

Формулы сложения

.

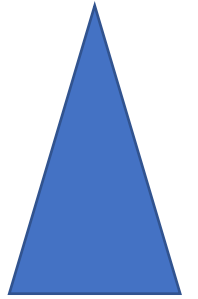
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4734/main/199309/>

Инфоур 8 мин сумма арг
https://youtu.be/Q2MYW_iUDi4

Танг сум арг

<https://youtu.be/o1S1wWvc3Zg>

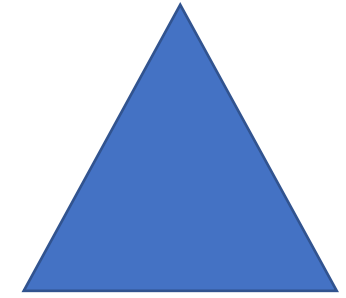
Формулы суммы и
разности
тригонометрических
функций



Инф 13 мин

<https://youtu.be/ufqtkCImmtk>

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение



$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tgy} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tgy} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\sin 6x + \sin 4x = 2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \sin 5x \cdot \cos x.$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin 47^\circ + \sin 13^\circ &= 2 \sin \frac{47^\circ + 13^\circ}{2} \cos \frac{47^\circ - 13^\circ}{2} = 2 \sin \frac{60^\circ}{2} \cos \frac{34^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos \\ &17^\circ = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 17^\circ = \cos 17^\circ. \end{aligned}$$

$$\sin 70^\circ + \sin 34^\circ$$

Упрощаем: $2 \sin$

$$\cos 58^\circ + \cos 34^\circ = 2 \cos \frac{58^\circ + 34^\circ}{2} \cos \frac{58^\circ - 34^\circ}{2} = 2 \cos \frac{92^\circ}{2} \cos \frac{24^\circ}{2}.$$

Упрощаем и получаем: $2 \cos \frac{92^\circ}{2} \cos \frac{24^\circ}{2} = 2 \cos 46^\circ \cos 12^\circ.$

Теперь представим в виде произведения второе выражение $\cos 58^\circ - \cos 34^\circ$:

$$\cos 58^\circ - \cos 34^\circ = -2 \sin \frac{58^\circ + 34^\circ}{2} \sin \frac{58^\circ - 34^\circ}{2} = -2 \sin \frac{92^\circ}{2} \sin \frac{24^\circ}{2}.$$

Упрощаем и получаем: $-2 \sin \frac{92^\circ}{2} \sin \frac{24^\circ}{2} = -2 \sin 46^\circ \sin 12^\circ.$

§22. Преобразование сумм тригонометрических функции в произведения (с.62-65)

22.1.

а) $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ =$

б) $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ =$

$= -2 \cos 30^\circ \sin 10^\circ =$

в) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ =$

$= 2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ =$

г) $\sin 52^\circ - \sin 36^\circ =$

Дано выражение $\sin 68^\circ + \sin^2 19^\circ + \sin 28^\circ + \cos^2 19^\circ$.

Внимательно изучаем данное выражение. Воспользуемся первой формулой:

$$\sin^2 19^\circ + \cos^2 19^\circ = 1.$$

Получилось выражение $\sin 68^\circ + \sin 28^\circ + 1$.

Теперь упрощаем выражение $\sin 68^\circ + \sin 28^\circ$. Используем вторую формулу и получаем:

$$\sin 68^\circ + \sin 28^\circ = 2 \sin \frac{68^\circ + 28^\circ}{2} \cos \frac{68^\circ - 28^\circ}{2} = 2 \sin \frac{96^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ}{2} = 2 \sin 48^\circ \cos 20^\circ$$

Складываем два полученных результата: $2 \sin 48^\circ \cos 20^\circ + 1$.

$$\sin 44^\circ + \sin 37^\circ.$$



Для выполнения данного задания необходимо воспользоваться формулой:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

У нас дано выражение $\sin 44^\circ + \sin 37^\circ$. Значит, $\sin x = 44^\circ$, а $\sin y = 37^\circ$.

Подставляем в формулу и получаем:

$$\sin 44^\circ + \sin 37^\circ = 2 \sin \frac{44^\circ + 37^\circ}{2} \cos \frac{44^\circ - 37^\circ}{2} = 2 \sin \frac{81^\circ}{2} \cos \frac{7^\circ}{2}.$$

$$\text{Упрощаем: } 2 \sin \frac{81^\circ}{2} \cos \frac{7^\circ}{2} = 2 \sin 40,5^\circ \cos 3,5^\circ.$$

Преобразуй выражение $\sin 20x + \sin 2x$.

Для выполнения данного задания необходимо воспользоваться формулой

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Получаем, что $\sin 20x + \sin 2x = 2 \sin \frac{20x+2x}{2} \cos \frac{20x-2x}{2} = 2 \sin \frac{22x}{2} \cos \frac{18x}{2}$.

Упрощаем полученное выражение: $2 \sin \frac{22x}{2} \cos \frac{18x}{2} = 2 \sin 11x \cdot \cos 9x$.

Вычислить $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sin 75^\circ + \cos 75^\circ &= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \\ &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \triangleleft \end{aligned}$$

Преобразовать в произведение $2 \sin \alpha + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 2 \sin \alpha + \sqrt{3} &= 2 \left(\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right). \triangleleft \end{aligned}$$

Упростить выражение

$$\left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \right) \sin \frac{\pi}{12}.$$

► Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\begin{aligned} \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \right) \sin \frac{\pi}{12} &= \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} + \right. \\ &+ \left. \cos \alpha \sin \frac{\pi}{12} + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \alpha. \triangleleft \end{aligned}$$

Упростить выражение:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right);$$

$$3) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

$$4) \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Вычислить:

$$1) \cos 105^\circ + \cos 75^\circ;$$

$$2) \sin 105^\circ - \sin 75^\circ;$$

$$3) \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$4) \cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$5) \sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12};$$

$$6) \sin 105^\circ + \sin 165^\circ.$$

1. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

<https://youtu.be/-NKhaq5kaJ8>

Инф произв функ 8 мин

<https://youtu.be/-NKhaq5kaJ8>

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму используют формулы суммы тригонометрических функций справа налево.

Из формулы суммы синусов $\sin(s + t) + \sin(s - t) = 2 \sin s \cdot \cos t$ следует формула произведения синуса и косинуса:

$$\sin s \cdot \cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}.$$

Из формулы суммы косинусов $\cos(s + t) + \cos(s - t) = 2 \cos s \cdot \cos t$ следует формула произведения косинусов:

$$\cos s \cdot \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}.$$

Из формулы разности косинусов $\cos(s + t) - \cos(s - t) = -2 \sin s \cdot \sin t$ следует формула произведения синусов:

$$\sin s \cdot \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}.$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sin s \cdot \cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}$$

$$\cos s \cdot \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}$$

$$\sin s \cdot \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$



$$\sin 2x \cos 9x = \frac{\sin (2x + 9x) + \sin (2x - 9x)}{2} =$$

$$= \frac{\sin 11x + \sin (-7x)}{2} = \frac{\sin 11x - \sin 7x}{2};$$

Ответ: $\sin 2x \cos 9x = \frac{\sin 11x - \sin 7x}{2};$ ■

$$\sin (-y) = -\sin y$$

Пример 3. Упростить выражение $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{\cos(20^\circ - 40^\circ) - \cos(20^\circ + 40^\circ)}{2} \cdot \sin 80^\circ = \\ &= \frac{\cos(-20^\circ) - \cos 60^\circ}{2} \cdot \sin 80^\circ = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2} \cdot \sin 80^\circ = \\ &= \frac{\cos 20^\circ - \frac{1}{2}}{2} \cdot \sin 80^\circ = \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin 80^\circ = \end{aligned}$$

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ;$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\cos 30^\circ + \cos 10^\circ) - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \cos 30^\circ + \frac{1}{4} \cos 10^\circ - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \end{aligned}$$

$$\sin s \sin t = \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2};$$

$$\cos(-y) = \cos y;$$

$$\cos s \cos t = \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2};$$



Пример 2. Преобразовать произведение в сумму $\cos(2x - y)$
 $\cos(x + 4y)$.

Решение.

$$s = (2x - y); \quad t = (x + 4y);$$

$$\cos(2x - y) \cos(x + 4y) =$$

$$= \frac{\cos((2x - y) + (x + 4y)) + \cos((2x - y) - (x + 4y))}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2x - y + x + 4y) + \cos(2x - y - x - 4y)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(3x + 3y) + \cos(x - 5y)}{2};$$

Ответ:

$$\cos(2x - y) \cos(x + 4y) = \frac{\cos(3x + 3y) + \cos(x - 5y)}{2}. \quad \blacksquare$$

$$\cos s \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2};$$



Решение.

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{\cos(20^\circ - 40^\circ) - \cos(20^\circ + 40^\circ)}{2} \cdot \sin 80^\circ = \\ &= \frac{\cos(-20^\circ) - \cos 60^\circ}{2} \cdot \sin 80^\circ = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2} \cdot \sin 80^\circ = \\ &= \frac{\cos 20^\circ - \frac{1}{2}}{2} \cdot \sin 80^\circ = \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin 80^\circ = \end{aligned}$$

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ;$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\cos 30^\circ + \cos 10^\circ) - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \cos 30^\circ + \frac{1}{4} \cos 10^\circ - \frac{1}{4} \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

$$\sin s \sin t = \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2};$$

$$\cos(-y) = \cos y;$$

$$\cos s \cos t = \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2};$$



Формулы понижения степеней

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$



$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad (5)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos \alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$ и $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$. Знаки $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Вычислить $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -0,02$ и $0 < \alpha < \pi$.

► По формуле (5) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - 0,02}{2} = 0,49$.

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому

$\cos \frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,49} = 0,7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (7)$$

Вычислить $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = 0,8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

► По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - 0,8}{1 + 0,8} = \frac{0,2}{1,8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Упростить выражение $\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2} &= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \triangleleft \end{aligned}$$

Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2 \cos x$.

\triangleright Так как $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2 \cos^2 x = 2 \cos x$, откуда

$$\cos x (\cos x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. В ответе можно

записывать обе серии с одной буквой (k или n).

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус угла, в два раза большего:

1) $\sin^2 15^\circ$; 2) $\cos^2 \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$; 4) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$.

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 2 \cdot 15^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Найти числовое значение выражения:

$$1) 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1;$$

$$2) 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12};$$

$$3) \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin^2 15^\circ;$$

$$4) -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos^2 15^\circ.$$

Пусть $\cos \alpha = 0,6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

$$1) \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$2) \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить:

$$1) \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$2) \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Вычислить:

$$1) \sin 15^\circ; \quad 2) \cos 15^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 22^\circ 30'; \quad 4) \operatorname{ctg} 22^\circ 30'.$$

Упростить выражение:

$$1) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$3) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha};$$

$$4) \frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha};$$

$$5) \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha};$$

Доказать тождество (519—520).

$$1) 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \sin \alpha; \quad 2) 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \sin \alpha;$$

$$3) \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha; \quad 4) \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$1) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$3) \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad 4) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

Доказать, что если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$.Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$.

Решить уравнение:

$$1) 1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}; \quad 2) 1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2};$$

$$3) 1 + \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{3\pi}{2} \right); \quad 4) 1 + \cos 8x = 2 \cos 4x;$$

$$5) 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x = 1; \quad 6) 2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 4x = 1.$$

