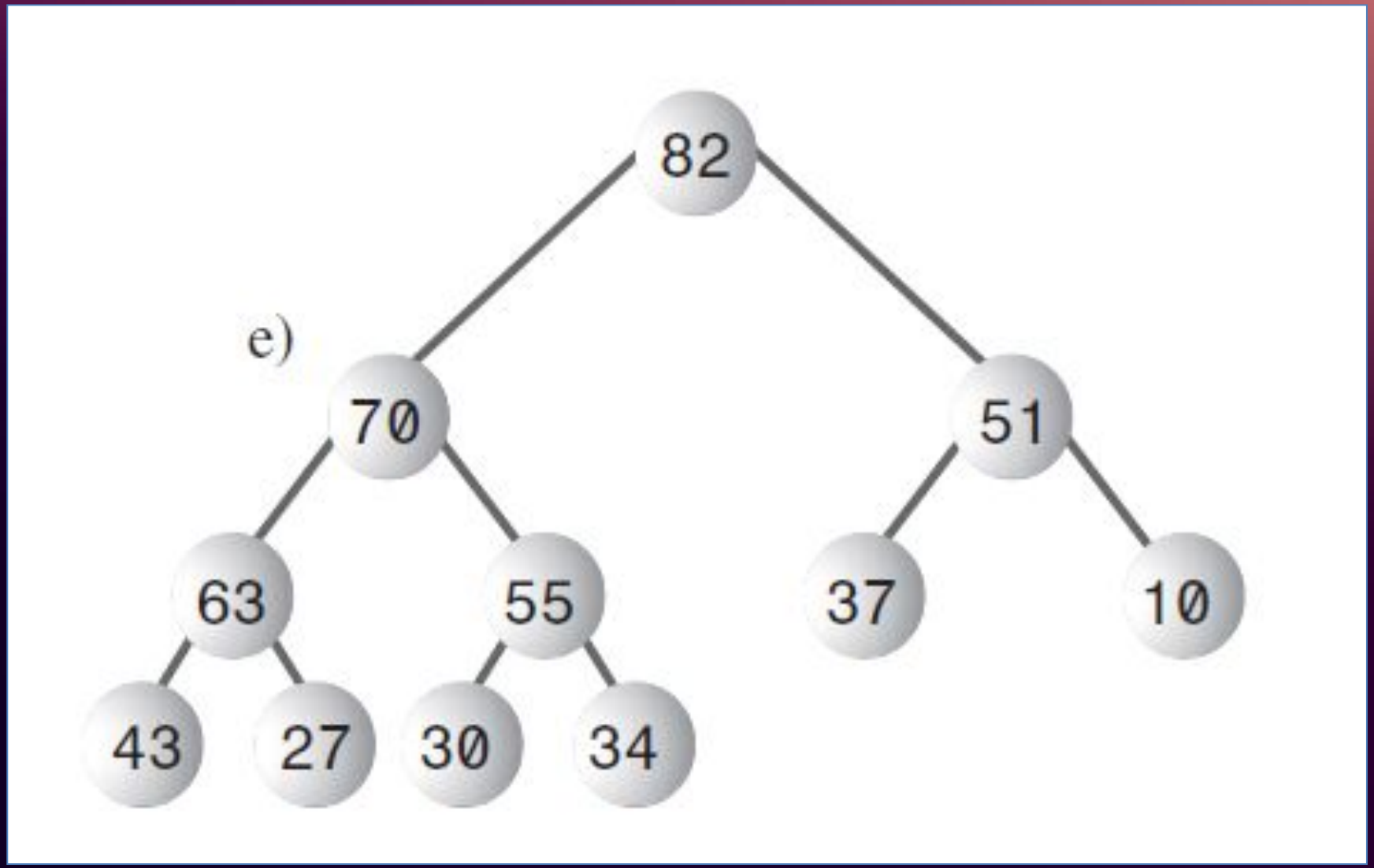
Пирамиды и пирамидальная сортировка

Сальников Вадим ИВБО-06-21

Пирамида

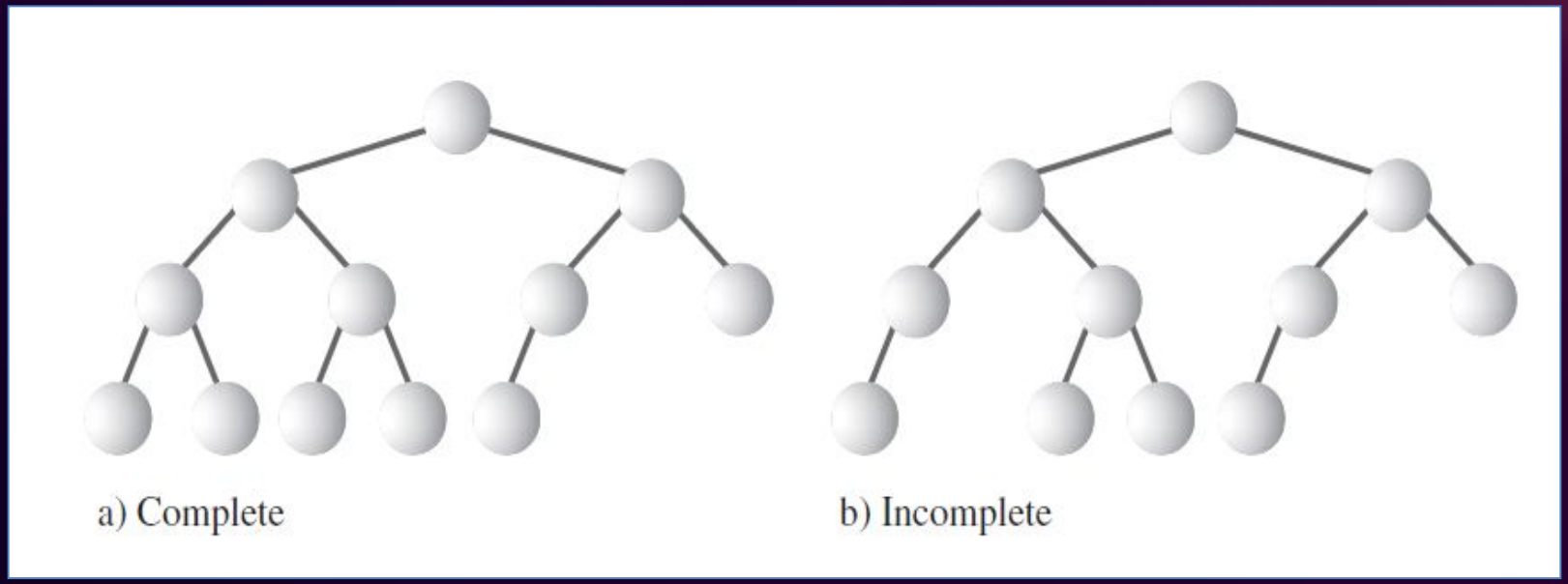
- Пирамида является структурой данных, позволяющей обратиться к наибольшему элементу за время O(1), а также позволяющая удалять наибольший элемент и вставлять новый элемент за время $O(\log_2 N)$.
- *Пирамида* – это разновидность двоичного дерева, обладающего двумя свойствами. Первое свойство заключается в том, что любой узел такого дерева больше либо равен любого из своих потомков.
- Это свойство называется свойством *слабой упорядоченности*.

Пример пирамиды



Свойство полноты

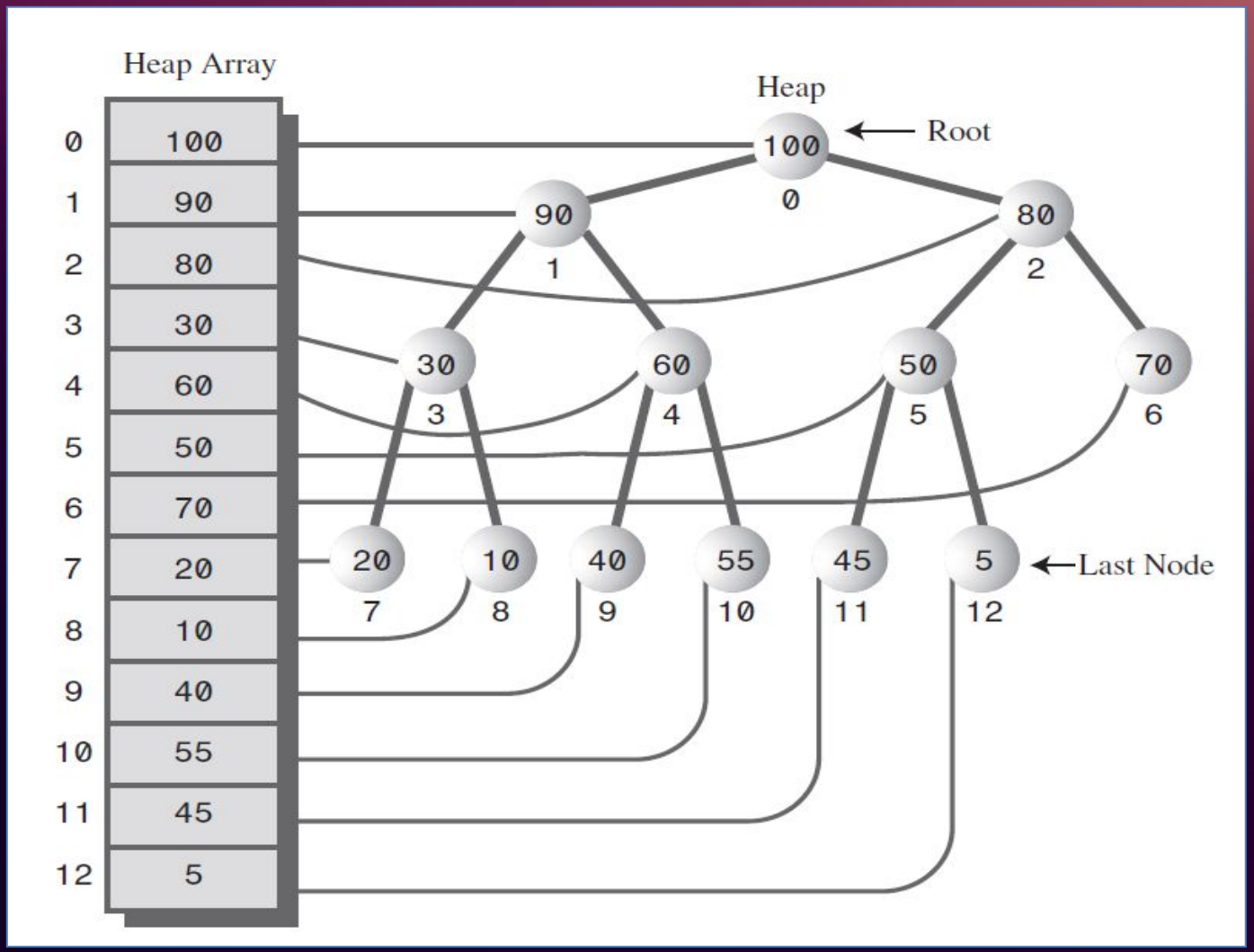
- Второе свойство называется свойством полноты и заключается в том, что это дерево содержит все возможные узлы при заполнении слева направо и сверху вниз.
- На рисунке слева изображено полное (Complete) дерево, а справа – неполное (Incomplete).



Пирамида на основе массива

- Наиболее простой реализацией пирамиды является реализация на основе массива.
- При этом каждому узлу дерева соответствует конкретная ячейка массива.
- Именно свойство полноты позволяет осуществить такое отображение (обеспечить отсутствие «дыр» в массиве).

Пример пирамиды на основе массива



Связь между деревом и массивом

- Благодаря такому отображению для любого узла можно определить индексы его родителя и потомков. Пусть i – индекс некоторого узла в массиве, тогда
  - индекс родителя равен (i-1) /2;
  - индекс левого потомка равен 2*i+1;
  - индекс левого потомка равен 2*i+2.
- В качестве упражнения проверьте эти формулы для приведённого рисунка.

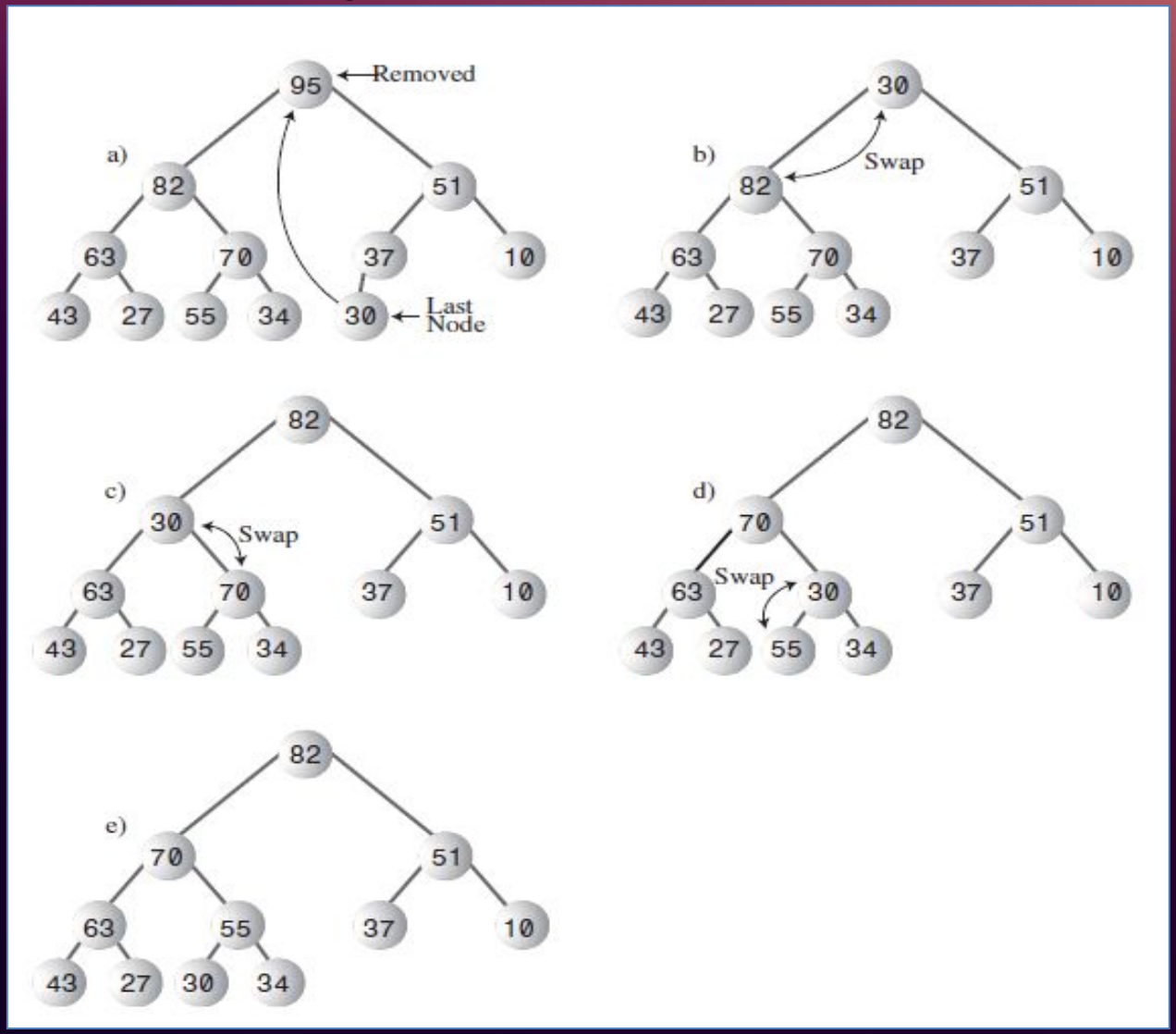
Реализация операций

- Рассмотрим теперь, как реализуются операции взятия наибольшего элемента, вставки нового элемента и удаления наибольшего.
- Для обращения к наибольшему элементу пирамиды достаточно взять первый элемент массива.
- Операции вставки нового элемента и удаления наибольшего элемента несколько сложнее, то осуществляются быстро – за время $O(\log_2 N)$.

Удаление вершины

- Поскольку удаляется первый элемент, то в массиве образуется «дыра», и возникает необходимость исключить её, восстановив тем самым полноту дерева. Для этого существует следующий алгоритм:
  - переместить последний узел в корень (на место удаленного);
  - смещать его вниз до тех пор, пока он не окажется на подходящем месте (меньше либо равен родители и больше либо равен потомков).
- При смещении вниз, очевидно, существуют две альтернативы: влево или вправо. Так вот смещать следует в сторону большего из этих двух узлов, чтобы не нарушить слабую упорядоченность.

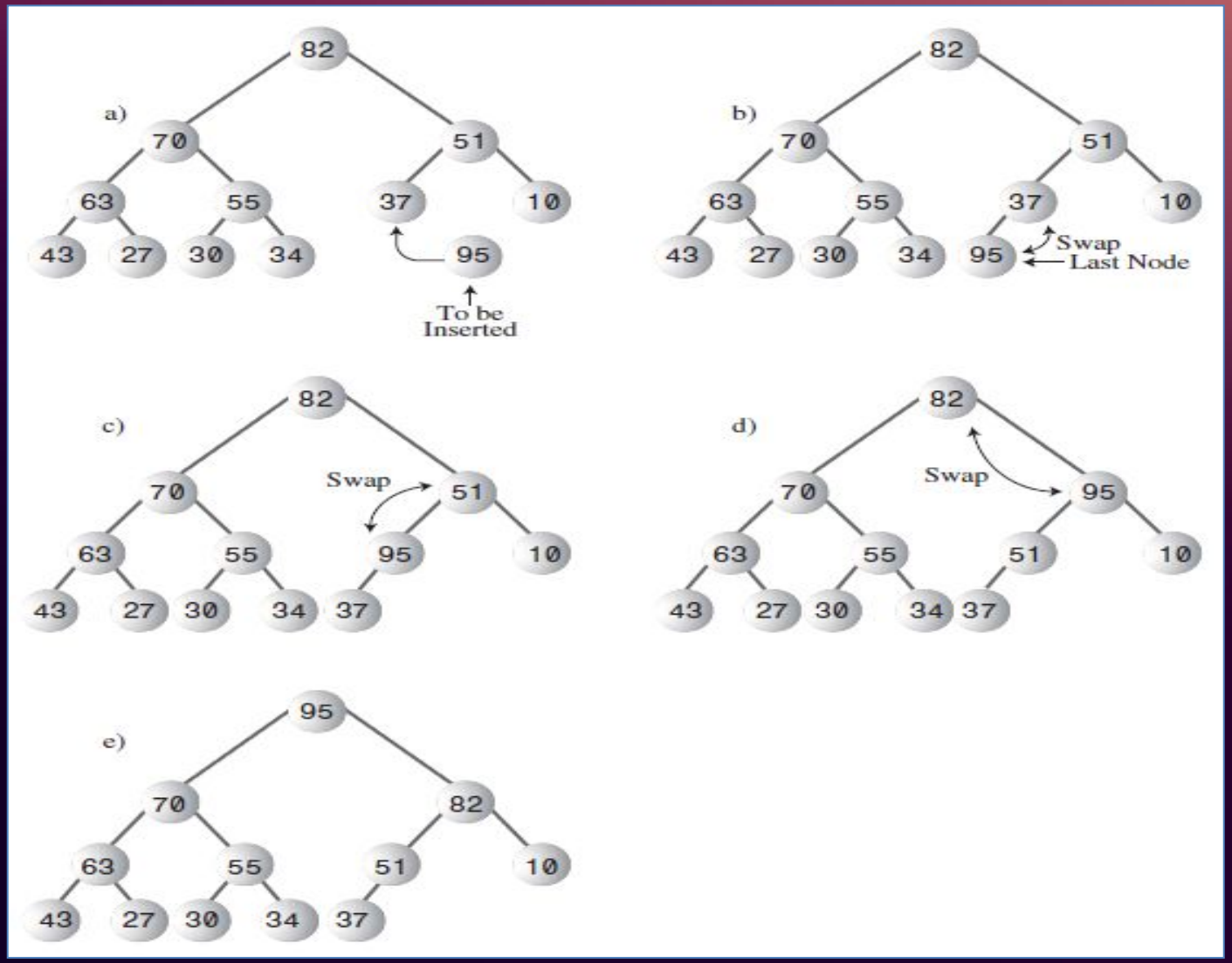
Пример удаления вершины



Добавление нового элемента

- Рассмотрим теперь операцию добавления нового элемента.
- Сложность этой процедуры состоит в том, что после добавления должна быть сохранена слабая упорядоченность дерева.
- Алгоритм добавления похож на алгоритм удаления и состоит из следующих шагов:
  - поместить новый узел на последнюю позицию;
  - смещать его вверх до тех пор, пока он не станет меньше либо равен своего родителя.

Пример добавления



Пирамидальная сортировка

- С использованием пирамиды можно осуществить сортировку массива по следующему алгоритму.

```
Цикл i=0..N-1
   Добавить(Массив[i]);

Цикл i=0..N-1
 Массив[i] := Вершина Пирамиды;
 Удалить Вершину Пирамиды;
```

- Массив окажется отсортированным в силу того, что вершина пирамиды – это её наибольший элемент. Этот алгоритм напоминает сортировку методом прямого выбора, но с более эффективным поиском максимального элемента.

Реализация пирамиды на C++

```
//Вместимость пирамиды
const int size = 20;
int pyramid[size];
//Текущее число элементов в пирамиде
int n;
void swap(int i, int j) {
  int t=pyramid[i];
  pyramid[i]=pyramid[j];
  pyramid[j]=t;
}
```

Реализация добавления

```
void add(int x) {
  n++; int i=n-1; pyramid[i] = x;
  while (i>0 && pyramid[i]>pyramid[(i-1)/2]) {
    swap(i,(i-1)/2);
    i = (i-1)/2;
  }
}
```

```
void init() {
  n=0;
  for (int i=0; i<20; i++) {
    add(rand()%100);
  }
}
```

Тестирование программы

```
void displayPyramid() {
  for (int i=0; i<n; i++) {
    cout.width(3);
    cout << pyramid[i];
  }
  cout << endl;
}

int main() {
  init();
  displayPyramidTree();
  system("pause");
  return 0;
}
```

```
95 91 78 81 64 69 61 67 58 41  5 24 45 27 34  0 62 42 27 36
```

Реализация вывода пирамиды в виде дерева

```
void displayPyramidTree() {
      int k=1;
      int j=0;
      int sp=pow(2.0,log2(n));
      for (int l=0; l<log2(n)+1; l++) {
            makeSpaces(sp);
            for (int i=0; i<k; i++) {
                  cout.width(2);
                  cout << pyramid[j];
                  makeSpaces(sp*2-1);
                  j++;
                  if (j==n-1) {
                        break;
                  }
            }
            k*=2;
            sp/=2;
            cout << endl << endl;
      }
}
```

Вывод пирамиды в виде дерева

Реализация удаления вершины

```
int top() { return pyramid[0]; }

void pop() {
  pyramid[0] = pyramid[n-1];
  n--;
  int i=0;
  while (i<n && (2*i+1<n && pyramid[i]<pyramid[2*i+1]
        || 2*i+1<n && pyramid[i]<pyramid[2*i+2])) {
    if (2*i+2<n && pyramid[2*i+1]<pyramid[2*i+2]) {
      swap(i,2*i+2);
      i = 2*i+2;
    } else {
      swap(i,2*i+1);
      i = 2*i+1;
    }
  }
}
```

Реализация пирамидальной сортировки - 1

```
int mas[size];
int n_mas = 20;

void initArray() {
      for (int i=0; i<20; i++) {
            mas[i] = rand()%100;
      }
      n_mas = 20;
}

void displayArray() {
      for (int i=0; i<n_mas; i++) {
            cout.width(3);
            cout << mas[i];
      }
      cout << endl;
}
```

Реализация пирамидальной сортировки - 2

```
void sort() {
      for (int i=0; i<n_mas; i++) {
            add(mas[i]);
      }
      for (int i=0; i<n_mas; i++) {
            mas[i] = top();
            pop();
      }
}
int main() {
      initPyramid(); initArray(); sort();
      displayArray(); return 0;
}
```

Всем спасибо за внимание!
:p