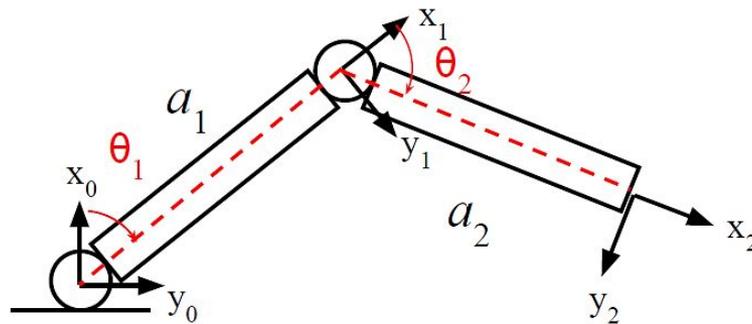


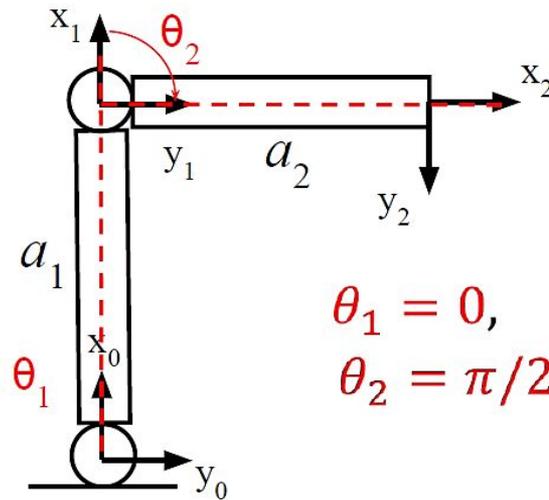
Сингулярность

Конфигурации системы, при которых ранг $J(q)$ становится меньше своего максимального значения, называются сингулярными конфигурациями

Если Якобиан – квадратная матрица, то такие конфигурации соответствуют $\det J(q) = 0$

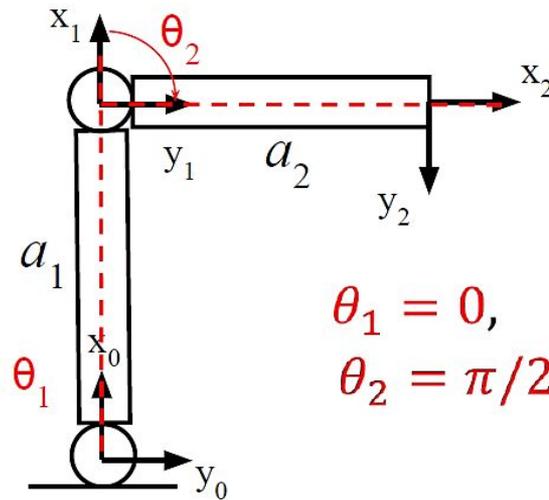


$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



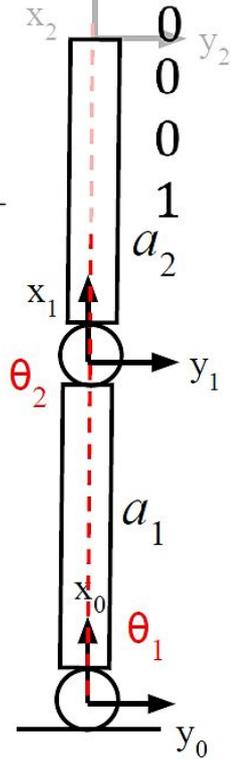
$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & s_1 &= 0, c_1 = 1 \\ \theta_2 &= \pi/2, & s_2 &= 1, c_2 = 0 \\ & & s_{12} &= 1, c_{12} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_2 \\ a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



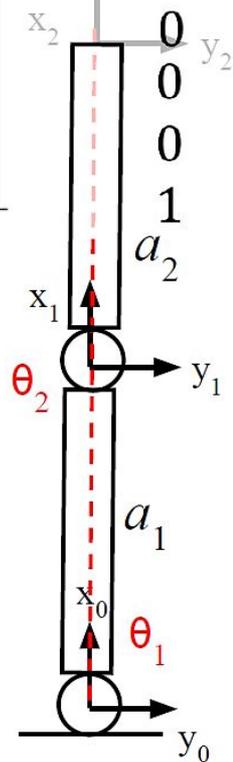
$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & s_1 &= 0, c_1 = 1 \\ \theta_2 &= \pi/2, & s_2 &= 1, c_2 = 0 \\ & & s_{12} &= 1, c_{12} = 0 \end{aligned}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, s_1 = 0, c_1 = 1 \\ \theta_2 &= 0, s_2 = 0, c_2 = 1 \\ s_{12} &= 0, c_{12} = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\det(\mathbf{J}) = 0$$

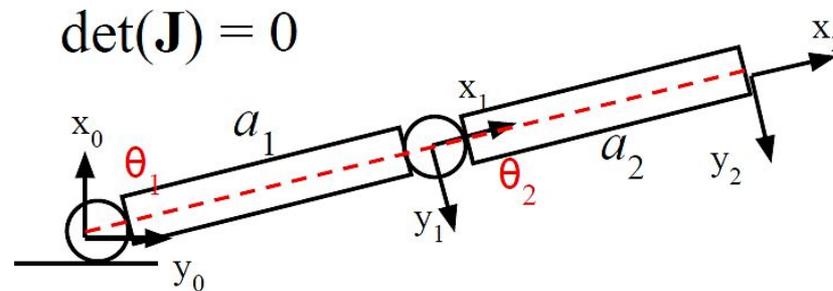
$$\begin{aligned}
 \theta_1 = 0, \quad s_1 = 0, \quad c_1 = 1 \\
 \theta_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad c_2 = 1 \\
 s_{12} = 0, \quad c_{12} = 1
 \end{aligned}$$

Характерные черты сингулярных конфигураций

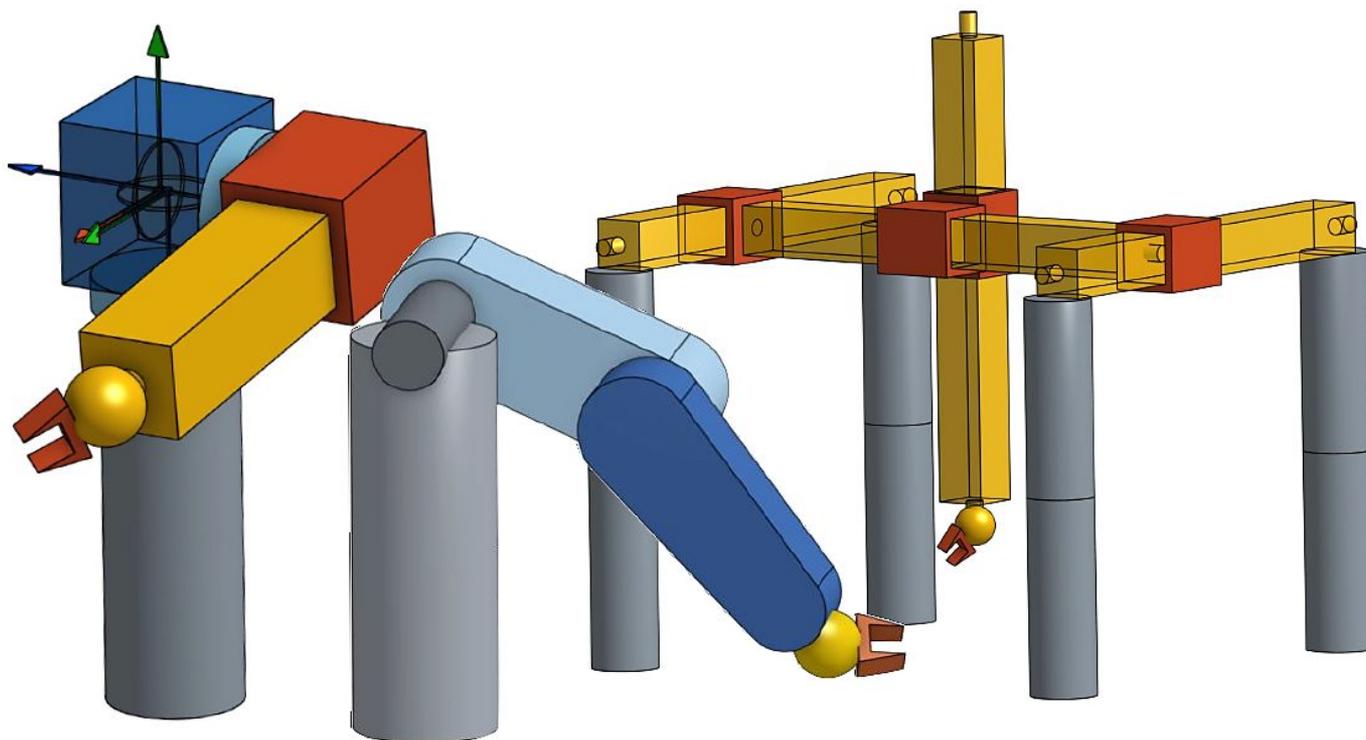
- Движение вдоль некоторых направлений может оказаться невозможным
- Для достижения конечной скорости выходного узла могут потребоваться бесконечные скорости шарниров
- Ограниченные воздействия на шарниры могут привести к теоретически бесконечной скорости выходного узла
- Часто имеют место на границах рабочей зоны
- Для них может не быть решения обратной задачи кинематики или наоборот, решений может оказаться бесконечно много

Нахождение сингулярных конфигураций с помощью определителя Якобиана

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_1 & -a_2 s_1 \\ a_1 c_1 + a_2 c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix} \quad \theta_2 = 0, \pi$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

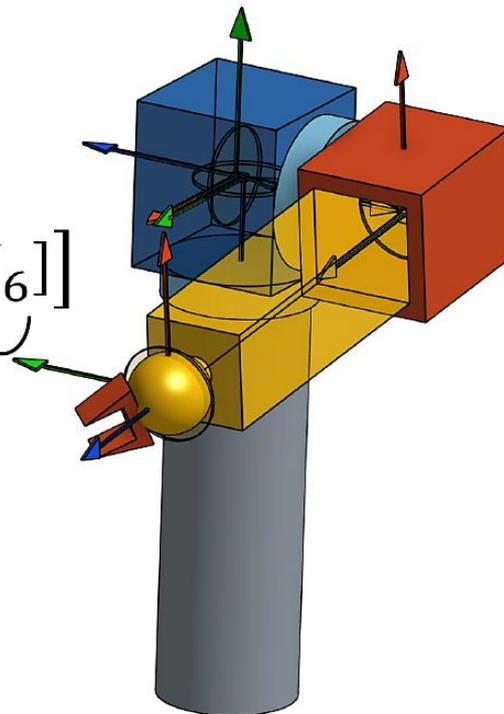


Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$J(q)$ – матрица 6×6 , которая
сингулярна, если $\det J(q) = 0$

$$\mathbf{J} = \left[\underbrace{[\mathbf{J}_1][\mathbf{J}_2][\mathbf{J}_3][\mathbf{J}_4][\mathbf{J}_5][\mathbf{J}_6]} \right]$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P | \mathbf{J}_O]$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

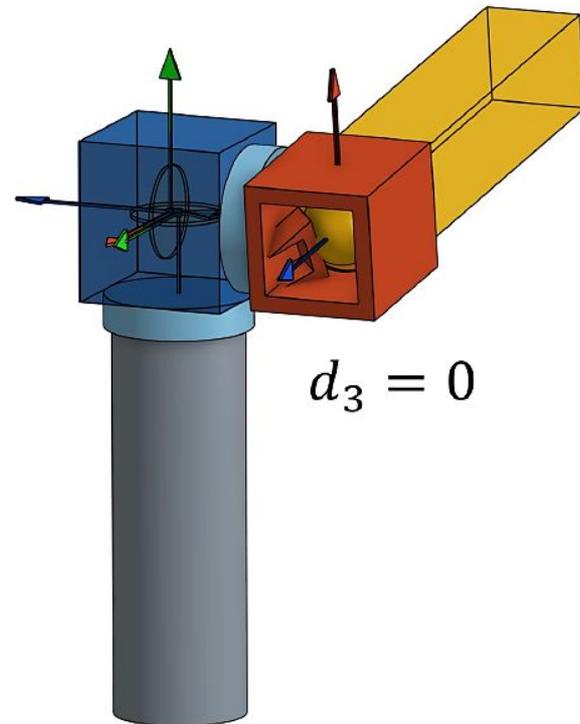
$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_5 = \mathbf{P}_6$$

Выбере $\mathbf{P}_6 = \mathbf{P}_c$

М

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P \quad \mathbf{J}_O]$$



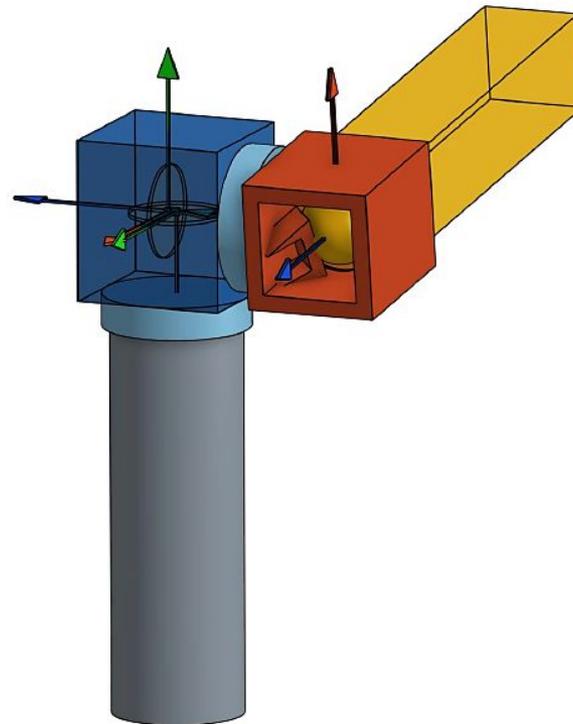
Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22}) \end{aligned}$$

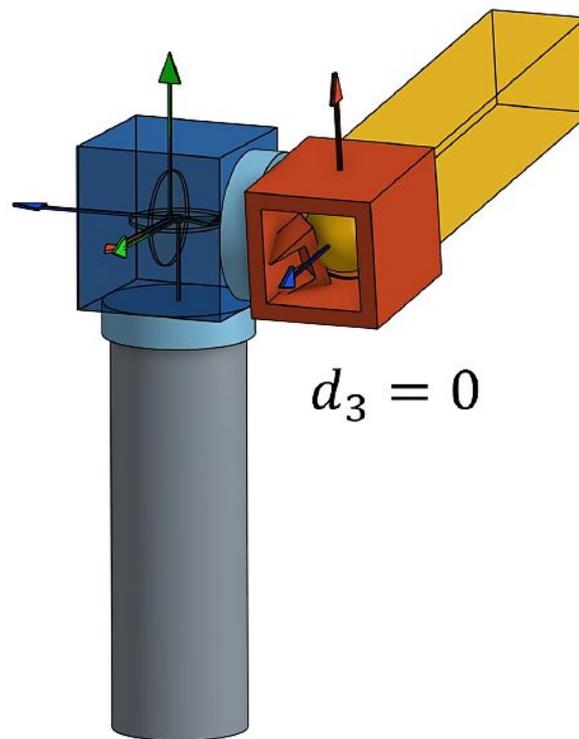


Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

\mathbf{J}_{22} – часть, которая
соответствует
схвату и его ориентации

$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22})$$



Сингулярные конфигурации схвата

Сингулярность имеет место на схвате:

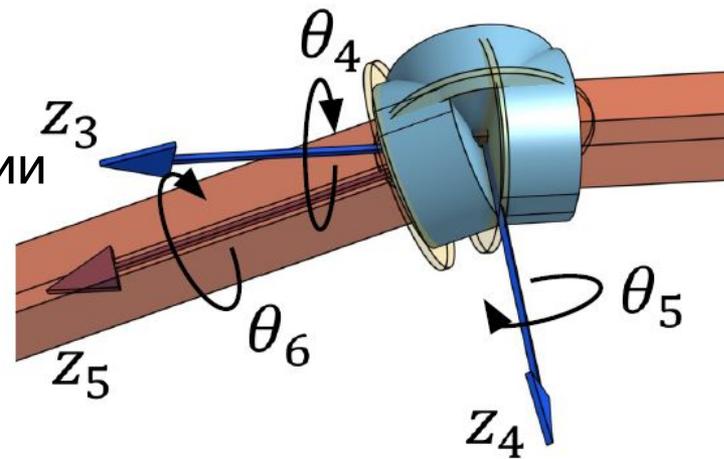
- тогда и только тогда, когда шарнирные оси совпадают (0 или π)
- неизбежна при прохождении через эти точки

\mathbf{J}_{22} – часть, которая
соответствует
схвату и его ориентации

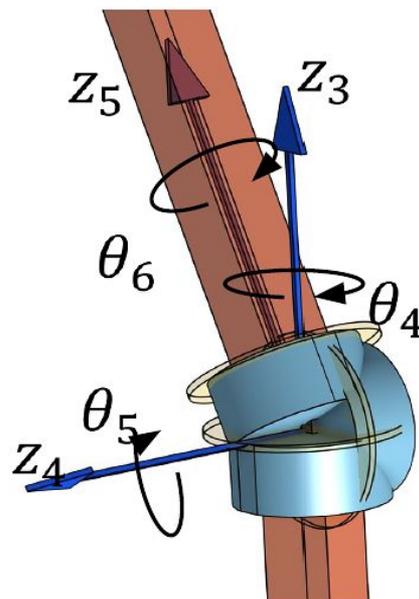
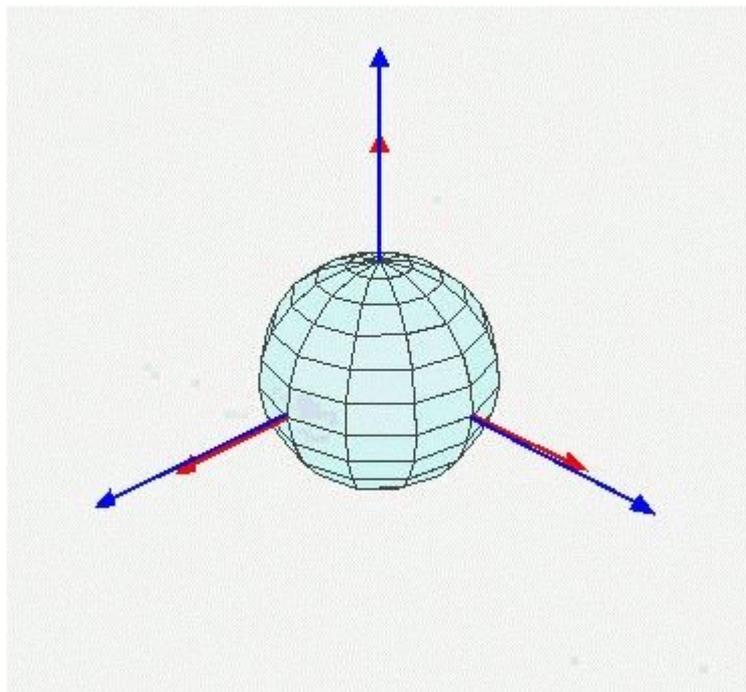
$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

$$\theta_5 = 0 \quad \text{ил} \quad \pi$$

и



Сингулярные конфигурации

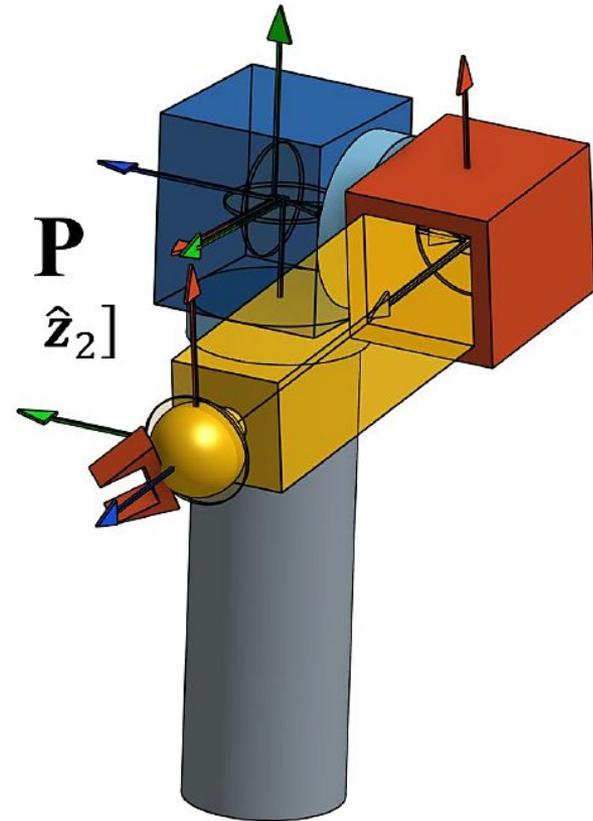


Сингулярные конфигурации руки

\mathbf{J}_{11} – Якобиан
положения
для звеньев 1-3

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \hat{\mathbf{z}}_0 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1) & \hat{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix}$$

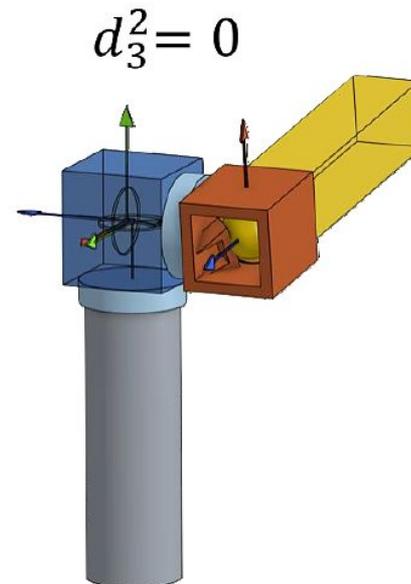
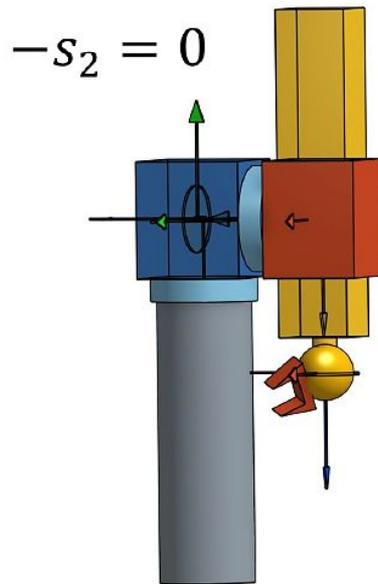
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_3 s_2 - d_2 s_1 \\ c_1 d_2 + d_3 s_1 s_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$



Сингулярные конфигурации руки

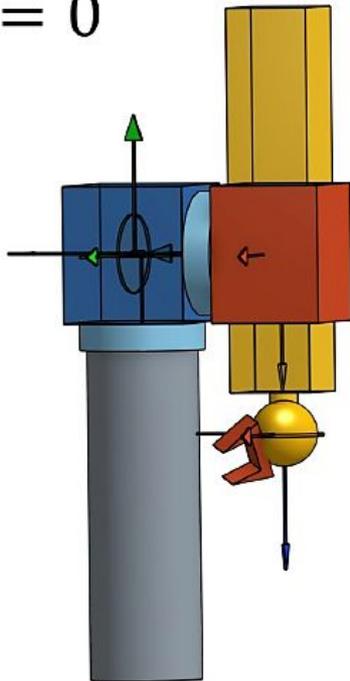
$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = -s_2 d_3^2$$

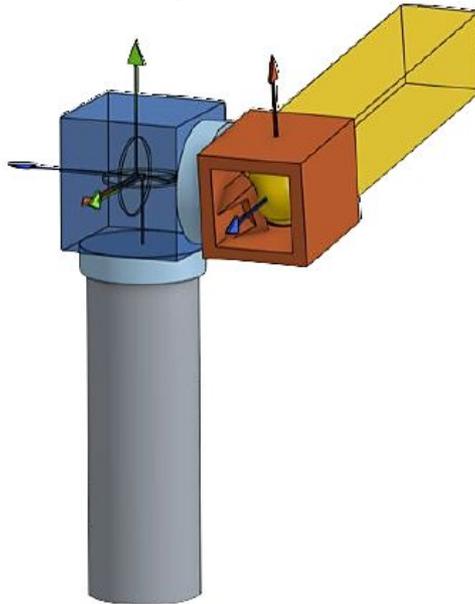


Сингулярные конфигурации системы с 6 степенями свободы

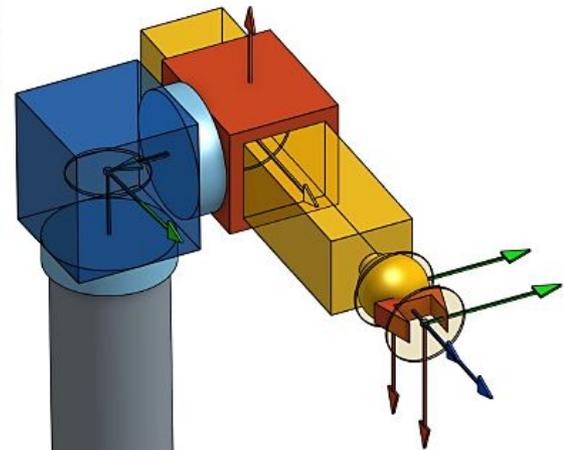
$$-s_2 = 0$$



$$d_3^2 = 0$$

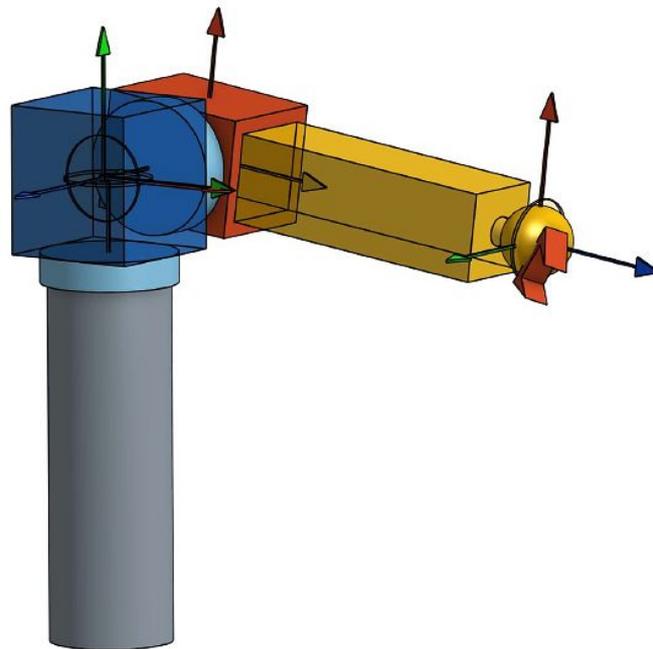


$$\theta_5 = 0$$



Манипулируемость

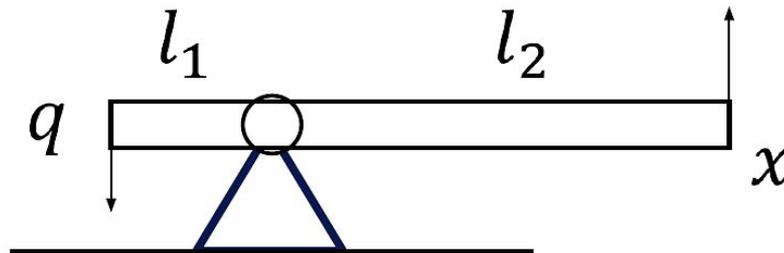
$$\dot{x} = J\dot{q}$$



Манипулируемость

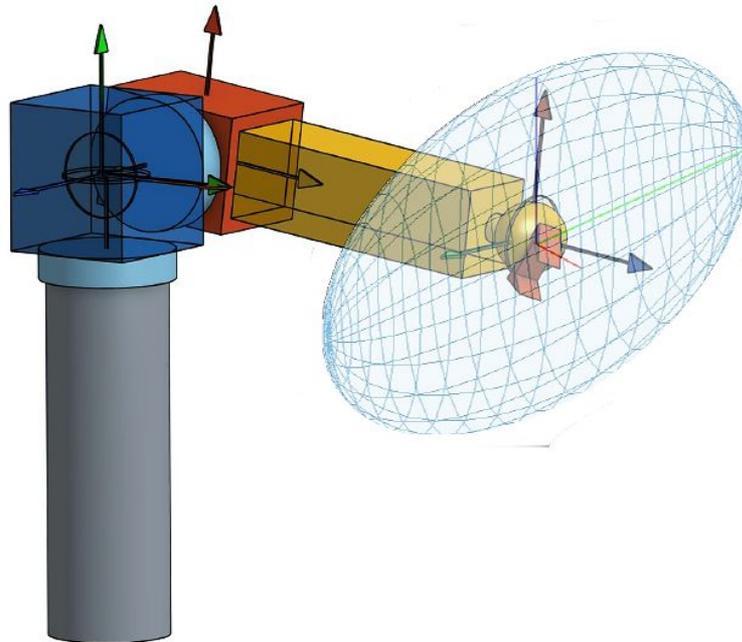
$$\dot{x} = \mathbf{J}\dot{q}$$

$$\dot{x} = \frac{l_2}{l_1} \dot{q}$$



Манипулируемость

$$\dot{x} = J\dot{q}$$



Манипулируемость

$$\|\dot{q}\| = 1$$

$$\|\dot{q}\|^2 = \dot{q}^T \dot{q}$$

$$\xi^T (J J^T)^{-1} \xi \leq 1$$

$$\det(J J^T) = \lambda_1^2 \dots \lambda_n^2$$

Оси эллипсоида – собственные числа

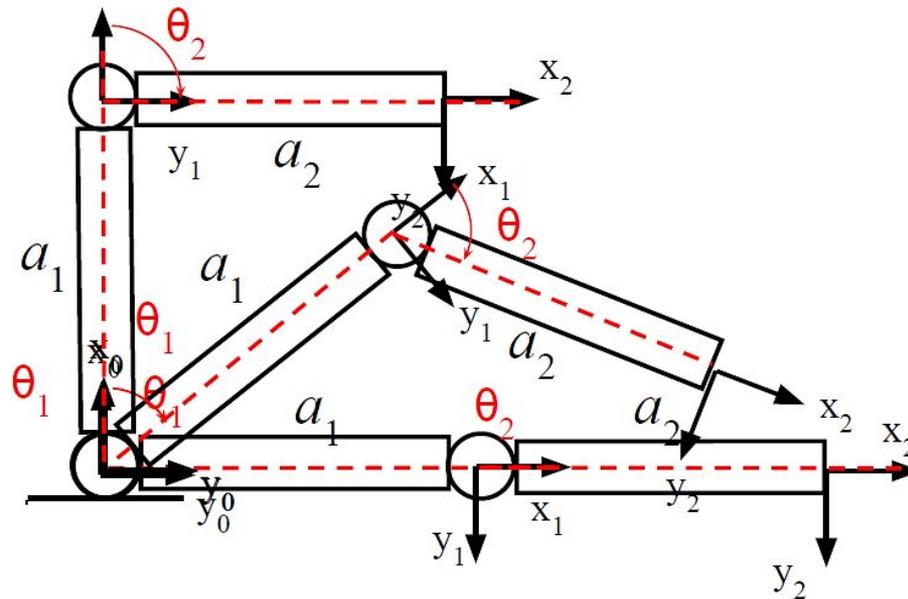
Манипулируемость – $\mu = |\det(J)|$

Число обусловленности – $k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

Манипулируемость

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

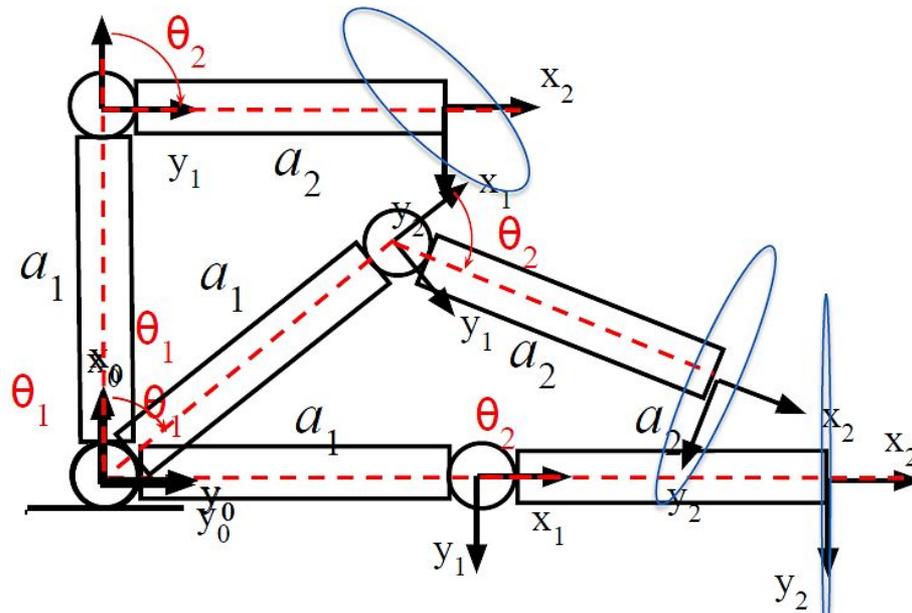
$$\mu = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 \sin(\theta_2)$$



Манипулируемость

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mu = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 \sin(\theta_2)$$



Манипулируемость

$$\|\dot{q}\|=1 \quad \dot{x} = J\dot{q}$$

