ТЕМА 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Лекция 3. *Напряжения на диаграмме Мора.*

1. Круговая диаграмма напряженного состояния

В предыдущей лекции было показано, что напряжения на наклонных площадках:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha ,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

Эти зависимости представляют уравнение окружности в параметрической форме в системе координат σ и τ. Таким образом, напряженное состояние в точке можно представить графически в виде окружности, координаты точек которой определяют напряжения на соответствующей площадке, а угол α определяет ориентацию площадки. Центр окружности находится на расстоянии $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ от начала координат по оси σ. Радиус окружности равен $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Эта окружность носит название круг Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. Более детально рассмотрим ее в следующих лекциях.

Эта окружность носит название круг Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. Каждая площадка имеет координаты σ, τ. Точки, соответствующие двум взаимно перпендикулярным площадкам, на круге напряжений расположены диаметрально противоположно. Следовательно, зная напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках можно построить окружность. Координаты вертикальной площадки (σ_1; 0), горизонтальной (σ_2; 0).

В системе координат σ_1, τ точка B соответствует вертикальной площадке, точка C – горизонтальной площадке (рис.).

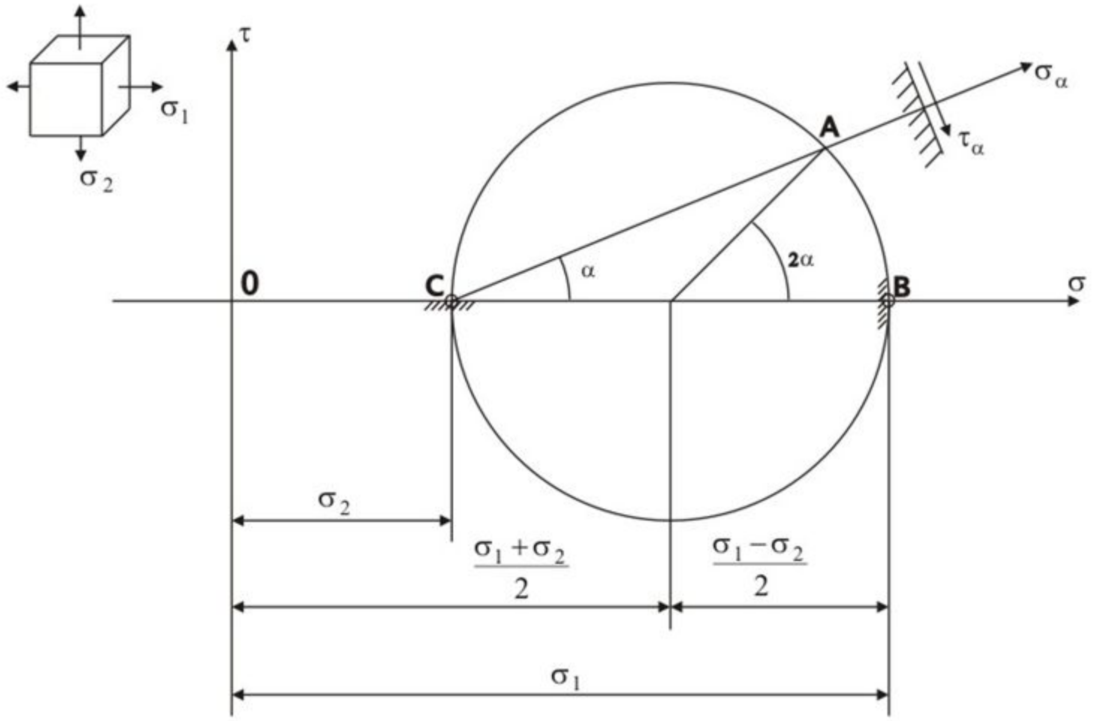

Рисунок – Круговая диаграмма напряженного состояния

Точка А соответствует площадке, нормаль к которой расположена под углом α к горизонтали. Для определения направления напряжений σ_α и τ_α находим на круге напряжений полюс круга, точку, где пересекаются все нормали к площадкам. Находим полюс следующим образом, в точке В нормаль к площадке – горизонтальная линия, в точке С нормаль к площадке – вертикальная линия, они пересекаются в точке С, эта точка и является полюсом. Соединив точки А и С прямой, получим направление напряжения σ_α и соответственно τ_α (рис.).

Если заданы площадки общего положения, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, определяемые при том или ином методе расчета, то координаты точек, соответствующих вертикальным и горизонтальным площадкам соответственно (σ_x, τ_{yx}), горизонтальной (σ_y, τ_{yx}) (рисунок ниже). Для построения круга напряжений примем, что в данном случае $\sigma_x > \sigma_y$. Центр круга имеет координату $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, радиус круга равен

$$\mathbf{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

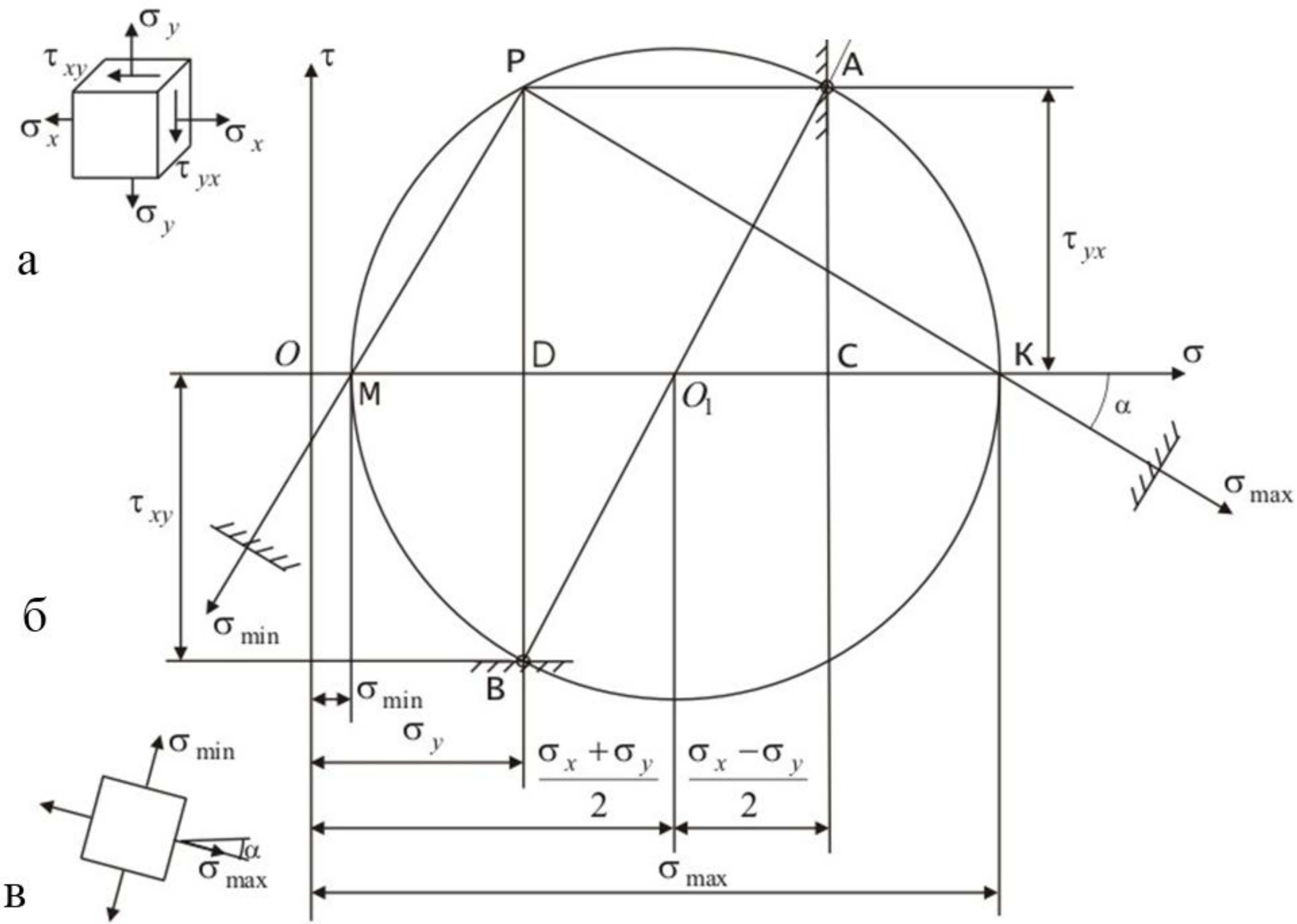

Рисунок – Круговая диаграмма напряженного состояния 2

Главным площадкам соответствуют точки К и М, в этих площадках действуют наибольшие и наименьшие напряжения.

Наибольшие и наименьшие напряжения равны

$$\sigma_{max} = 00_1 + 0_1K = 00_1 + R,$$

$$\sigma_{min} = 00_1 - 0_1M = 00_1 - R.$$

После подстановки отрезков получаем

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2},$$

затем обозначаем напряжения согласно принятой зависимости

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$

Направление главных напряжений определяется на основании зависимости

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

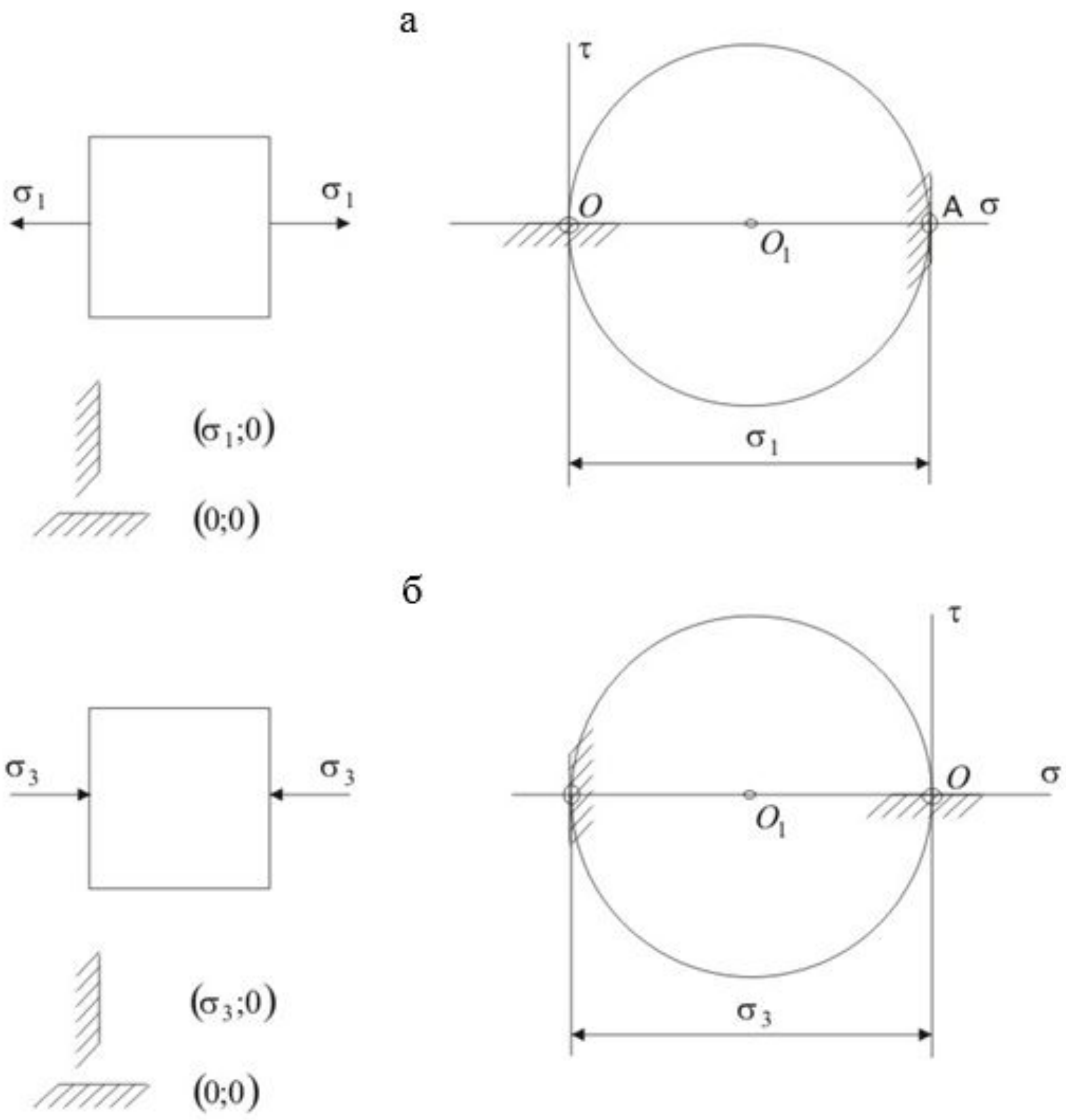

Рисунок – Круговая диаграмма напряженного состояния при растяжении (а) и при сжатии (б)

Рассмотрим построение диаграммы напряжений для объемного напряженного состояния. Для площадок параллельных осям x, y, z строим круги Мора (рисунок ниже).Каждой точке любой окружности соответствует определенная площадка. Однако, точки, расположенные на трех кругах не исчерпывают всего множества площадок, проходящих через заданную точку. Точки, соответствующие площадкам, не параллельным ни одной из главных осей, расположены внутри заштрихованного криволинейного треугольника ABC, образованного тремя совмещенными кругами Мора. Наибольшие касательные напряжения равны радиусу на

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

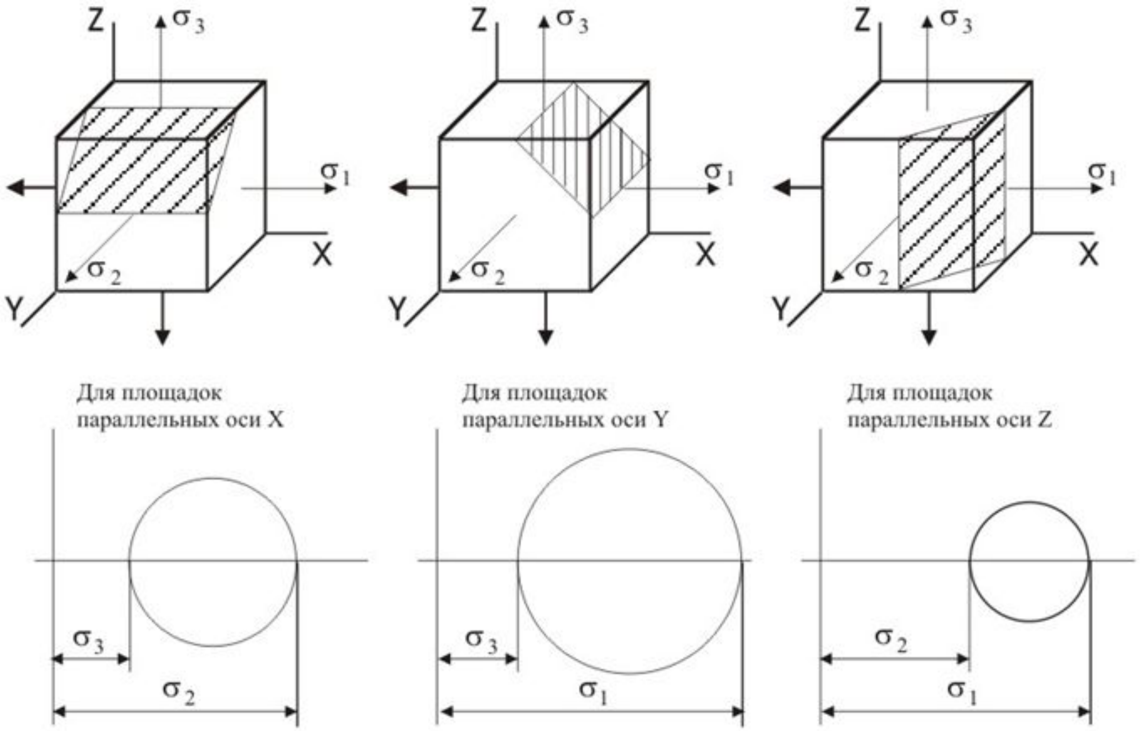

Рисунок – Круговые диаграммы для объемного напряженного состояния

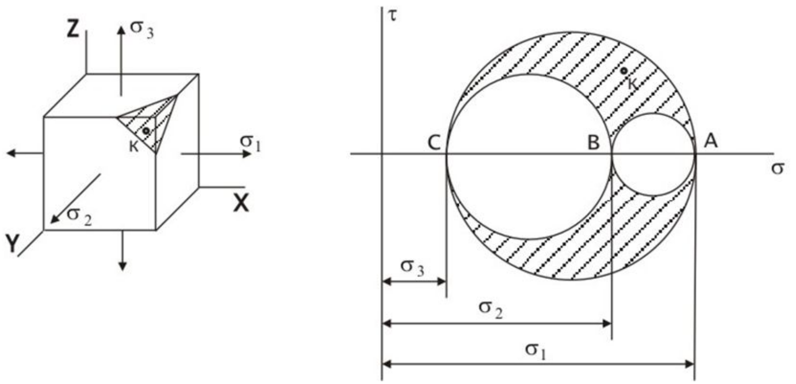

Рисунок – Круговая диаграмма напряжений для объемного напряженного состояния

Если по граням элемента, вырезанного вокруг точки, действуют только касательные напряжения, то такое напряженное состояние называется ***чистым сдвигом*** (рисунок ниже).

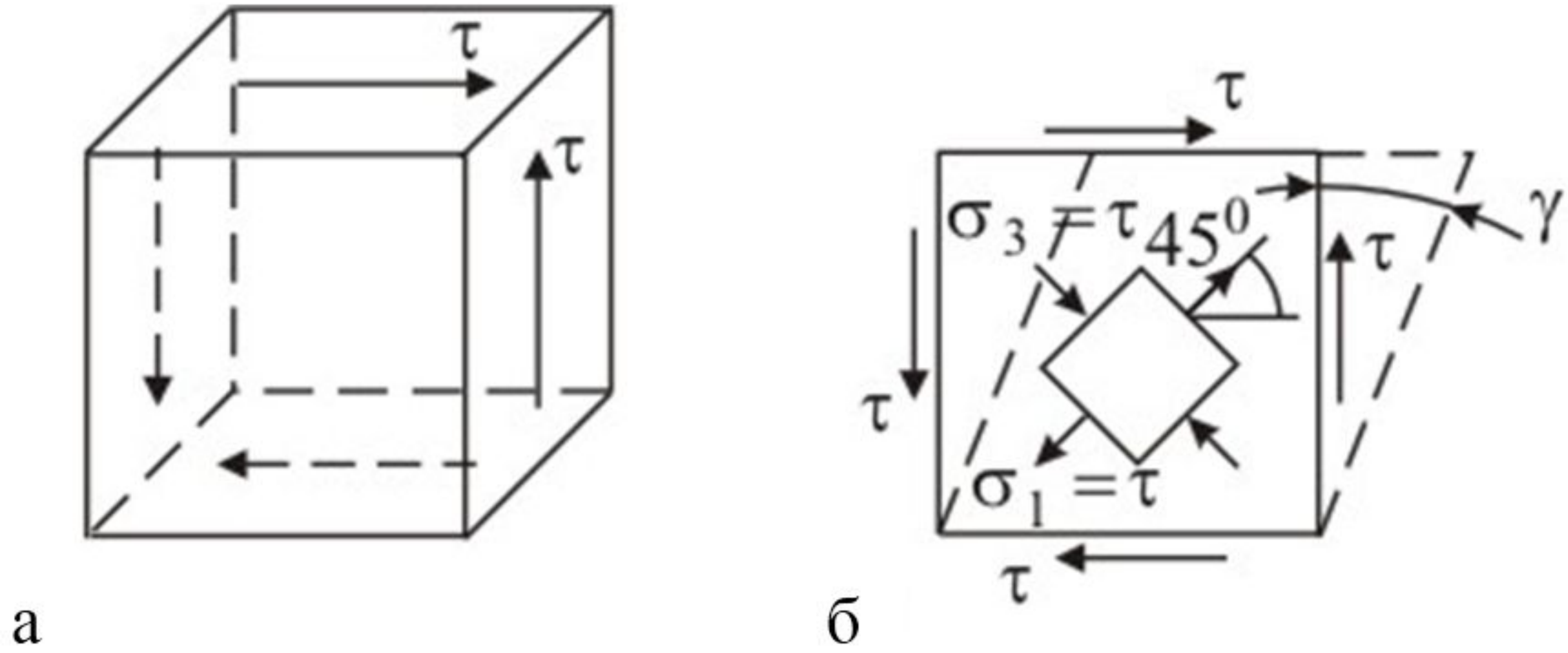

Рисунок – Чистый сдвиг

При действии касательных напряжений элемент деформируется (рисунок, б), вертикальные грани поворачиваются на угол γ, этот угол еще называют *угловой деформацией*.

Закон Гука при сдвиге имеет вид

$$\boldsymbol{\tau = \gamma G},$$

где G - модуль сдвига,

$$\mathbf{G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}}.$$ (выводится аналитически!)

Главные направления расположены под углом $\alpha = 45^0$ и равны

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = - \tau.$$

Графическое представление этого напряженного состояния (координаты точек соответствующих площадок (0; - τ), (0; τ)) дано на рисунке ниже. Полюс круга находится в точке В, направление главных напряжений определяется прямыми ВС и ВД.

При объемном напряженном состоянии между компонентами напряженного и деформированного состояния существует определенная зависимость. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название обобщенного закона Гука. Наиболее простую форму обобщенный закон Гука принимает для изотропного тела, в этом случае коэффициент пропорциональности между компонентами напряженного и деформированного состояний не зависят от ориентации осей в точке.

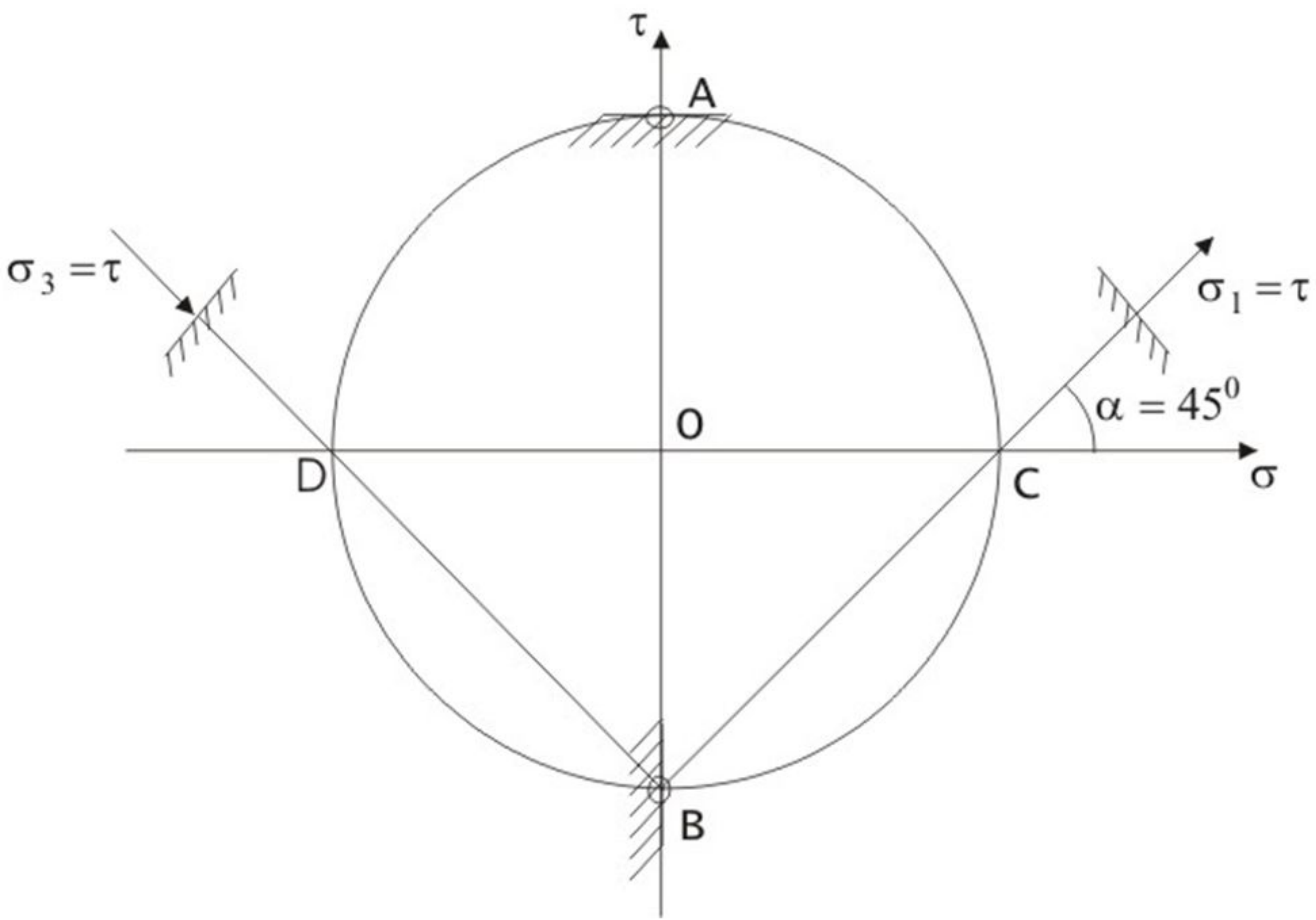

Рисунок – Круговая диаграмма при чистом сдвиге

2. Обобщенный закон Гука

Чтобы получить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, необходимо воспользоваться принципом независимости действия сил. Линейные деформации в направлении действие напряжений σ_1, σ_2, σ_3 определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)\right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)\right],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

Для оценки опасности напряженного состояния необходимо определить *потенциальную энергию деформации* при объемном напряженном состоянии. Потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных по поверхности этого объема. Нормальная сила $\sigma_1 dydz$ на перемещении $\varepsilon_1 dx$ совершает работу

$$\frac{1}{2}\sigma_1 dydz\,\varepsilon_1 dx.$$

Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие. Если потенциальную энергию отнести к единице объема, то получим удельную потенциальную энергию деформации

$$U = \frac{1}{2E}\cdot\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\cdot(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

Получим выражения для так называемой энергии изменения формы и энергии изменения объема. Эти выражения потребуются в дальнейшем при изучении вопросов, связанных с пластическими деформациями и предельными напряженными состояниями.

Деление внутренней потенциальной энергии на две указанные составляющие является условным и выполняется по следующему принципу. Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин (рисунок ниже)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_1^1;\ \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_2^1;\ \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma_3^1,$$

в результате чего напряженное состояние разделяется на два. Первое напряженное состояние представляет собой всестороннее растяжение

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

а второе является дополнением к нему до заданного напряженного состояния.

а второе является дополнением к нему до заданного напряженного состояния.

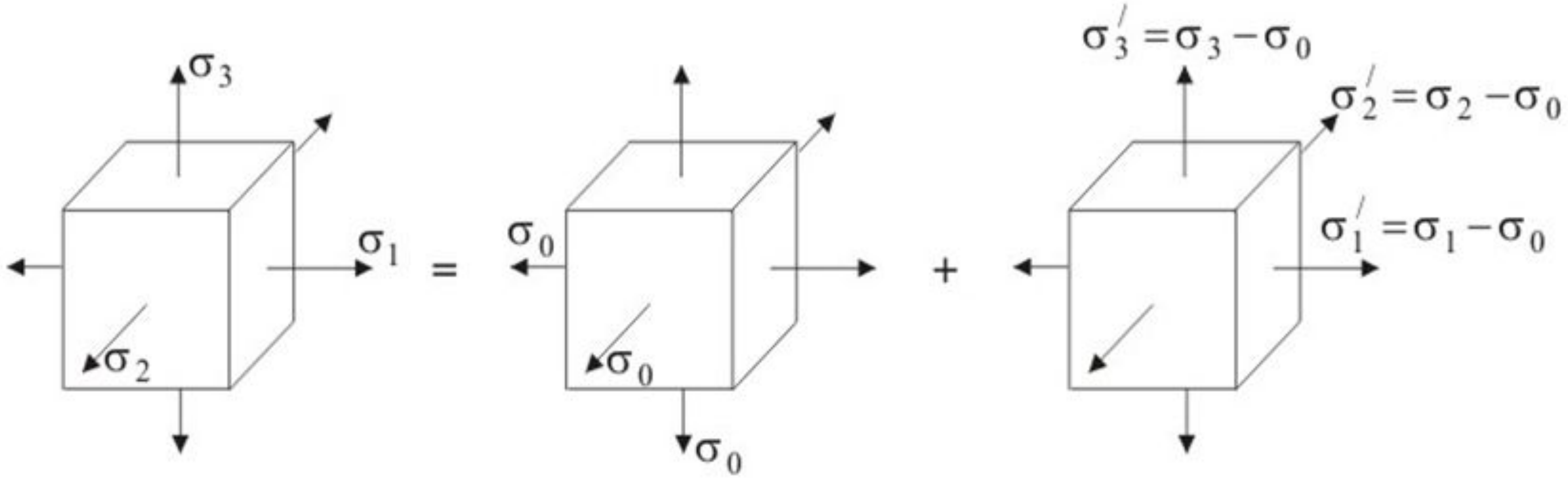

Рисунок – Представление напряженного состояния

При указанном условии система сил первого напряженного состояния (σ_0) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния. Точно так же и силы второго напряженного состояния не производят работы на перемещениях первого.

Внутренняя энергия при этом разбивается на две части, соответствующие двум напряженным состояниям

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathbf{об}} + \mathbf{U}_{\mathbf{ф}},$$

где $U_{об}$ - потенциальная энергия изменения объема;

$U_{ф}$ – потенциальная энергия изменения формы, или энергия формоизменения.

Окончательно получаем для первого напряженного состояния

$$\mathbf{U}_{\mathbf{об}} = \frac{\mathbf{1 - 2 \cdot \mu}}{\mathbf{GE}} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

для второго напряженного состояния

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{1 + \mu}}{\mathbf{GE}} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

Представленные выше зависимости широко используются в расчетной практике.