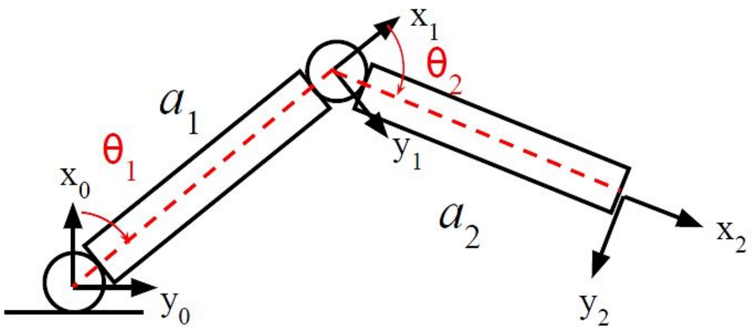
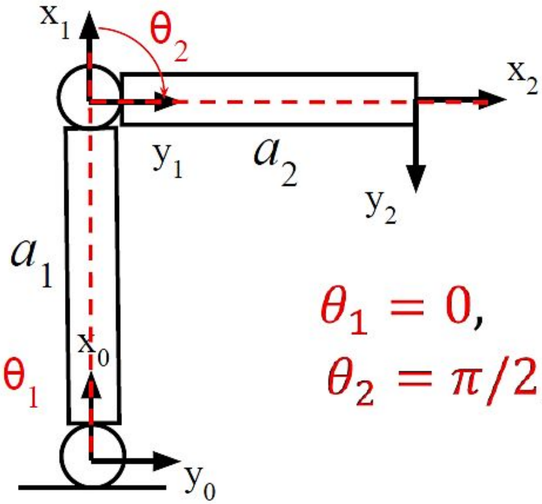
• Сингулярность

Конфигурации системы, при которых ранг $\mathrm{J}(q)$ становится меньше своего максимального значения, называются сингулярными конфигурациями

Если Якобиан – квадратная матрица, то такие конфигурации соответствуют $\det \mathrm{J}(q) = 0$



$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

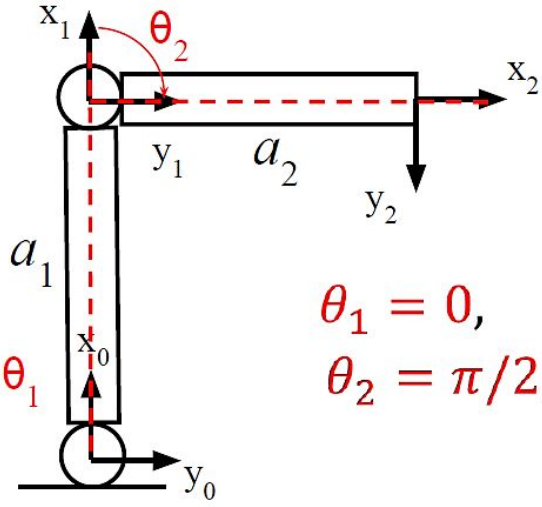


$\theta_1 = 0,\quad s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = \pi/2,\quad s_2 = 1, c_2 = 0$

$s_{12} = 1, c_{12} = 0$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_2 \\ a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

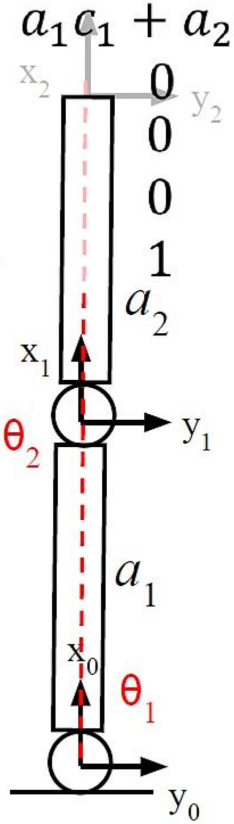


$\theta_1 = 0,\quad s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = \pi/2,\quad s_2 = 1, c_2 = 0$

$s_{12} = 1, c_{12} = 0$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

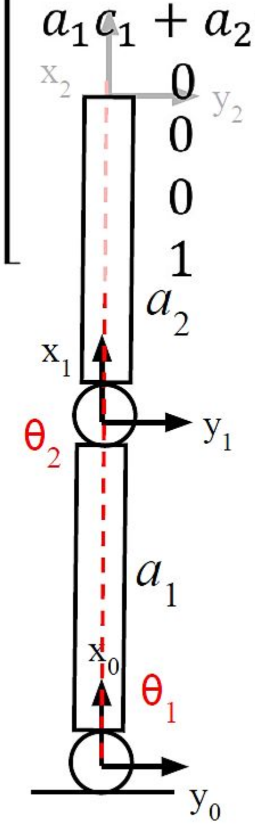


$\theta_1 = 0$, $s_1 = 0, c_1 = 1$

$\theta_2 = 0$, $s_2 = 0, c_2 = 1$

$s_{12} = 0, c_{12} = 1$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$



$$\boxed{\det(\mathbf{J}) = 0}$$

$\theta_1 = 0$, $s_1 = 0, c_1 = 1$
$\theta_2 = 0$, $s_2 = 0, c_2 = 1$
$s_{12} = 0, c_{12} = 1$

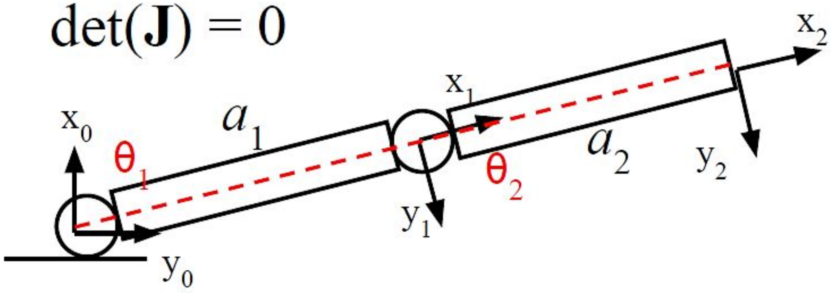
Характерные черты сингулярных конфигураций

- Движение вдоль некоторых направлений может оказаться невозможным
- Для достижения конечной скорости выходного узла могут потребоваться бесконечные скорости шарниров
- Ограниченные воздействия на шарниры могут привести к теоретически бесконечной скорости выходного узла
- Часто имеют место на границах рабочей зоны
- Для них может не быть решения обратной задачи кинематики или наоборот, решений может оказаться бесконечно много

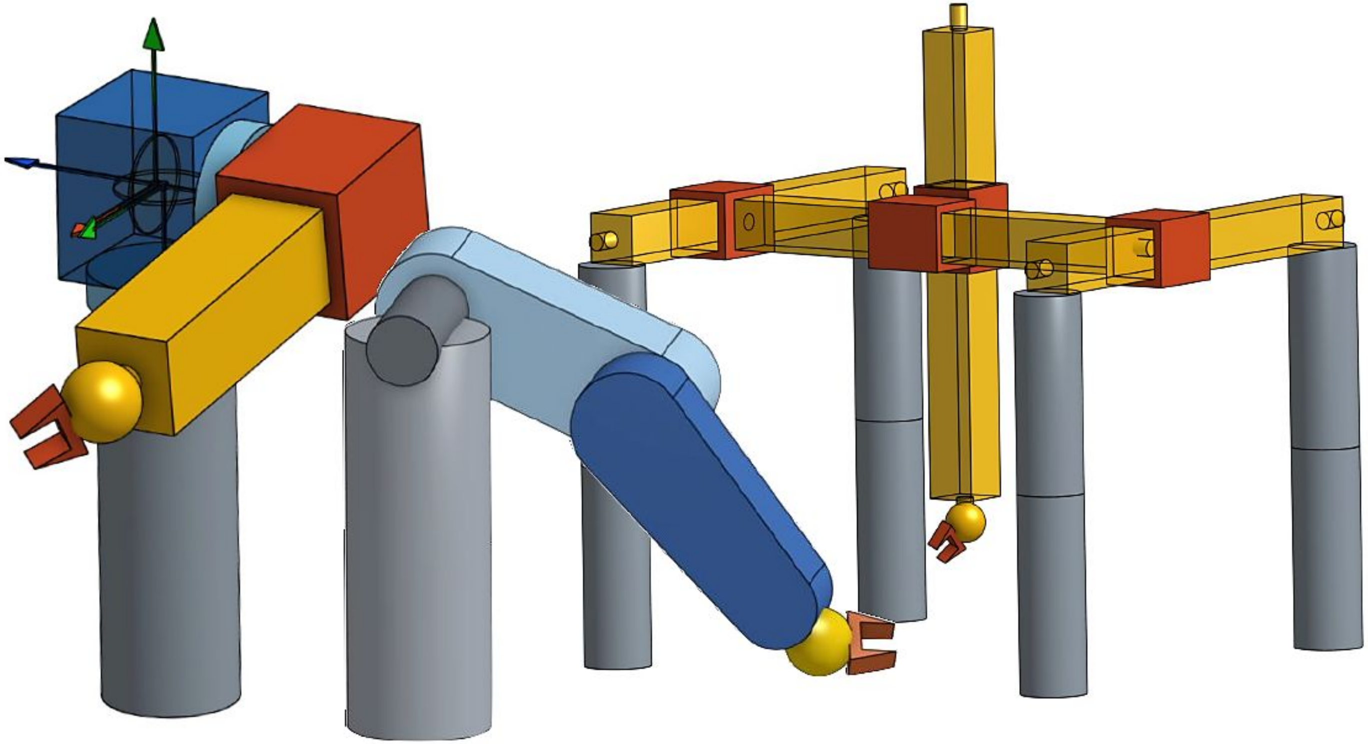
Нахождение сингулярных конфигураций с помощью определителя Якобиана

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_1 & -a_2 s_1 \\ a_1 c_1 + a_2 c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix} \qquad \theta_2 = 0, \pi$$

$$\det(\mathbf{J}) = 0$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

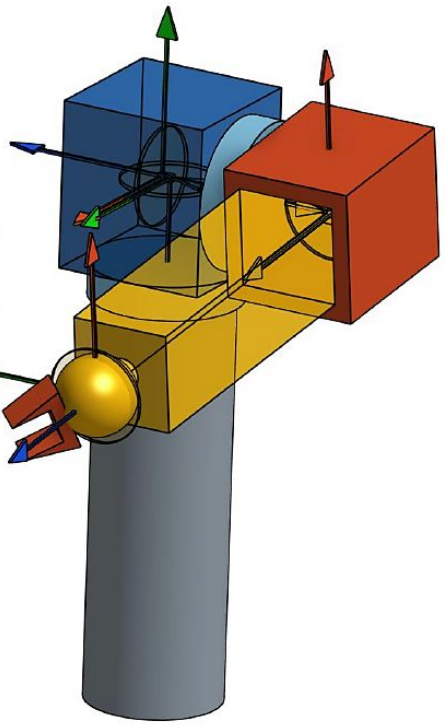


Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$\mathrm{J}(q)$ – матрица 6×6, которая сингулярна, если $\det \mathrm{J}(q) = 0$

$$\mathbf{J} = \Big[\underbrace{[\mathbf{J}_1][\mathbf{J}_2][\mathbf{J}_3]}\underbrace{[\mathbf{J}_4][\mathbf{J}_5][\mathbf{J}_6]}\Big]$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P | \mathbf{J}_O]$$



Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

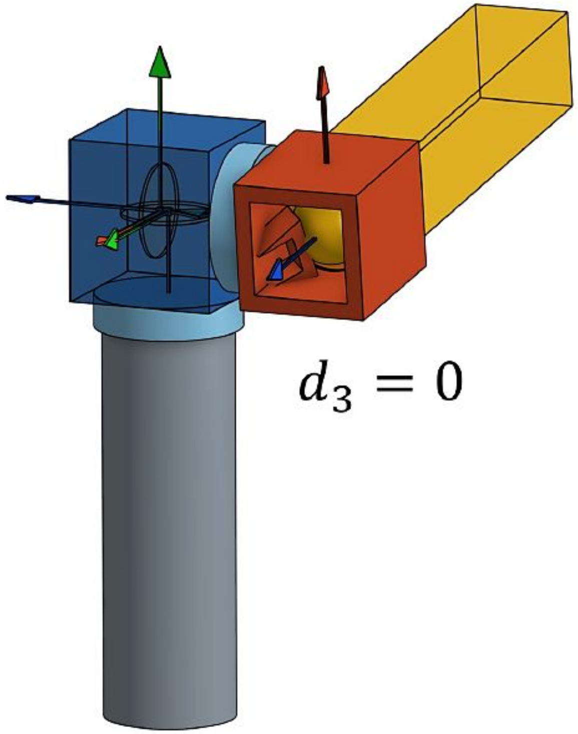
$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6$$

Выберем $P_6 = P_c$

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_P \,|\, \boxed{\mathbf{J}_O}]$$

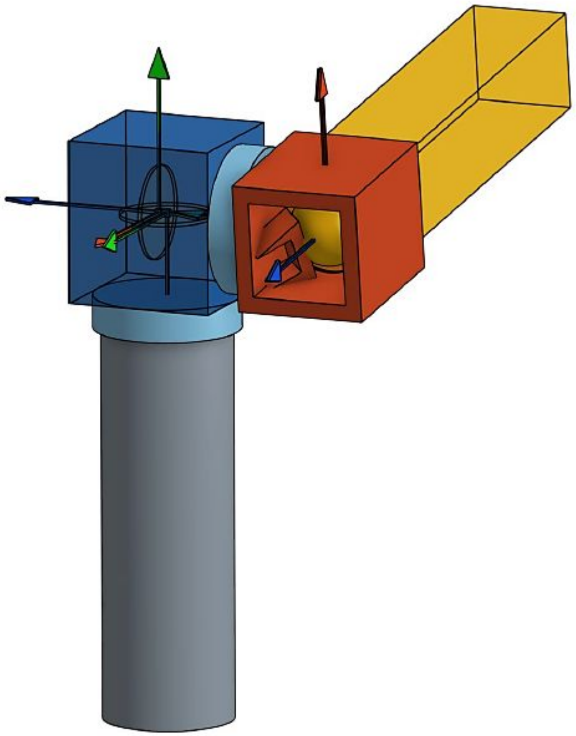


$d_3 = 0$

Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_3 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_3) & \hat{\mathbf{z}}_4 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_4) & \hat{\mathbf{z}}_5 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_5) \\ \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$

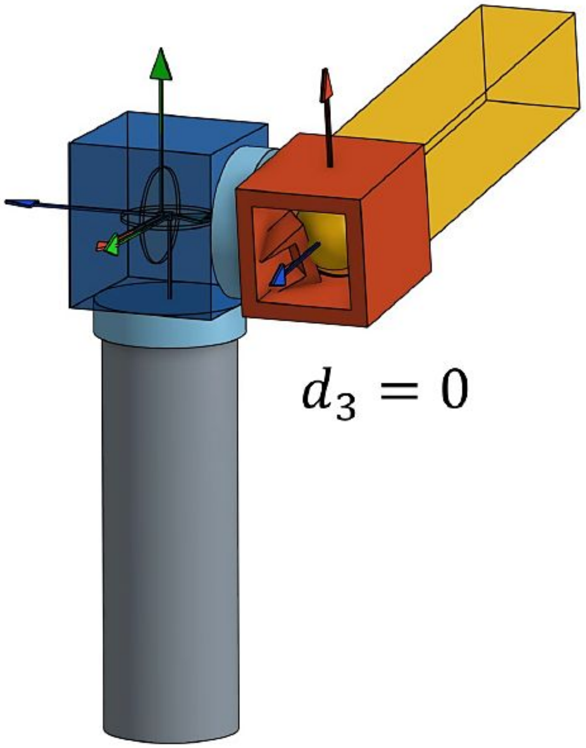
$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} [0][0][0] \\ \hat{\mathbf{z}}_3\ \hat{\mathbf{z}}_4\ \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22})$$

Декомпозиция манипуляционных систем с 6 степенями свободы



$\mathbf{J}_{22}$ – часть, которая соответствует схвату и его ориентации

$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

$$d_3 = 0$$

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11}) \det(\mathbf{J}_{22})$$

Сингулярные конфигурации схвата

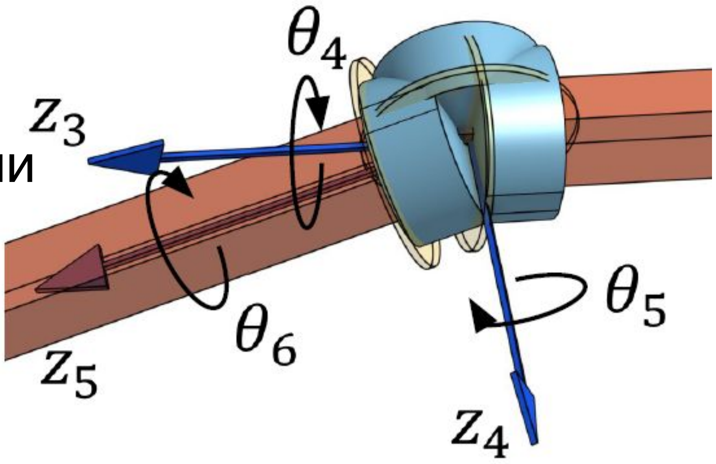
Сингулярность имеет место на схвате:

- тогда и только тогда, когда шарнирные оси совпадают (0 или π)
- неизбежна при прохождении через эти точки

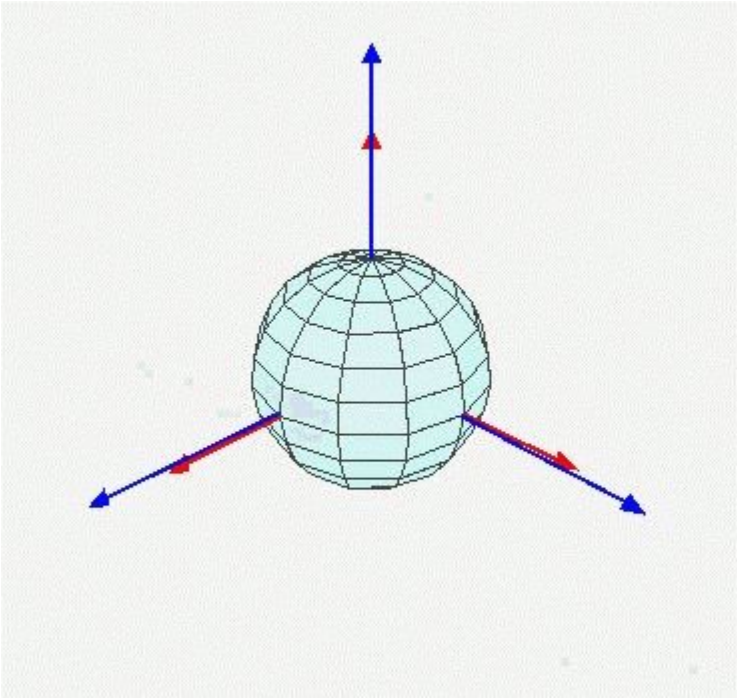
$\mathbf{J}_{22}$ – часть, которая соответствует схвату и его ориентации

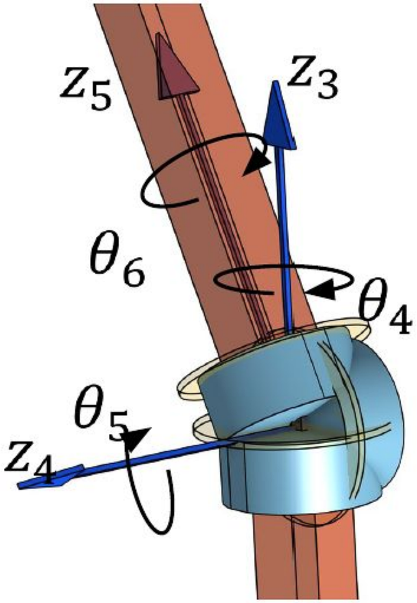
$$\mathbf{J}_{22} = [\hat{\mathbf{z}}_3 \quad \hat{\mathbf{z}}_4 \quad \hat{\mathbf{z}}_5]$$

$\theta_5 = 0$ или π



Сингулярные конфигурации



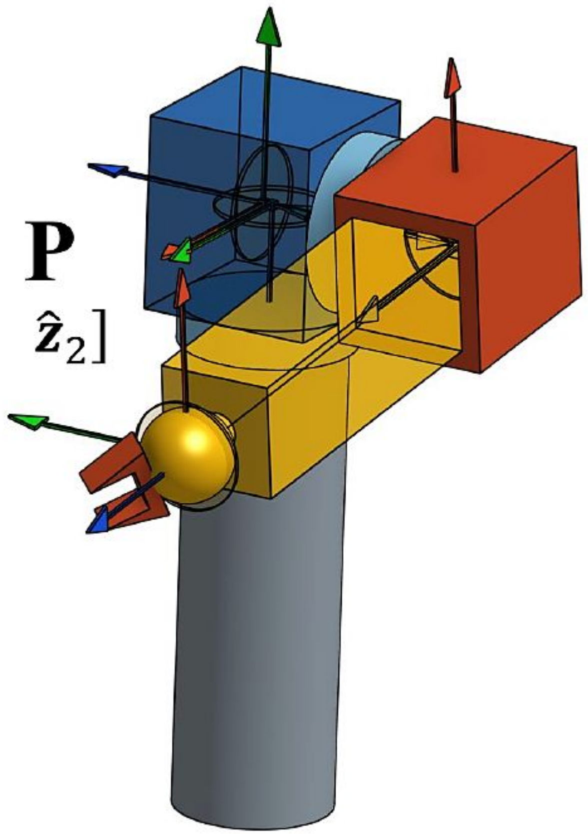


Сингулярные конфигурации руки

$\mathbf{J}_{11}$ – Якобиан положения для звеньев 1-3

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{R} & \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{J}_{11} = & [\hat{\mathbf{z}}_0 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_0) & \hat{\mathbf{z}}_1 \times (\boldsymbol{P}_6 - \boldsymbol{P}_1) & \hat{\mathbf{z}}_2] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_3 s_2 - d_2 s_1 \\ c_1 d_2 + d_3 s_1 s_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

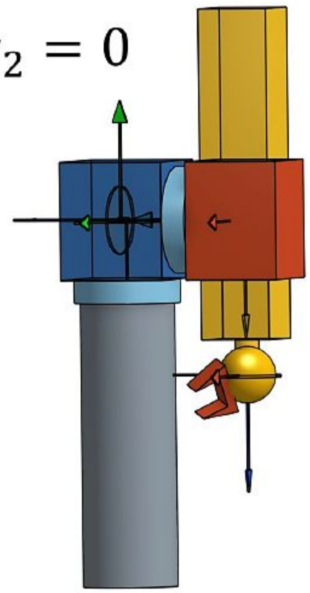


Сингулярные конфигурации руки

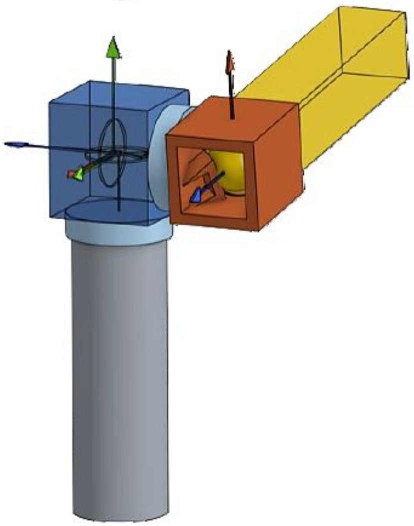
$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = -s_2 d_3^2$$

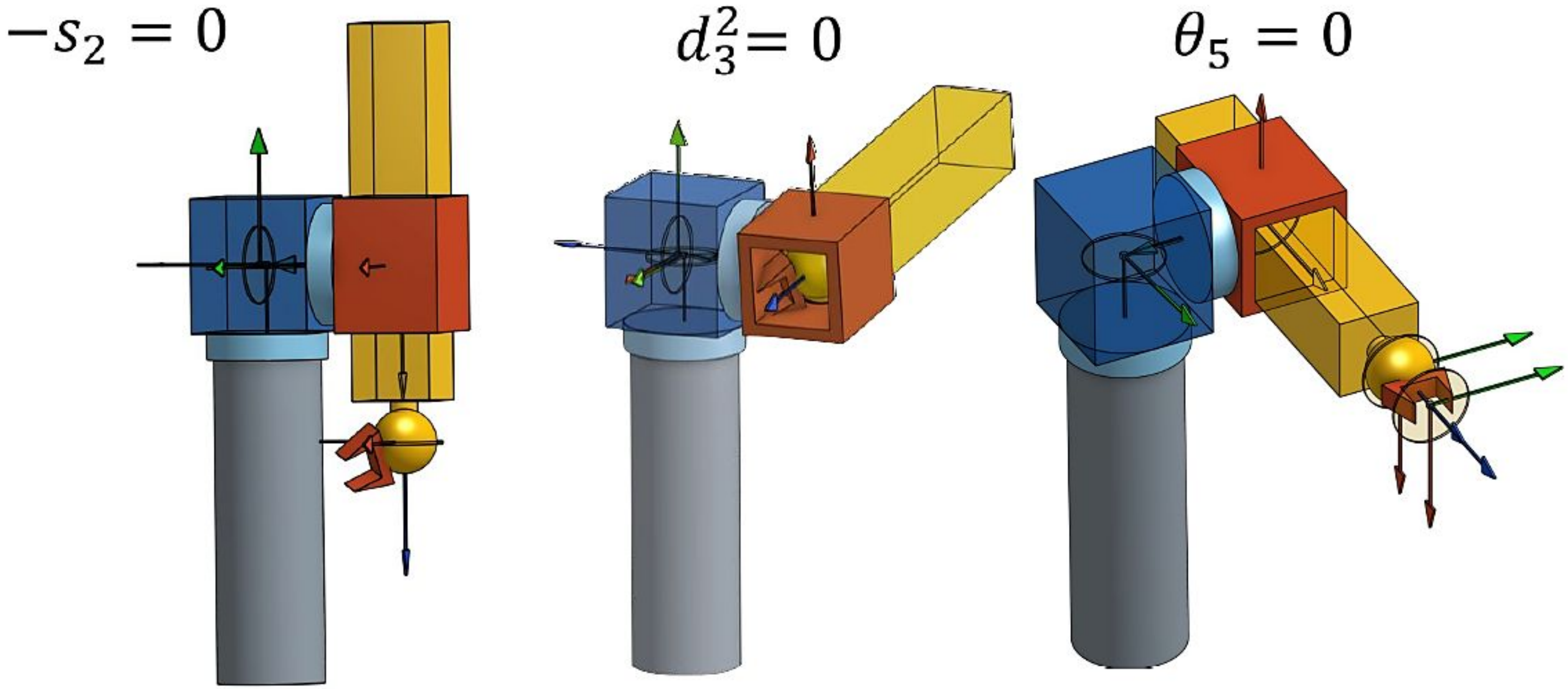
$$-s_2 = 0$$



$$d_3^2 = 0$$

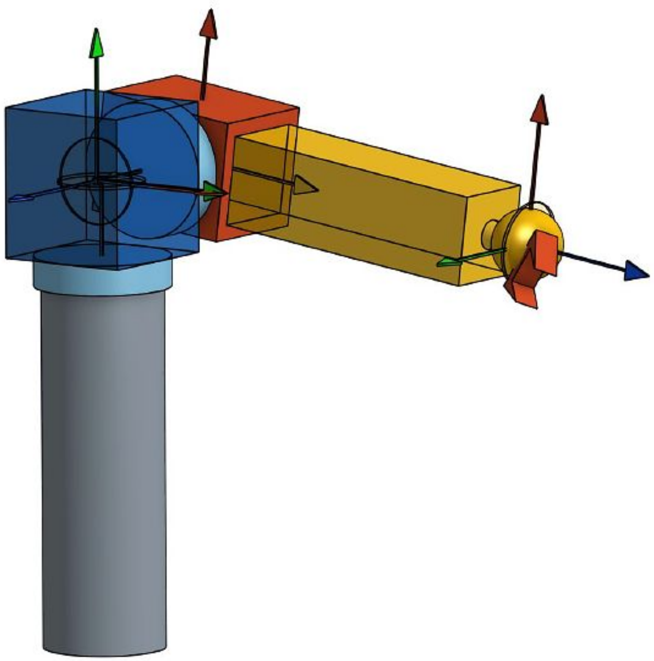


Сингулярные конфигурации системы с 6 степенями свободы



Манипулируемость

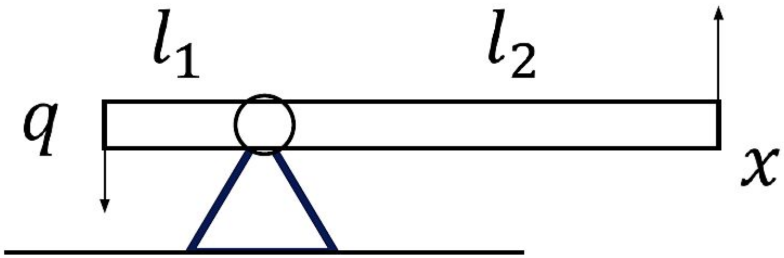
$$\dot{x} = \mathbf{J}\dot{q}$$



Манипулируемость

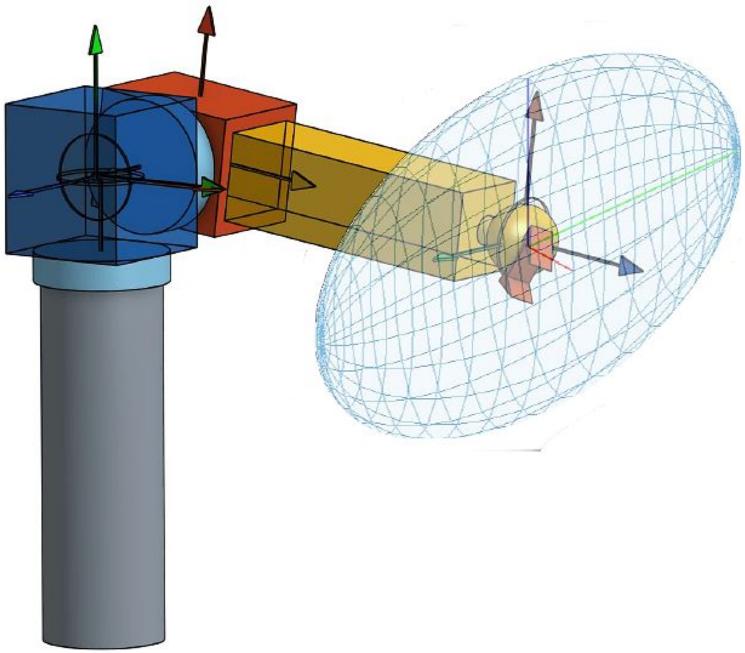
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\dot{x} = \frac{l_2}{l_1}\dot{q}$$



Манипулируемость

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{q}}$$



Манипулируемость

$$\|\dot{q}\| = 1$$

$$\|\dot{q}\| = \dot{q}^T \dot{q}$$

$$\xi^T (\mathrm{J}\,\mathrm{J}^T)^{-1} \xi \leq 1$$

$$\det(\mathrm{J}\,\mathrm{J}^T) = \lambda_1^2 \dots \lambda_n^2$$

Оси эллипсоида – собственные числа

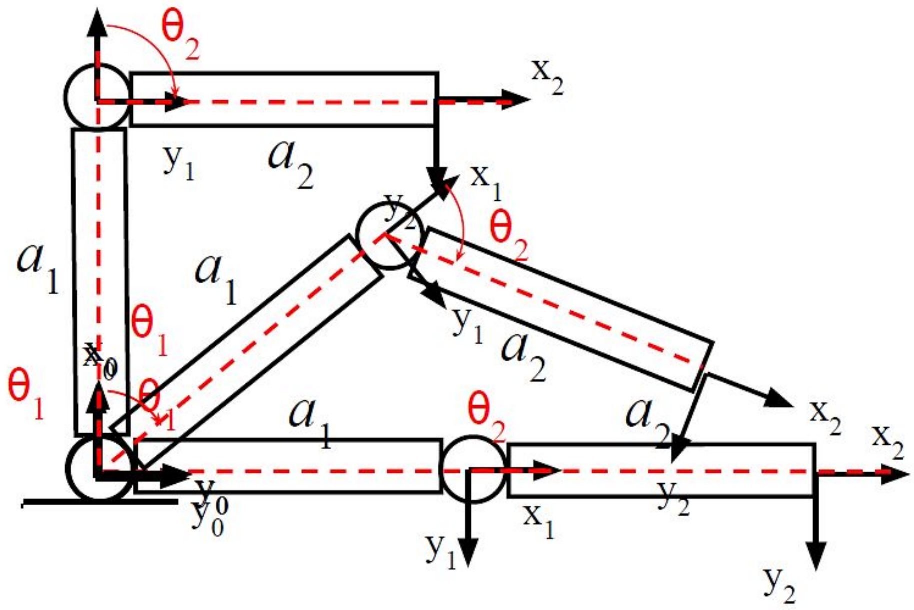
Манипулируемость – $\mu = |\det(\mathrm{J})|$

Число обусловленности – $k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

Манипулируемость

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

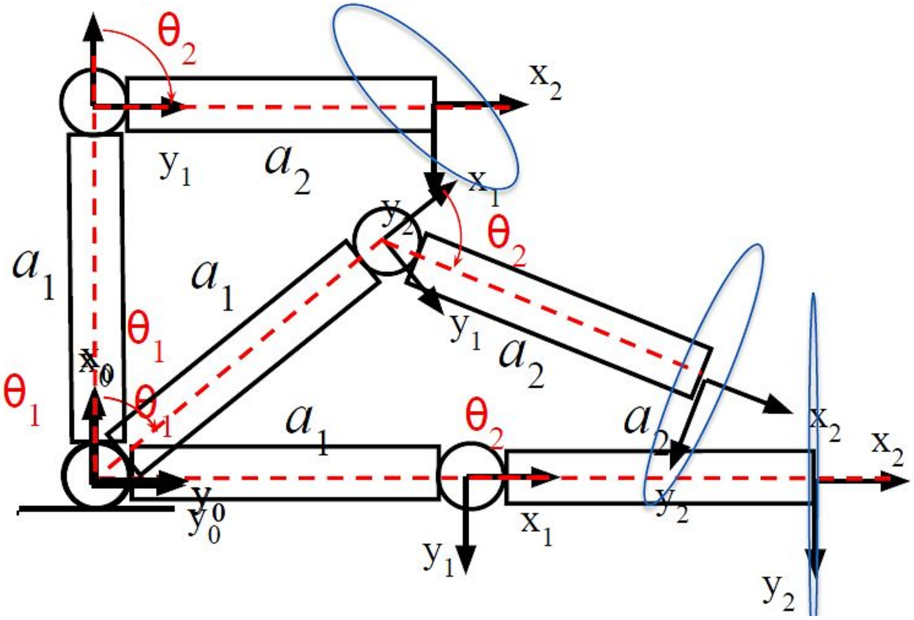
$$\mu = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 \sin(\theta_2)$$



Манипулируемость

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mu = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 \sin(\theta_2)$$



Манипулируемость

$\|\dot{\boldsymbol{q}}\|=1 \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{q}}$