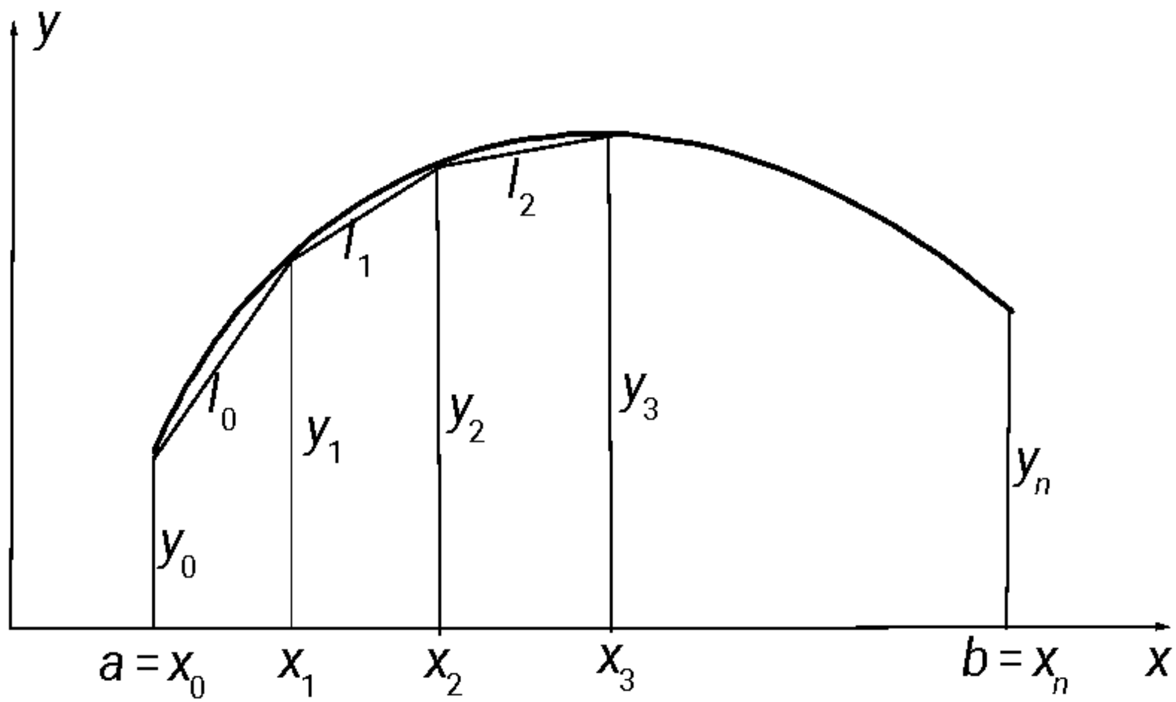
Здравствуйте!

Лекция №11

Площадь боковой поверхности тела вращения.



Пусть на плоскости OXY задана кривая в параметрической форме

.

Считается, что значение параметра   соответствует точке A (начало кривой), а значение параметра T – точке B (концу кривой). Будем считать, что эта кривая вращается около оси OX $\left\{ x = x(t \right)$

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Построим на каждом кусочке усеченный конус с радиусами оснований y_i и y_{i+1} и образующей l_i. Тогда площадь боковой поверхности этого конуса будет равна $2\pi \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} l_i$, а суммарная площадь боковых поверхностей всех этих конусов будет равна $Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} l_i$. За определение величины площади боковой поверхности тела вращения примем величину $P = \lim_{\lambda \to 0} Q$. Вычислим ее.

1. Рассмотрим величину $Q_1 = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) l_i$, где $t_i \le \tau_i \le t_{i+1}$. Тогда мы имеем

$$|Q - Q_1| \le 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} - y(\tau_i) \right| l_i \le$$

$$\le \pi \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| y(t_i) - y(\tau_i) \right| l_i + \sum_{i=0}^{n-1} \left| y(\tau_i) - y(t_{i+1}) \right| l_i \right).$$

Но, в силу равномерной непрерывности функции $y(t)$ разности $\left| y(t_i) - y(\tau_i) \right|$ и $\left| y(\tau_i) - y(t_{i+1}) \right|$ могут быть сделаны меньше любого наперед заданного ε. Но тогда $|Q - Q_1| \le 2\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} l_i \le 2\pi\varepsilon s_0$, где s_0 – длина дуги нашей кривой. Поэтому $\lim_{\lambda \to 0} (Q - Q_1) = 0$ и $P = \lim_{\lambda \to 0} Q_1$.

2. Пусть $Q_2 = 2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i)\Delta s_i$, где Δs_i – длина дуги кусочка кривой. В силу непрерывности кривой значения $y(t)$ ограничены по модулю величиной M. Тогда имеем

$$0 \le |Q_2 - Q_1| \le 2\pi\sum_{i=0}^{n-1} |y(\tau_i)|(\Delta s_i - l_i) \le$$

$$\le 2\pi M\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta s_i - l_i) = 2\pi M\left(s_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) \to 0$$

так как $s_0 = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} l_i$. Поэтому $P = \lim_{\lambda\to 0} Q_2 = 2\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i)\Delta s_i$.

3. Пользуясь первой теоремой о среднем, получаем

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\, d\tau = \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\, \Delta t_i .$$

Так как ранее величина τ_i в $y(\tau_i)$ была произвольной, то возьмем ее такой же, как и в выражении для Δs_i. Тогда

$$Q_2 = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y(\tau_i) \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\, \Delta t_i$$

и предельный переход дает

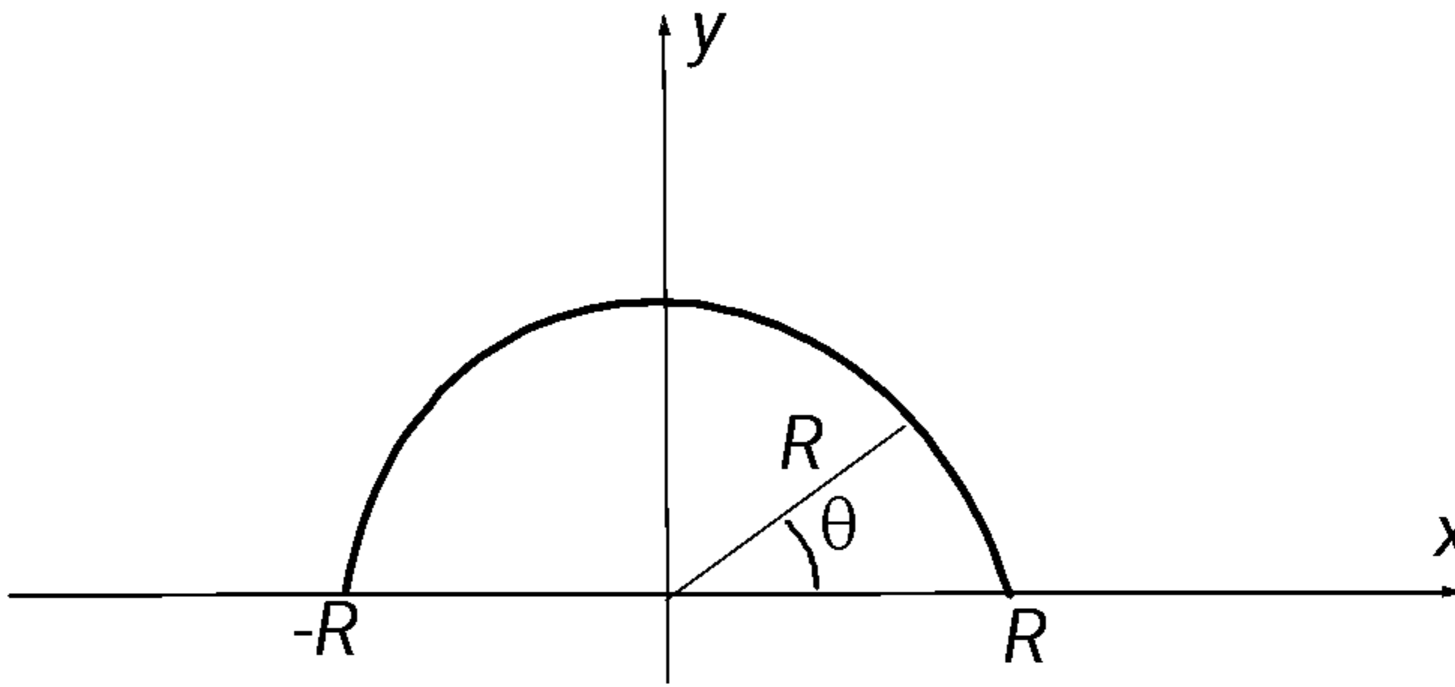
$$P = \lim_{\lambda \to 0} Q_2 = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

Частный случай

В частном случае явного задания функции $y = f(x)$ получаем

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Пример. Площадь поверхности шара



Как уже говорилось выше, шар получается вращением полуокружности около оси OX. Параметрически полуокружность задается уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Тогда $x' = -R\sin\theta, y' = R\cos\theta,\ (x')^2 + (y')^2 = R^2$ и мы получаем

$$P = 2\pi\int_0^\pi R\sin\theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

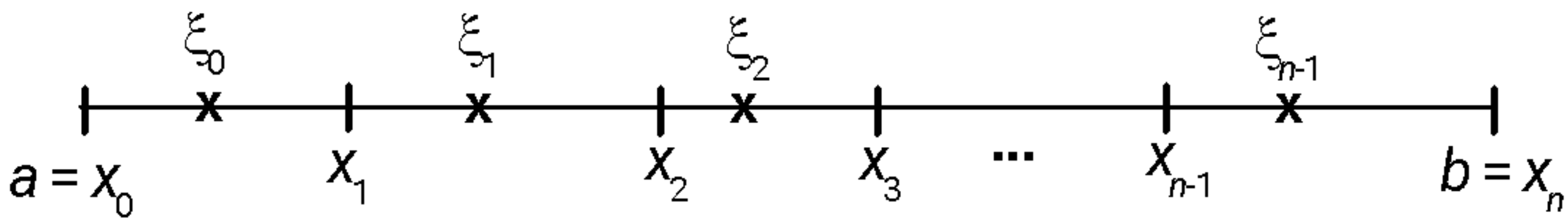
Интеграл Стилтьеса

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы **две** функции $f(x)$ и $g(x)$.

Проделаем ту же процедуру, что и при построении интеграла Римана.

1. **Разбиение отрезка на кусочки**

Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на части (кусочки) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (см. рис.). Для единообразия, точку a будем называть точкой x_0, а точку b – точкой x_n.



Пусть и .

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) \qquad \lambda = \max_i$$

2. **Составление интегральной суммы**

На каждом из кусочков $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем **произвольно** некоторую точку ξ_i (она называется **средней точкой**, хотя, конечно, не обязательно лежит на середине кусочка), так что $[x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}]$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i),$$

которая называется **интегральной суммой.**

3. **Предельный переход**

Наконец, перейдем к пределу $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$.

Определение. Если $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ существует и не зависит от

а) способа разбиения отрезка $[a, b]$ на кусочки и от

б) способа выбора средней точки,

то он называется **интегралом Стилтьеса** от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

Свойства интеграла Стилтьеса

Приведем основные свойства интеграла Стилтьеса. Часть из них приведем без доказательства.

1. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x)$.

2. $\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x)$

3. $\int_a^b (k_1 f(x))d(k_2 g(x)) = k_1 k_2 \int_a^b f(x)dg(x)$

4. Если $\exists \int_a^b f(x)dg(x)$, то $\forall c \in [a,b]$ $\exists \int_a^c f(x)dg(x)$ и $\int_c^b f(x)dg(x)$ и верно равенство

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x).$$

Заметим, что обратное вообще говоря неверно, то есть из существования $\int_a^c f(x)dg(x)$ и $\int_c^b f(x)dg(x)$ **не следует** существование $\int_a^b f(x)dg(x)$.

5. **Основное неравенство.**

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и введем величину

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b g(x) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| g(x_{k+1}) - g(x_k) \right|,$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям отрезка $[a,b]$ на части. Эта величина называется **вариацией** (или **изменением)** функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если $\mathop{\mathbf{V}}_a^b g(x) < +\infty$, то функция $g(x)$ называется функцией с ограниченной вариацией.

Основное неравенство на интеграл Стилтьеса имеет вид

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot \mathop{\mathbf{V}}_a^b g(x)$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \le$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot \mathop{\mathbf{V}}_a^b g(x).$$

Переходя к пределу $\lambda \to 0$ получим требуемое неравенство.

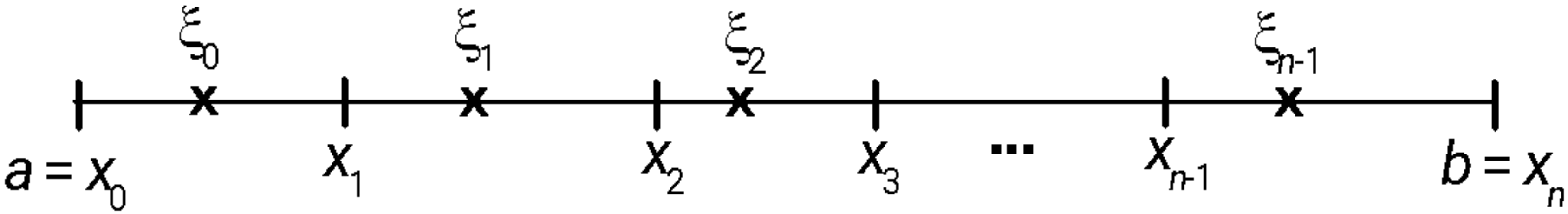
6. **Интегрирование по частям.**

Если $\exists \int\limits_a^b f(x)dg(x)$, то $\exists \int\limits_a^b g(x)df(x)$ и верно соотношение

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \left[f(b)g(b) - f(a)g(a)\right] - \int\limits_a^b g(x)df(x).$$

Доказательство.

Вновь вернемся к рисунку, показывающему разбиение отрезка $[a, b]$ на кусочки



Тогда имеем

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_{i+1})-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i)=$$

$$=f(\xi_0)g(x_1)+f(\xi_1)g(x_2)+f(\xi_2)g(x_3)+\ldots+f(\xi_{n-1})g(x_n)-$$

$$-f(\xi_0)g(x_0)-f(\xi_1)g(x_1)-f(\xi_2)g(x_2)-\ldots-f(\xi_{n-1})g(x_{n-1})-$$

$$-f(x_n)g(x_n)+f(b)g(b)+f(x_0)g(x_0)-f(a)g(a)=$$

(переформируем суммы так, чтобы сомножители вида $g(x_i)$ стояли перед скобками)

$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)-$$

$$-g(x_0)\left[f(\xi_0)-f(x_0)\right]-g(x_1)\left[f(\xi_1)-f(\xi_0)\right]-g(x_2)\left[f(\xi_2)-f(\xi_1)\right]-$$

$$-\ldots-g(x_n)\left[f(x_n)-f(\xi_{n-1})\right]=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\sigma',$$

где σ' есть интегральная сумма для $\int\limits_a^b g(x)df(x)$, в которой точки ξ_i стали точками разбиения, а точки x_i – средними точками.

Теперь после предельного перехода $\lambda \to 0$ и получим требуемое соотношение

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \left[f(b)g(b) - f(a)g(a)\right] - \int_a^b g(x)df(x).$$

Вычисление интеграла Стилтьеса

Рассмотрим частные случаи.

1. $\exists g'(x)$.

Тогда $g(x_{i+1})-g(x_i)=g'(\xi_i)\Delta x_i$. Возьмем в интегральной сумме у $f(\xi_i)$ именно то ξ_i, которое получилось по формуле Лагранжа. Тогда имеем

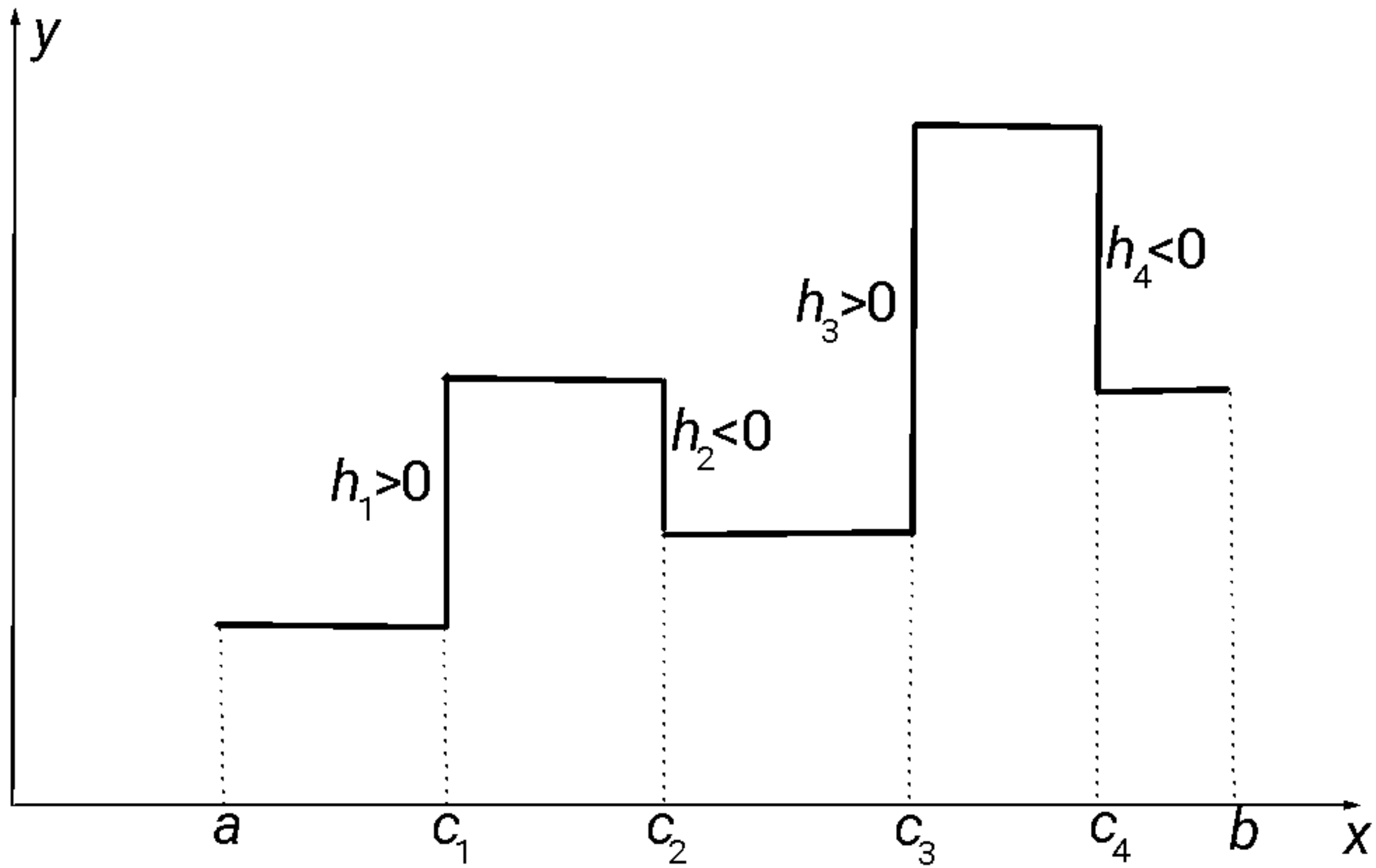
$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i.$$

Делая предельный переход $\lambda\to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

где первый интеграл понимается в смысле Стилтьеса, а второй – в смысле Римана.

2. $f(x)$ – непрерывная функция, а функция $g(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке. Такая функция называется **функцией скачков.**



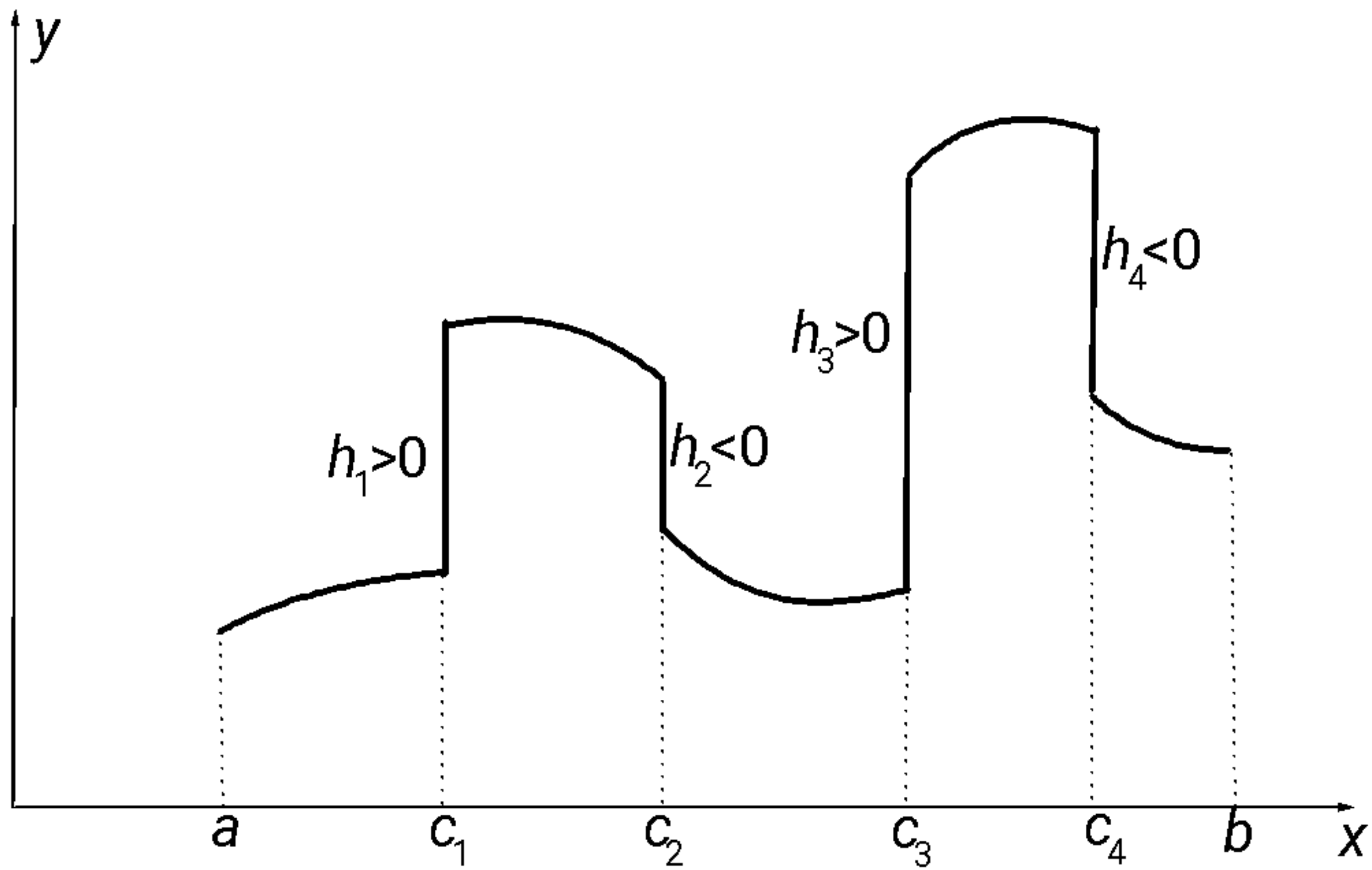
Разобьем отрезок $[a,b]$ на части и пусть $x_{i_1} < c_1 < x_{i_1+1}$, $x_{i_2} < c_2 < x_{i_2+1}$, $x_{i_3} < c_3 < x_{i_3+1}$, …, $x_{i_k} < c_k < x_{i_k+1}$. Тогда в интегральной сумме останутся лишь слагаемые

$$\sigma = \sum_{s=1}^{k} f(c_s)\left[g(x_{i_s+1}) - g(x_{i_s})\right].$$

Но при предельном переходе $\lambda \to 0$ $g(x_{i_s+1}) - g(x_{i_s}) \to h_s$ и поэтому

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \sum_{s=1}^{k} f(c_s)h_s .$$

3. Рассмотрим наконец общий случай, когда $g(x)$ представима в виде $g(x)=g_c(x)+g_d(x)$, где у функции $g_c(x)$ существует производная $g_c'(x)$, а $g_d(x)$ есть функция скачков.



Тогда, по свойствам интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g_c'(x)dx + \sum_{s=1}^{k} f(c_s)h_s .$$

Этой формулой и пользуются чаще всего при решении практических задач.

Конец второй части