac{dN_m}{dt} = \sum_{n \neq m} (\Gamma_{nm}N_n - \Gamma_{mn}N_m) + \sum_{n \neq m} W_{nm}(N_n - N_m) + \sum_{n \neq m} (A_{nm}N_n - A_{mn}N_m).$$

Данная методика, основанная на уравнениях баланса, будет использоваться нами довольно часто при анализе энергетических характеристик лазеров.