

Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 1

План лекции

- Множества: понятия и операции над множествами
- Основные принципы комбинаторики (правила сложения и умножения)
- принцип Дирихле



Лаплас: "...теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению."

Элементы теории множеств

- ***Множество*** – это совокупность некоторых предметов (объектов), объединенных в одно целое по какому-либо признаку
- Предметы, из которых состоит множество называются его ***элементами***

Способы задания множеств

1. Перечисление его элементов

$$\mathbf{A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}}$$

2. Указание свойства, по которому можно судить принадлежит элемент множеству или не принадлежит

$$\mathbf{A = \{x|P(x)\}},$$

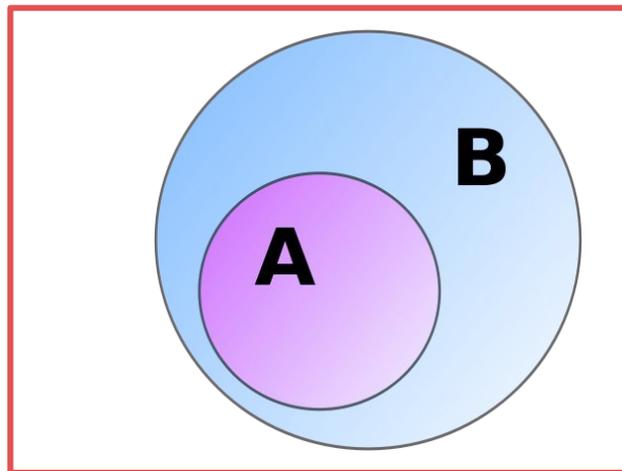
где $P(x)$ — характеристическое свойство

- 
- Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются **конечными** множествами. Если же число элементов множества неограниченно, то такое множество называется **бесконечным**
 - Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** множеством (\emptyset).
 - Множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов

Подмножества

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B , то

A – подмножество множества B ($A \subset B$)



Диаграммы Эйлера-Венна

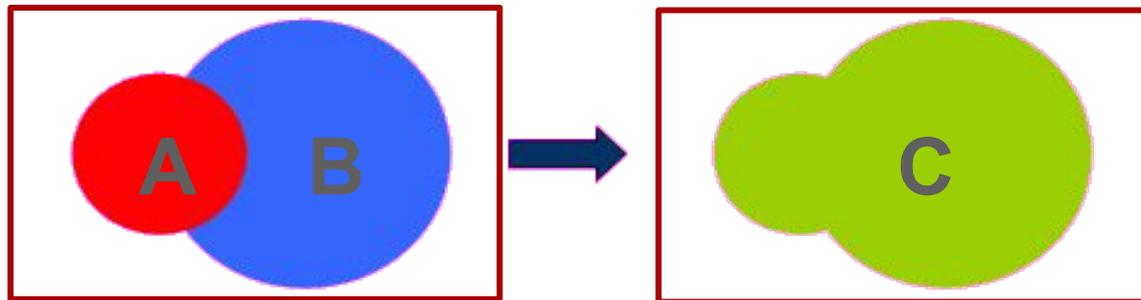
1. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$
2. Пустое множество является подмножеством любого множества:
 $\emptyset \subset A$
3. Каждое множество есть подмножество самого себя: $A \subset A$

Объединение (сумма) множеств

Объединением двух множеств A и B называется такое множество C , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B

- $A + B = B + A$;
- $(A+B) + C = A+(B+C)$;
- $A + A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$;
- $A + \emptyset = A$;
- $A + A = \Omega$.

$$C = A \cup B$$

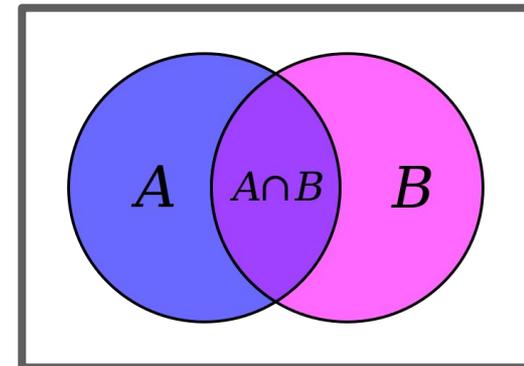


Пересечение (произведение) множеств

Пересечением множеств A и B называется множество C , состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A , и множеству B (множество общих элементов).

- $A \cdot B = B \cdot A$;
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- $A \cdot A = A$;
- $A \cdot \Omega = A$;
- $A \cdot \emptyset = \emptyset$;
- $A \cdot A = \emptyset$

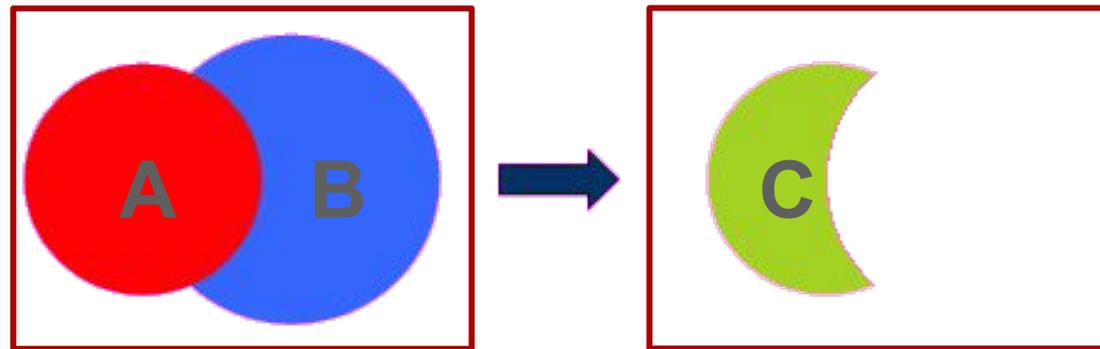
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



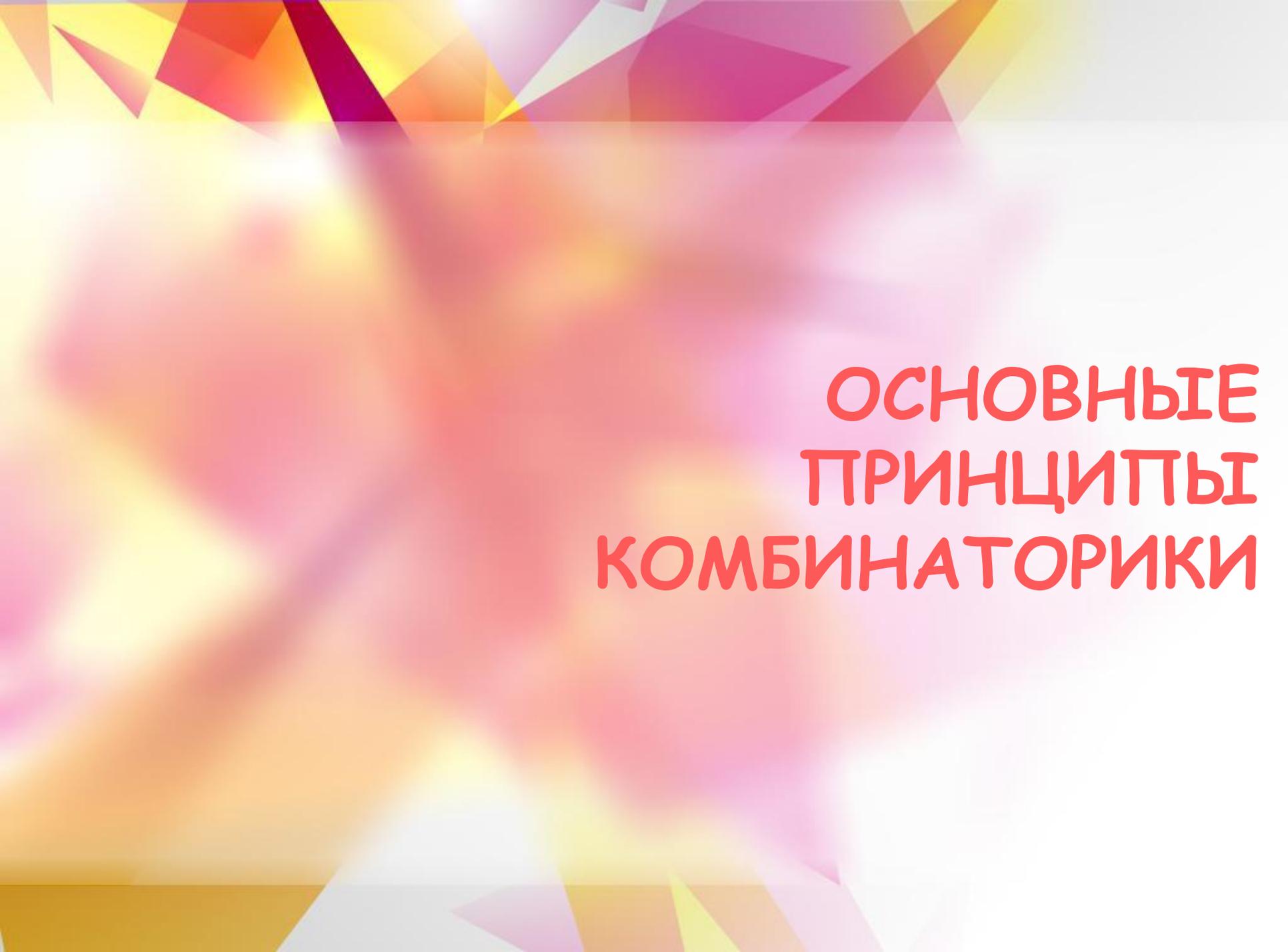
Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, множества A , не принадлежащих множеству B .

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



Если $B \subset A$, то $B \setminus A = \emptyset$

The background features a vibrant, abstract design. It consists of various overlapping geometric shapes, primarily triangles and polygons, in shades of yellow, orange, red, and purple. These shapes are set against a light, hazy gradient that transitions from white at the top to a soft pinkish-purple at the bottom. The overall effect is bright and energetic.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ

Определение

- **Комбинаторика или теория конечных множеств** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

1. Правило сложения

- Пусть есть два множества объектов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и } B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

- **Количество способов выбрать один объект из A или один объект из B равно суммарному количеству объектов в этих исходных множествах.**

1. Правило сложения.

Пример 1

- $A = \{a, б, \dots, ё, \dots, я\} \quad |A| = 33$
- $B = \{0, 1, \dots, 9\} \quad |B| = 10$
- Найдите количество способов либо выбрать одну букву, либо выбрать одну цифру

** Модуль множества – это мощность этого множества, т.е. количество элементов в нем*

2. Правило умножения

- Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
- Количество способов выбрать, выбрать сперва ровно один объект из множества A , а вслед за ним ровно один объект из множества B , а вслед за ним ровно один объект из B , равно n умножить на m .

2. Правило умножения

Пример 2

- $A = \{a, б, \dots, ё, \dots, я\} \quad |A| = 33$
- $B = \{0, 1, \dots, 9\} \quad |B| = 10$

$a_1, b_1; a_1, b_2; a_1, b_3; \dots a_1, b_m$

$a, 0; a, 1; a, 2; \dots a, 9$

$a_2, b_1; a_2, b_2; a_2, b_3; \dots a_2, b_m$

$б, 0; б, 1; б, 2; \dots б, 9$

.....

.....

.....

...

$a_n, b_1; a_n, b_2; a_n, b_3; \dots a_n, b_m$

$я, 0; я, 1; я, 2; \dots я, 9$

последовательности, которые можно
составить из двух объектов, их получается
 $33 \cdot 10$ штук.

Следствие из правила умножения

Пусть у нас есть множества A_1, \dots, A_k ,
каждое из которых состоит из
некоторого числа объектов. $|A_i| = n_i$.

Если требуется осуществить
последовательно какие-либо k
действий, причем первое можно
выполнить n_1 способами, второе – n_2
способами и т.д., то выполнить *хотя бы*
одно из этих действий можно
 $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ способами

3. Принцип Дирихле

Есть n ящиков и $n+1$ кролик. Как ни рассаживай кроликов по ящикам найдется ящик, в котором окажутся, хотя бы, то есть, как минимум, 2 кролика.

3. Принцип Дирихле

Пример с квадратом

- Есть квадрат, нарисованный на плоскости, со стороной. И в этот квадрат кидаются 5 совершенно произвольных точек.
- Доказать, что как бы 5 точек ни были расположены внутри квадрата со стороной 2, обязательно найдется две из них, таких, что расстояние между ними не превосходит $\sqrt{2}$.