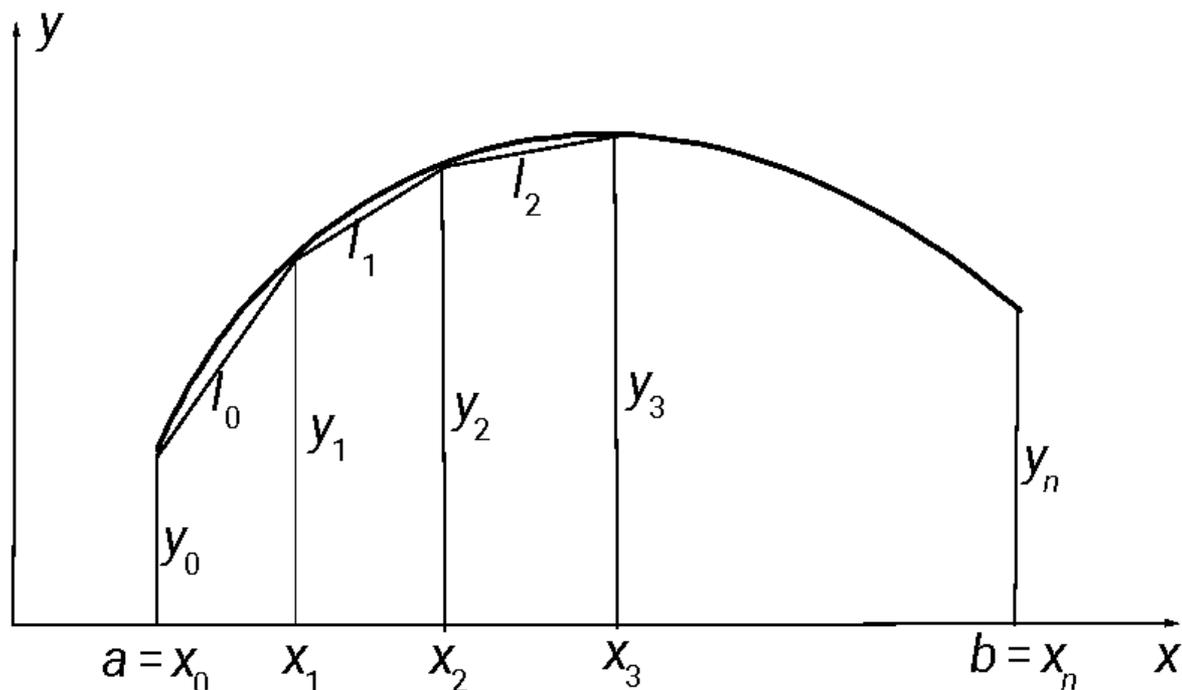


Здравствуйте!

Лекция №11

Площадь боковой поверхности тела вращения.



Пусть на плоскости OXY задана кривая в параметрической форме

Считается, что значение параметра соответствует точке A (начало кривой), а значение параметра T – точке B (концу кривой). Будем считать, что эта кривая вращается около оси OY .

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Построим на каждом кусочке усеченный конус с радиусами оснований y_i и y_{i+1} и образующей l_i . Тогда площадь боковой поверхности этого конуса будет равна $2\pi \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} l_i$, а суммарная площадь боковых поверхностей всех этих конусов будет равна $Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} l_i$. За определение величины площади боковой поверхности тела вращения примем величину $P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Q$. Вычислим ее.

1. Рассмотрим величину $Q_1 = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) l_i$, где $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$. Тогда

мы имеем

$$\begin{aligned} |Q - Q_1| &\leq 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} - y(\tau_i) \right| l_i \leq \\ &\leq \pi \left(\sum_{i=0}^{n-1} |y(t_i) - y(\tau_i)| l_i + \sum_{i=0}^{n-1} |y(\tau_i) - y(t_{i+1})| l_i \right). \end{aligned}$$

Но, в силу равномерной непрерывности функции $y(t)$ разности $|y(t_i) - y(\tau_i)|$ и $|y(\tau_i) - y(t_{i+1})|$ могут быть сделаны меньше любого

наперед заданного ε . Но тогда $|Q - Q_1| \leq 2\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leq 2\pi\varepsilon s_0$, где s_0 -

длина дуги нашей кривой. Поэтому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (Q - Q_1) = 0$ и $P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Q_1$.

2. Пусть $Q_2 = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) \Delta s_i$, где Δs_i — длина дуги кусочка кривой. В силу непрерывности кривой значения $y(t)$ ограничены по модулю величиной M . Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 0 \leq |Q_2 - Q_1| &\leq 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} |y(\tau_i)| (\Delta s_i - l_i) \leq \\
 &\leq 2\pi M \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta s_i - l_i) = 2\pi M \left(s_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i \right) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

так как $s_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} l_i$. Поэтому $P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Q_2 = 2\pi \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) \Delta s_i$.

3. Пользуясь первой теоремой о среднем, получаем

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau = \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i.$$

Так как ранее величина τ_i в $y(\tau_i)$ была произвольной, то возьмем ее такой же, как и в выражении для Δs_i . Тогда

$$Q_2 = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i$$

и предельный переход дает

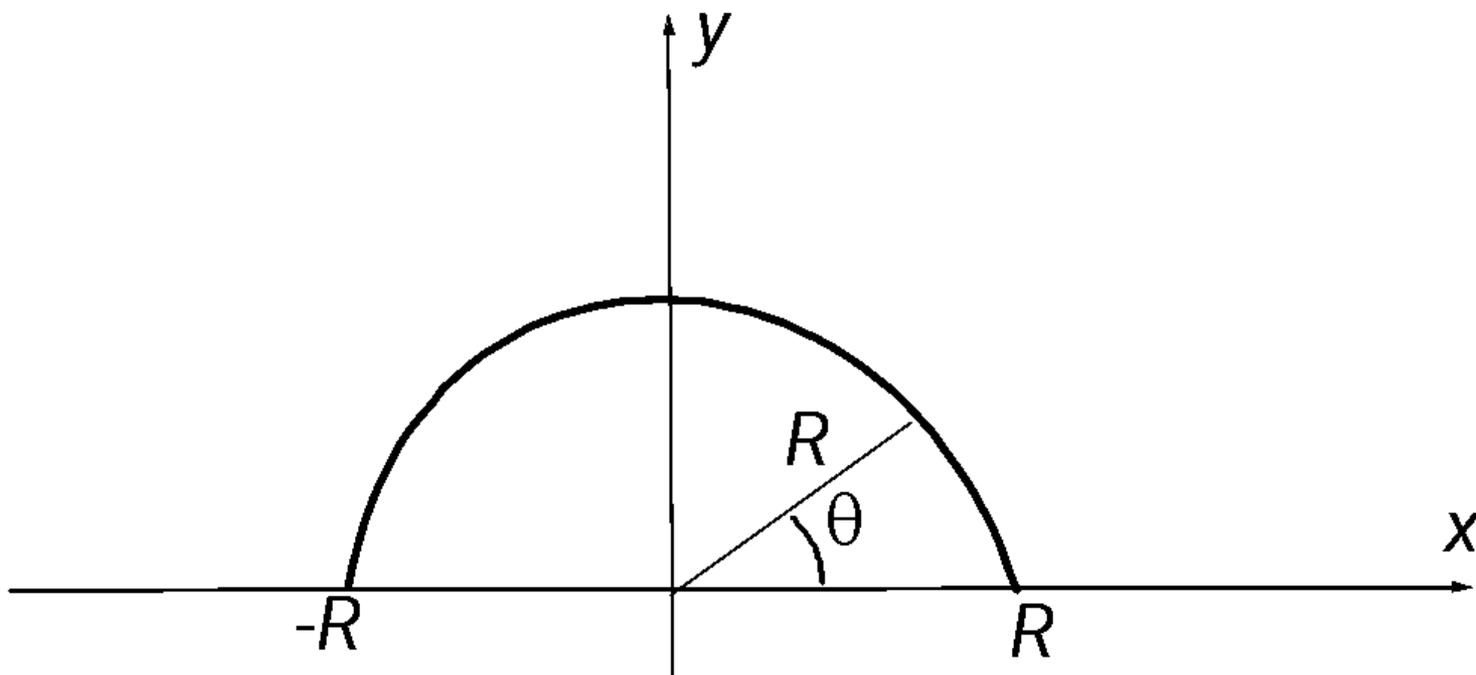
$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Q_2 = 2\pi \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Частный случай

В частном случае явного задания функции $y = f(x)$ получаем

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пример. Площадь поверхности шара



Как уже говорилось выше, шар получается вращением полуокружности около оси OX . Параметрически полуокружность задается уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Тогда $x' = -R \sin \theta$, $y' = R \cos \theta$, $(x')^2 + (y')^2 = R^2$ и мы получаем

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi R^2.$$

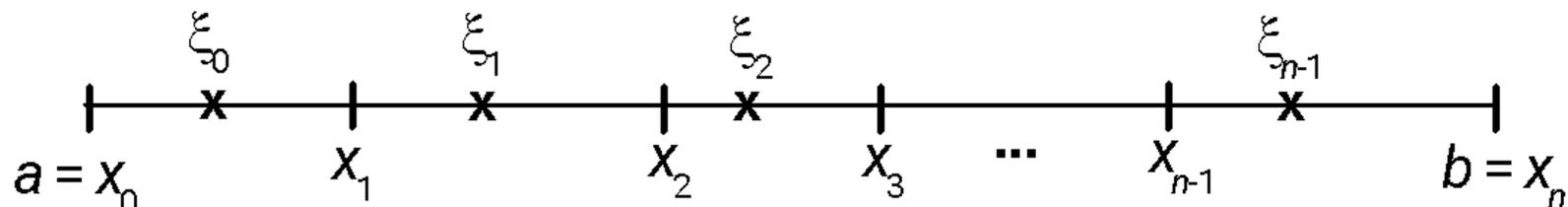
Интеграл Стильтьеса

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы **две** функции $f(x)$ и $g(x)$.

Проделаем ту же процедуру, что и при построении интеграла Римана.

1. Разбиение отрезка на кусочки

Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на части (кусочки) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ (см. рис.). Для единообразия, точку a будем называть точкой x_0 , а точку b – точкой x_n .



Пусть

и

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) \quad \lambda = \max_i$$

2. Составление интегральной суммы

На каждом из кусочков $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем **произвольно** некоторую точку ξ_i (она называется **средней точкой**, хотя, конечно, не обязательно лежит на середине кусочка), так что $[x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}]$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i),$$

которая называется **интегральной суммой**.

3. Предельный переход

Наконец, перейдем к пределу $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$.

Определение. Если $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ существует и не зависит от

а) способа разбиения отрезка $[a, b]$ на кусочки и от

б) способа выбора средней точки,

то он называется **интегралом Стильеса** от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dg(x):$$

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Свойства интеграла Стильтьеса

Приведем основные свойства интеграла Стильтьеса. Часть из них приведем без доказательства.

$$1. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

$$2. \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x)$$

$$3. \int_a^b (k_1 f(x)) d(k_2 g(x)) = k_1 k_2 \int_a^b f(x) dg(x)$$

$$4. \text{Если } \exists \int_a^b f(x) dg(x), \text{ то } \forall c \in [a, b] \exists \int_a^c f(x) dg(x) \text{ и } \int_c^b f(x) dg(x) \text{ и}$$

верно равенство

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x).$$

Заметим, что обратное вообще говоря неверно, то есть из существования $\int_a^c f(x)dg(x)$ и $\int_c^b f(x)dg(x)$ **не следует** существование $\int_a^b f(x)dg(x)$.

5. Основное неравенство.

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и введем величину

$$\mathbf{V}_a^b g(x) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям отрезка $[a, b]$ на части. Эта величина называется **вариацией** (или **изменением**) функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $\mathbf{V}_a^b g(x) < +\infty$, то функция $g(x)$ называется функцией с ограниченной вариацией.

Основное неравенство на интеграл Стильтеса имеет вид

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \bigvee_a^b g(x)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \bigvee_a^b g(x). \end{aligned}$$

Переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$ получим требуемое неравенство.

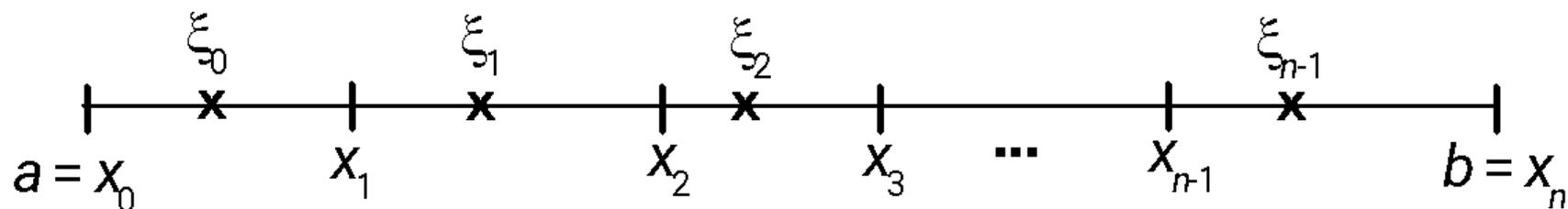
6. Интегрирование по частям.

Если $\exists \int_a^b f(x)dg(x)$, то $\exists \int_a^b g(x)df(x)$ и верно соотношение

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g(x)df(x).$$

Доказательство.

Вновь вернемся к рисунку, показывающему разбиение отрезка $[a, b]$ на кусочки



Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) = \\ &= f(\xi_0)g(x_1) + f(\xi_1)g(x_2) + f(\xi_2)g(x_3) + \dots + f(\xi_{n-1})g(x_n) - \\ &- f(\xi_0)g(x_0) - f(\xi_1)g(x_1) - f(\xi_2)g(x_2) - \dots - f(\xi_{n-1})g(x_{n-1}) - \\ &- f(x_n)g(x_n) + f(b)g(b) + f(x_0)g(x_0) - f(a)g(a) = \end{aligned}$$

(перепорформируем суммы так, чтобы сомножители вида $g(x_i)$ стояли перед скобками)

$$\begin{aligned} &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \\ &- g(x_0)[f(\xi_0) - f(x_0)] - g(x_1)[f(\xi_1) - f(\xi_0)] - g(x_2)[f(\xi_2) - f(\xi_1)] - \\ &- \dots - g(x_n)[f(x_n) - f(\xi_{n-1})] = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma', \end{aligned}$$

где σ' есть интегральная сумма для $\int_a^b g(x)df(x)$, в которой точки ξ_i стали точками разбиения, а точки x_i – средними точками.

Теперь после предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$ и получим требуемое соотношение

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g(x)df(x).$$

Вычисление интеграла Стильеса

Рассмотрим частные случаи.

1. $\exists g'(x)$.

Тогда $g(x_{i+1}) - g(x_i) = g'(\xi_i)\Delta x_i$. Возьмем в интегральной сумме у $f(\xi_i)$ именно то ξ_i , которое получилось по формуле Лагранжа.

Тогда имеем

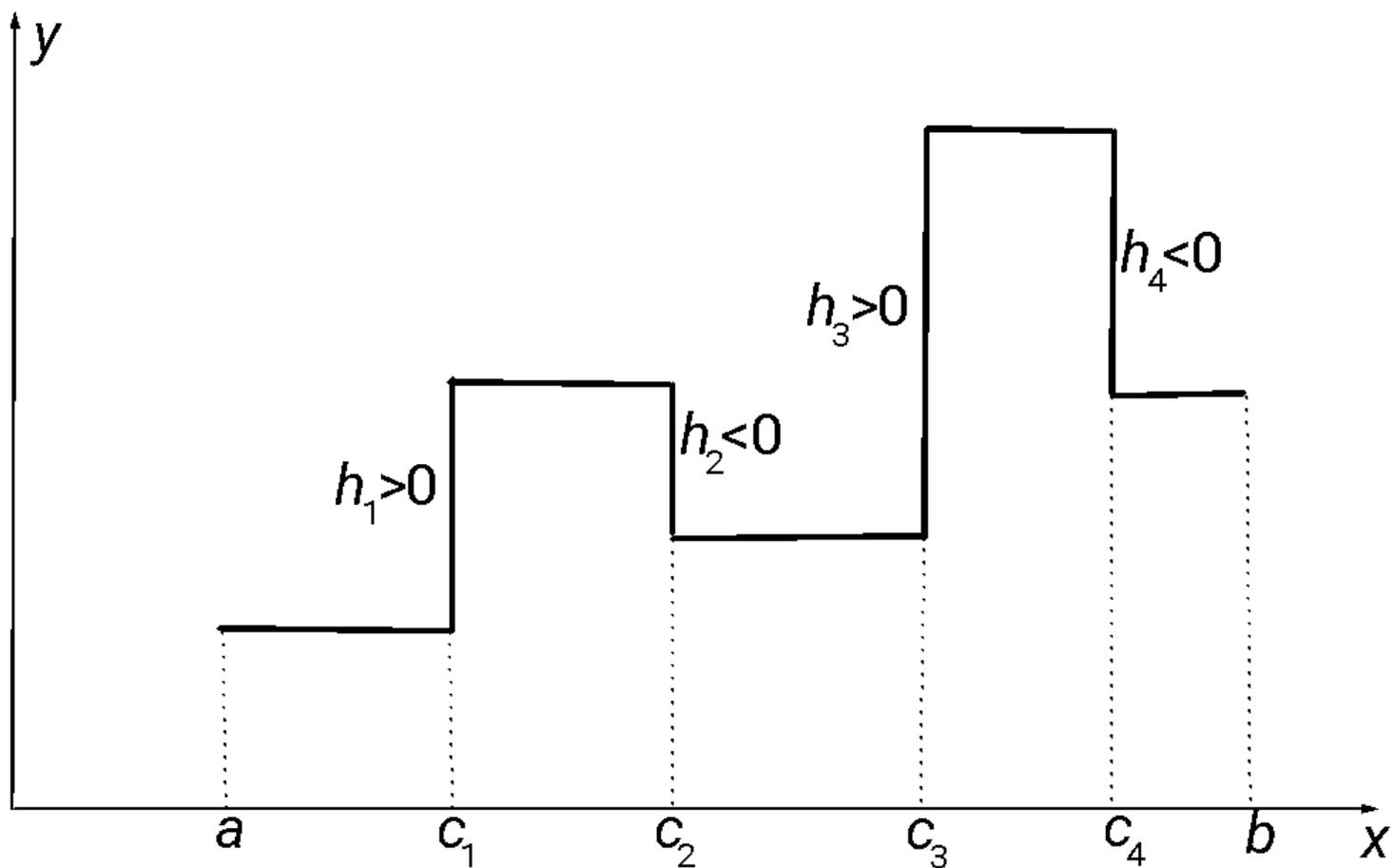
$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i.$$

Делая предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

где первый интеграл понимается в смысле Стильеса, а второй – в смысле Римана.

2. $f(x)$ – непрерывная функция, а функция $g(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке. Такая функция называется **функцией скачков**.



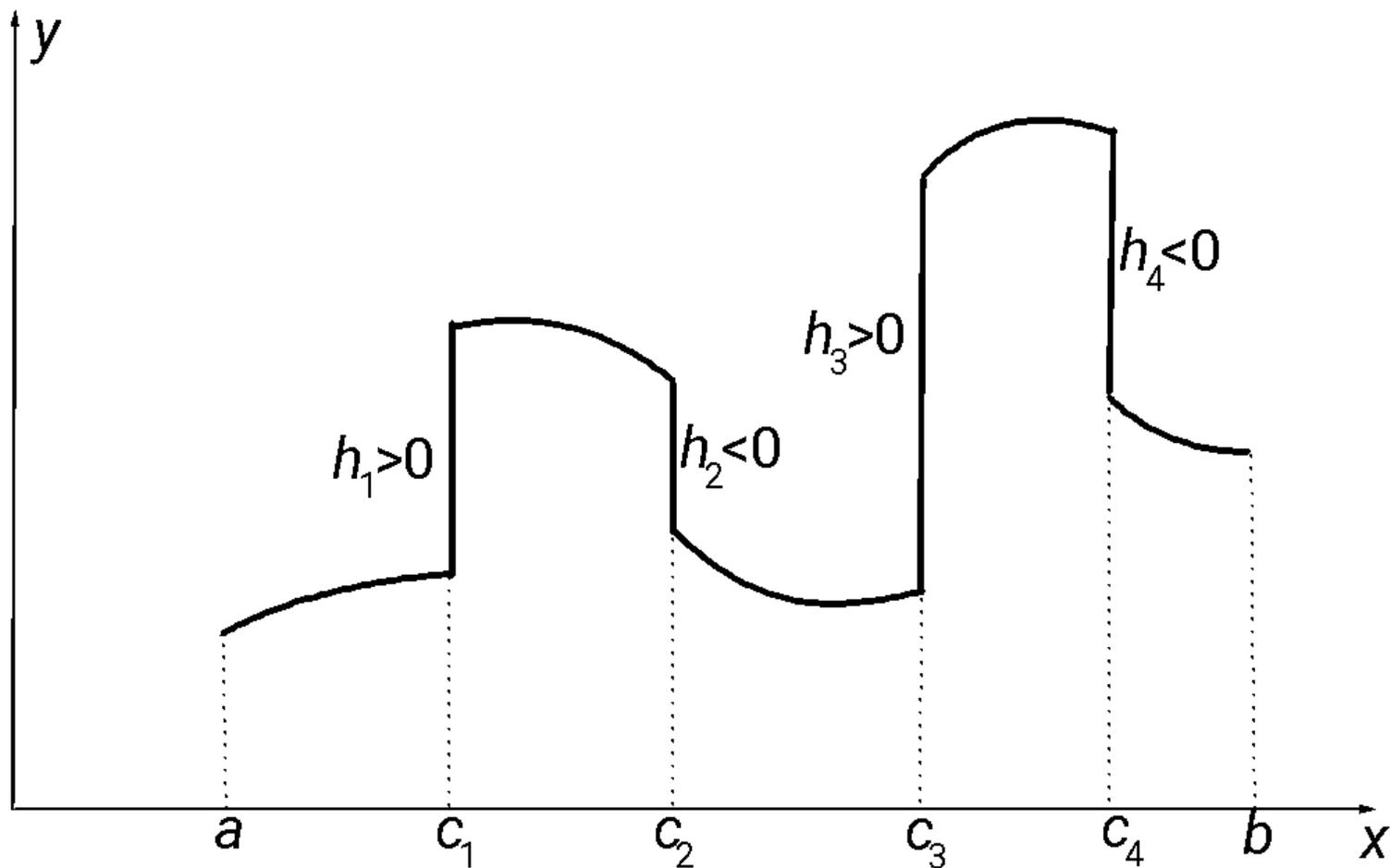
Разобьем отрезок $[a, b]$ на части и пусть $x_{i_1} < c_1 < x_{i_1+1}$, $x_{i_2} < c_2 < x_{i_2+1}$, $x_{i_3} < c_3 < x_{i_3+1}$, \dots , $x_{i_k} < c_k < x_{i_k+1}$. Тогда в интегральной сумме останутся лишь слагаемые

$$\sigma = \sum_{s=1}^k f(c_s) [g(x_{i_s+1}) - g(x_{i_s})].$$

Но при предельном переходе $\lambda \rightarrow 0$ $g(x_{i_s+1}) - g(x_{i_s}) \rightarrow h_s$ и поэтому

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sum_{s=1}^k f(c_s) h_s.$$

3. Рассмотрим наконец общий случай, когда $g(x)$ представима в виде $g(x) = g_c(x) + g_d(x)$, где у функции $g_c(x)$ существует производная $g'_c(x)$, а $g_d(x)$ есть функция скачков.



Тогда, по свойствам интеграла Стильтеса

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'_c(x)dx + \sum_{s=1}^k f(c_s)h_s.$$

Этой формулой и пользуются чаще всего при решении практических задач.

Конец второй части