Логика предикатов

Понятие предиката

Выразительные средства алгебры высказываний недостаточны для описания утверждений со сложной логической структурой субъектно-предикатных рассуждений, в которых используются не только понятие *субъекта* (как объекта, о которых говорится в рассуждении), но и понятие *предиката* (как выраженного сказуемыми свойства объектов рассуждения).

ПРЕДИКАТ (лат. praedicatum – высказанное) – термин, обозначающий член предложения – сказуемое.

Пример. Студент уныло **слушает** лекцию.

Субъект Атрибут ***Предикат*** *Объект*

Другое значение термина «предикат» – выражение отношения между лицами, предметами, событиями, явлениями.

Пример. Студент уныло ***слушает*** лекцию.

Слушает (кто, кого, как)

Определение. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1,\ldots,x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты $P,Q,\ldots$

Переменные $x_1,\ldots,x_n$, называются *предметными* или *индивидуальными переменными*. Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью*.

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1,\ldots,x_n)$.

Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n$ его n предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,\ldots,a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0,1\}$.

Рассматривая такую функцию на некотором фиксированном множестве M допустимых значений предметных переменных предиката, получим n-арное отношение на множестве M, состоящее из всех таких упорядоченных наборов $(a_1,...,a_n)$ n элементов $a_1,...,a_n \in M$, для которых $P(a_1,...,a_n)$ является истинным высказыванием.

Такое n-арное отношение обозначается символом P^+ и называется *множеством истинности* предиката P на множестве M.

Функция $P: M^n \to \{0,1\}$ определяется двумя множествами:

$P^+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 1\}$ – *множество истинности*,

$P^- = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 0\}$ – *множество ложности*.

Примеры.

1. Пусть M – множество студентов вуза.

Предикаты:

$P(x)$ – « x есть студент 1-ой группы»,

$Q(x)$ – « студент x есть отличник».

Множеством истинности P^+ на множестве M является множество студентов 1-ой группы вуза и множеством истинности Q^+ на множестве M является множество всех отличников вуза.

2. Пусть M – множество вещественных чисел $\boldsymbol{R}$.

Предикаты:

$P(x)$ – утверждение «$x > 0$»,

$Q(x)$ – утверждение «$(x-1)\cdot(x^2-2)=0$».

Множеством истинности предиката P на множестве $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}$ является множество всех положительных вещественных чисел и множеством истинности предиката Q на множестве $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}$ является множество $Q^+=\{1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$.

.

Определение. Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ *на множестве* M называется:

- *тождественно истинным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+=M^n$;
- *тождественно ложным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+ = \varnothing$;
- *выполнимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+ \neq \varnothing$;
- *опровержимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+ \neq M^n$.

Алгебра предикатов

Отрицание n-местного предиката $P(x_1,...,x_n)$ определяется как *n*-местный предикат $\neg P$, который при подстановке значений $x_1 = a_1,...,x_n = a_n$ превращается в высказывание $\neg P(a_1,...,a_n)$, являющееся отрицанием высказывания $P(a_1,...,a_n)$.

Конъюнкция n-местных предикатов $P(x_1,...,x_n)$ и $Q(x_1,...,x_n)$ определяется как *n*-местный предикат $P \wedge Q$, который при подстановке значений $x_1 = a_1,...,x_n = a_n$ превращается в высказывание $P \wedge Q(a_1,...,a_n)$, являющееся конъюнкцией высказываний $P(a_1,...,a_n)$ и $Q(a_1,...,a_n)$.

Для любого множества M допустимых значений предметных переменных предикатов множества истинности предикатов взаимосвязаны с логическими операциями по следующим формулам:

$$(\neg P)^+ = M^n \setminus P^+, \quad (P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+, \quad (P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+,$$

$$(P \Rightarrow Q)^+ = (\neg P)^+ \cup Q^+, \quad (P \Leftrightarrow Q)^+ = (P \Rightarrow Q)^+ \cap (Q \Rightarrow P)^+.$$

Примеры.

1. Пусть на множестве вещественных чисел ***R*** предикат $P(x)$ выражается неравенством $f(x) \le 0$ и предикат $Q(x)$ выражается неравенством $g(x) \le 0$. Тогда система неравенств $\begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0 \end{cases}$ определяется как конъюнкция предикатов $P \wedge Q$ и, значит, имеет множество решений $(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+$, равное пересечению множеств решений неравенств системы.

2. Пусть на множестве вещественных чисел R предикат $P(x)$ выражается неравенством $f(x) \leq 0$ и и предикат $Q(x)$ выражается неравенством $g(x) \leq 0$. Тогда совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0 \end{array}\right.$ определяется как дизъюнкция предикатов $P \vee Q$ и, значит, имеет множество решений $(P \vee Q)^{+} = P^{+} \cup Q^{+}$, равное объединению множеств решений неравенств системы.

Определение.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,\ldots,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,\ldots,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при любых значениях $x_1=a_1\in M$ высказывание $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ истинно.

Определение.

Результатом действия квантора существования $(\exists x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется (n–1)-местный предикат $(\exists x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который зависит от переменных $x_2, \ldots, x_n$ и который при значениях $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при некотором значении $x_1 = a_1 \in M$ высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно.

Квантор существования и единственности $(\exists! x)$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(P(x) \wedge ((\forall y)(P(y) \Rightarrow x = y))).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists! x)P(x)$ и читается «существует и единственен x, для которого выполняется $P(x)$»).

Ограниченный квантор существования $(\exists Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists Q(x))P(x)$ и и читается «существует x, удовлетворяющий $Q(x)$, для которого выполняется $P(x)$».

Ограниченный квантор общности $(\forall Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\forall Q(x))P(x)$ и читается «для всех x, удовлетворяющих $Q(x)$, выполняется $P(x)$».

Определение.

Алгеброй предикатов называется множество всех предикатов **P** с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и операциями квантификации $(\forall x), (\exists x)$ для всех предметных переменных x.

Формулы алгебры предикатов

Свойства алгебры предикатов ***P*** описываются с помощью специальных формул, которые строятся из символов предикатов и предметных переменных с помощью специальных вспомогательных символов – скобок и знаков логических операций над предикатами.

Алфавит алгебры предикатов состоит из следующих символов:

1) *предметные переменные* $x_1, x_2, \dots$, которые используются для обозначения элементов множества допустимых значений,

2) n-местные *предикатные символы* $P, Q, \dots$, которые используются для обозначения n-местных предикатов на множестве допустимых значений,

3) символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$,

4) вспомогательные символы (,) и другие.

Формулы алгебры предикатов определяются по индукции следующим образом:

1) для любого n-местного предикатного символа P и любых n предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ выражение $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть формула, которая называется *элементарной* (или *атомарной*) *формулой*;

2) если Φ,Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi),\ (\Phi\wedge\Psi),\ (\Phi\vee\Psi),\ (\Phi\Rightarrow\Psi),\ (\Phi\Leftrightarrow\Psi);$$

3) если Φ – формула и x – предметная переменная, то формулами являются также выражения $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$; при этом переменная x и формула Φ называется *областью действия* соответствующего *квантора*.

Если в формулу Ф входят переменные $x_1,\ldots,x_n$, то записывают $\Phi = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$.

Вхождение предметной переменной x в формулу Ф называется *связным*, если она находится в области действия одного из этих кванторов; в противном случае вхождение предметной переменной x в формулу Ф называется *свободным*.

Формула без свободных вхождений переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением*.

Интерпретации формул алгебры предикатов

Область интерпретации – непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных.

n-местным предикатным символам P присваиваются конкретные значения P_M n-местных предикатов на множестве M.

Соответствие β: $P \to P_M$ называется *интерпретацией предикатных символов*.

Область интерпретации M вместе с интерпретацией предикатных символов β называется *интерпретацией формул алгебры предикатов* и обозначается (M, β) или просто M.

При наличии интерпретации M конкретные значения предметным переменным формул алгебры предикатов присваиваются с помощью отображения α множества всех предметных переменных X в область интерпретации M.

Такие отображения называются *оценками* предметных переменных.