Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 1

План лекции

- Множества: понятия и операции над множествами
- Основные принципы комбинаторики (правила сложения и умножения)
- принцип Дирихле

Лаплас: "...теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению."

Элементы теории множеств

- ***Множество*** – это совокупность некоторых предметов (объектов), объединенных в одно целое по какому-либо признаку
- Предметы, их которых состоит множество называются его ***элементами***

Способы задания множеств

1. Перечисление его элементов

   A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0}

2. Указание свойства, по которому можно судить принадлежит элемент множеству или не принадлежит

   A = {x|P(x)},

где P(x) — характеристическое свойство

- Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются ***конечными*** множествами. Если же число элементов множества неограниченно, то такое множество называется ***бесконечным***

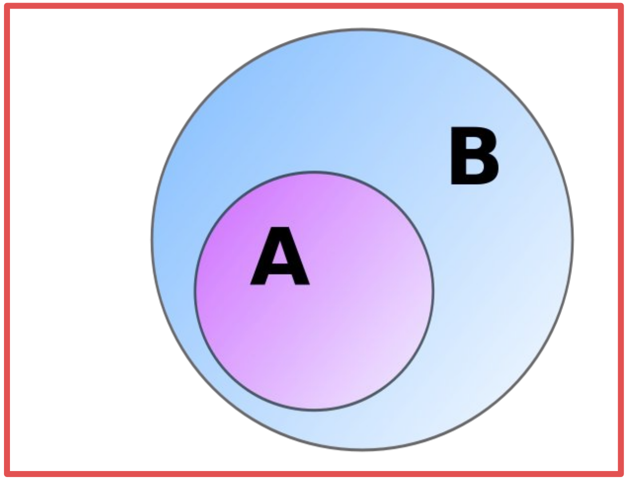
- Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством ($\varnothing$).

- Множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов

Подмножества

Если каждый элемент множества А является также элементом множества В, то

***А – подмножество множества* В (А ⊂ В)**



Диаграммы Эйлера-Венна

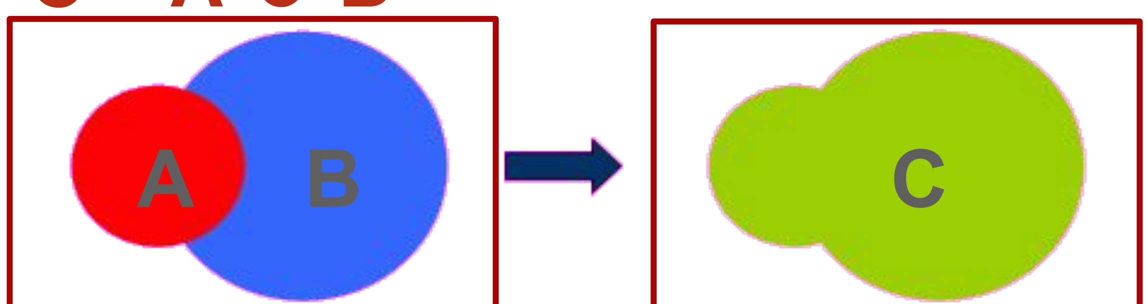
1. Если **А ⊂ В и В ⊂ А, то А = В**
2. Пустое множество является подмножеством любого множества: **∅⊂ А**
3. Каждое множество есть подмножество самого себя: **А ⊂ А**

Объединение (сумма) множеств

Объединением двух множеств A и B называется такое множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B

- $A + B = B + A$;
- $(A+B) + C = A+(B+C)$;
- $A + A = A$;
- $A+\Omega = \Omega$;
- $A + \varnothing = A$;
- $A + A = \Omega$.

$C = A \cup B$

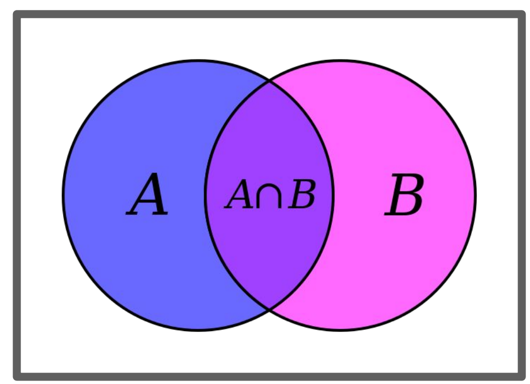


Пересечение (произведение) множеств

Пересечением множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству А, и множеству В (множество общих элементов).

- $A \cdot B = B \cdot A$;
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- $A \cdot A = A$;
- $A \cdot \Omega = A$;
- $A \cdot \varnothing = \varnothing$;
- $A \cdot A = \varnothing$

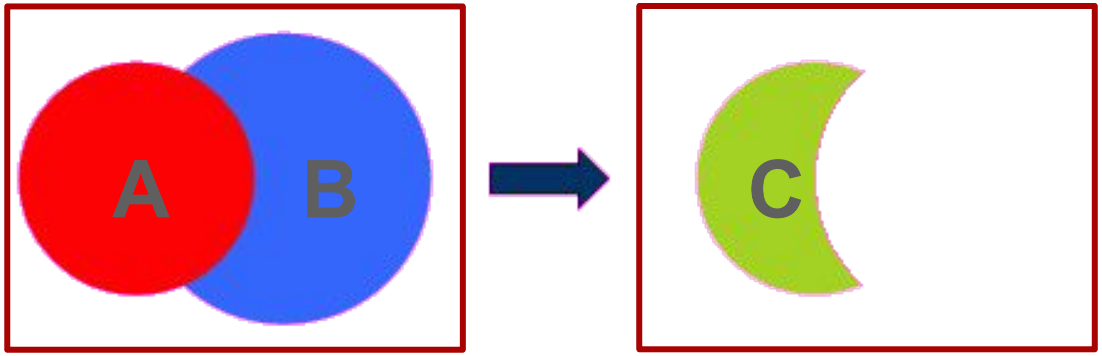
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



Разность множеств

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов, множества *A*, не принадлежащих множеству *B*.

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



Если B ⊂ A, то B \ A = ∅

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ

Определение

- ***Комбинаторика или теория конечных множеств*** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

1. Правило сложения

- Пусть есть два множества объектов:

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots b_m\}$

- **Количество способов выбрать один объект из A или один объект из B равно суммарному количеству объектов в этих исходных множествах.**

1. Правило сложения.

Пример 1

- A = {а, б, ..., ё, …, я} |A| = 33
- B = {0, 1, …, 9} |B| = 10

- Найдите количество способов либо выбрать одну букву, либо выбрать одну цифру

**** Модуль множества – это мощность этого множества, т.е. количество элементов в нем***

2. Правило умножения

- Пусть A = $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$, B = $\{b_1, b_2, \dots b_m\}$
- Количество способов выбрать, выбрать сперва ровно один объект из множества A, а вслед за ним ровно один объект из множества B, а вслед за ним ровно один объект из B, равно n умножить на m.

2. Правило умножения

Пример 2

- A = {а, б, ..., ё, …, я} |A| = 33
- B = {0, 1, …, 9} |B| = 10

$\mathbf{a_1, b_1;\ a_1, b_2;\ a_1, b_3; \dots a_1, b_m}$	а, 0; а,1; а, 2; … а, 9
$\mathbf{a_2, b_1;\ a_2, b_2;\ a_2, b_3; \dots a_2, b_m}$	б, 0; б,1; б, 2; … б, 9
……………………………………… ………	…………………………………… …
$\mathbf{a_n, b_1;\ a_n, b_2;\ a_n, b_3; \dots a_n, b_m}$	я, 0; я,1; я, 2; … я, 9

последовательности, которые можно составить из двух объектов, их получается 33*10 штук.

Следствие из правила умножения

Пусть у нас есть множества A_1, ... A_k, каждое из которых состоит из некоторого числа объектов. $|A_i| = n_i$.

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то выполнить *хотя бы одно из этих действий* можно $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$ способами

3. Принцип Дирихле

Есть n ящиков и n+1 кролик. Как ни рассаживай кроликов по ящикам найдется ящик, в котором окажутся, хотя бы, то есть, как минимум, 2 кролика.

3. Принцип Дирихле

Пример с квадратом

- Есть квадрат, нарисованный на плоскости, со стороной. И в этот квадрат кидаются 5 совершенно произвольных точек.
- Доказать, что как бы 5 точек ни были расположены внутри квадрата со стороной 2, обязательно найдется две из них, таких, что расстояние между ними не превосходит $\sqrt{2}$.