Основные понятия теории динамических систем

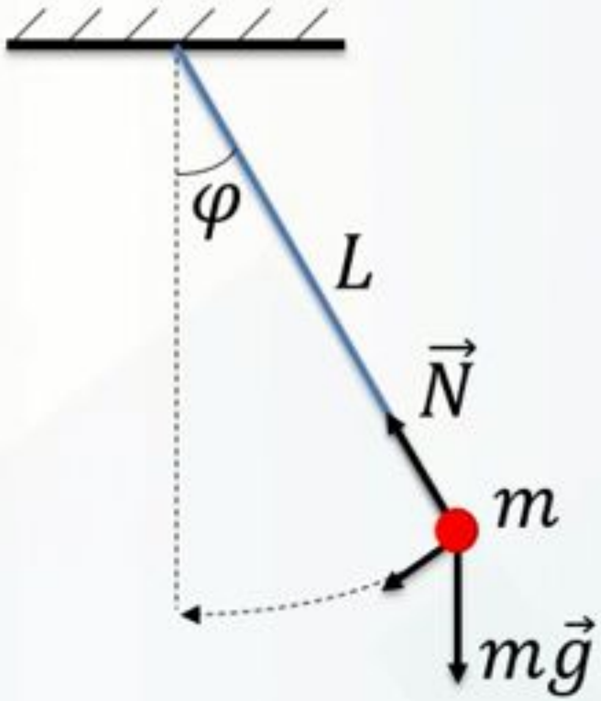
ДС

Под динамической системой понимают любой процесс или объект, для которого характерно:

- однозначно определенное состояние как совокупности некоторых величин в данный момент времени;
- задан закон (эволюция), который описывает изменения начального состояния с течением времени

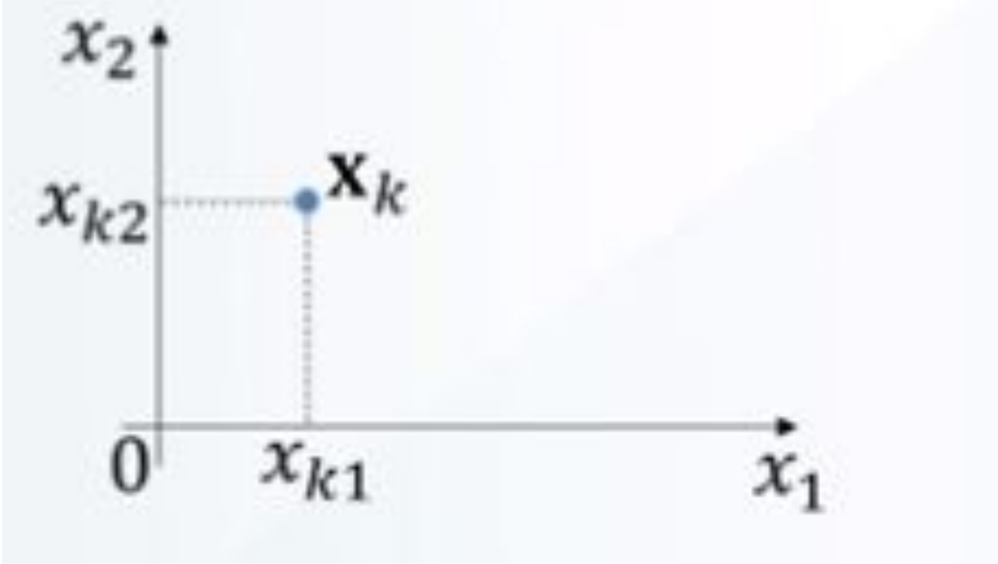
Математический маятник

- $\{\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)\}$ – состояние системы
- $\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$ – закон

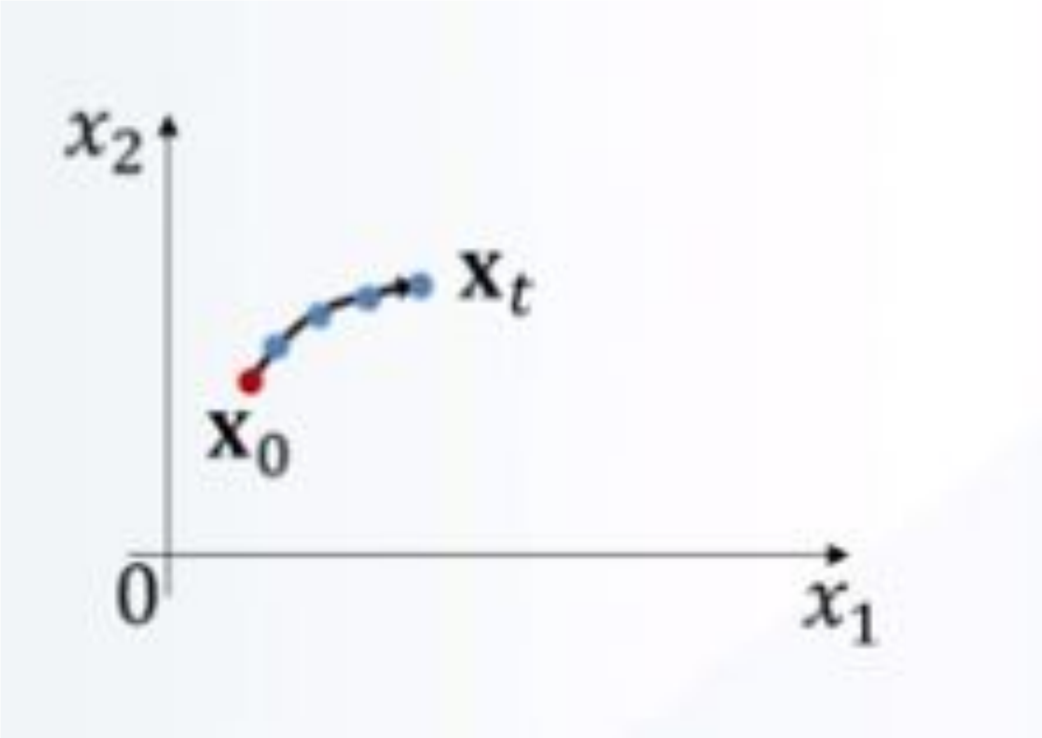


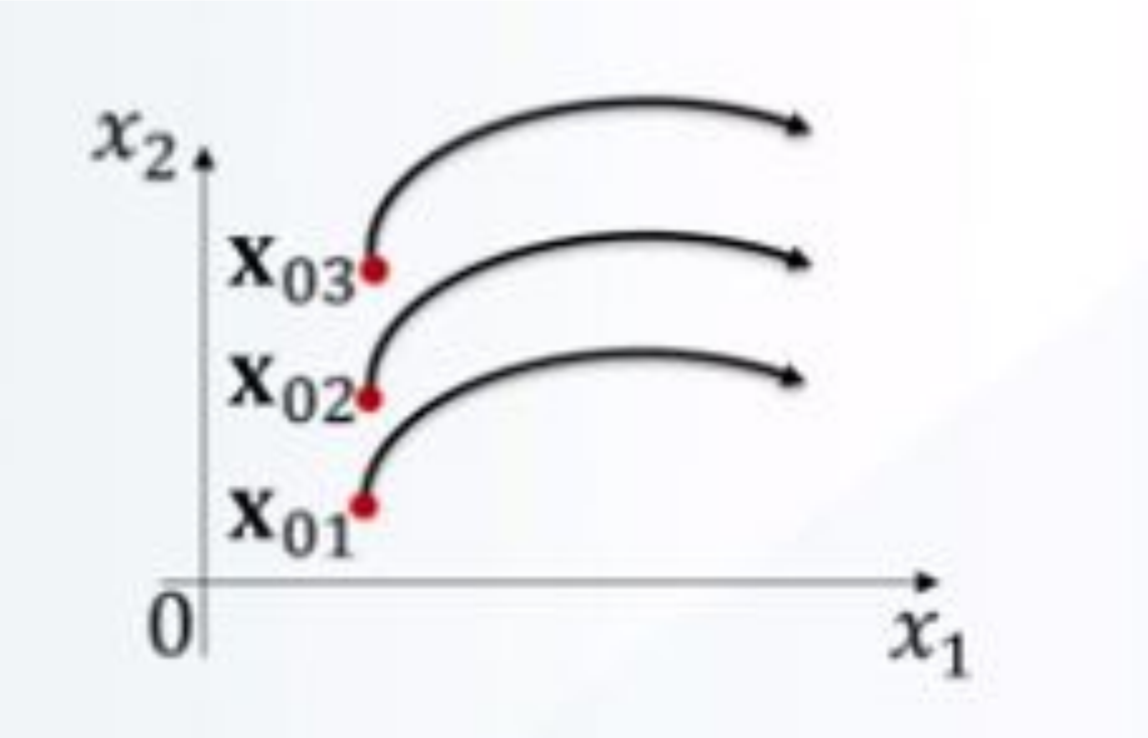
- **Число степеней свободы** – наименьшее число независимых величин (координат), необходимых для однозначного определения состояния системы.
- **Фазовое пространство** – пространство на координатных осях которого отложены значения переменных состояния системы: x_1, x_2, …, x_n, называемых фазовыми переменными.
- **Изображающая точка** – точка, расположенная на фазовом пространстве.
- **Фазовая траектория** – совокупность изображающих точек.
- Совокупность фазовых траекторий при различных начальных условиях называется **фазовым портретом системы**

Одномерное и двумерное фазовое пространство



Фазовая траектория и фазовый портрет





Формальное определение динамической системы

- фазовое пространство *X*, образующее полное метрическое пространство;
- множество моментов времени *T*;
- оператор эволюции *Et* – некоторое отображение, которое каждому состоянию x_0 € *X* в начальный момент времени t_0 € *T* однозначно ставит в соответствие некоторое состояния x_t € *X* в любой другой момент времени *t* € *T*.

Классификация динамических систем

- с непрерывным временем (континуальные системы), т.е. системы, которые задаются дифференциальными уравнениями:
- $\dot{x} = F(x)$
- системы с дискретным временем, *N* – мерные отображения, например, геометрическая прогрессия:
- $x_{n+1} = f(x_n)$
- по виду оператора эволюции:
- - линейные:
- $E_t (x + x') = E_t (x) + E_t (x')$
- $E_t (\alpha \cdot x) = \alpha E_t (x)$

Классификация динамических систем

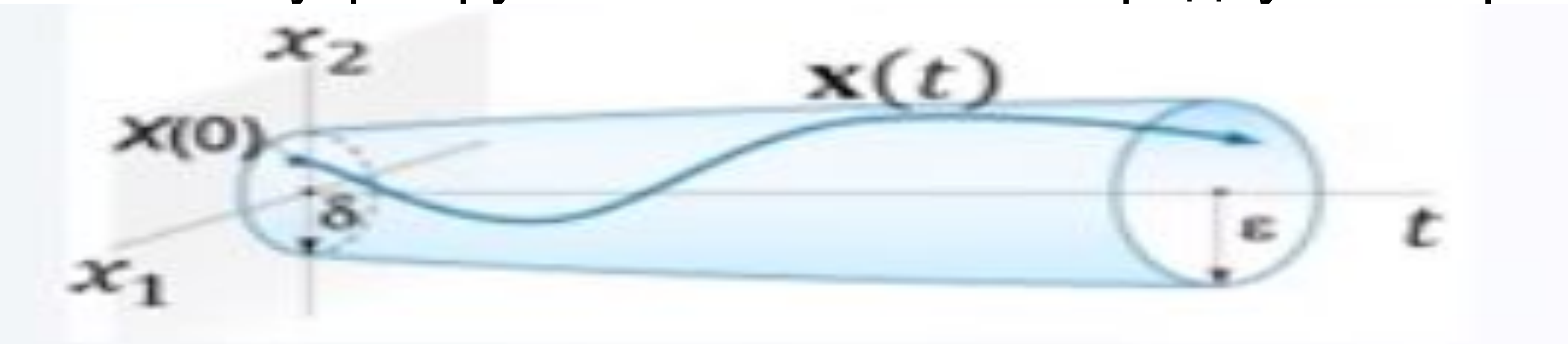
- - нелинейные:
- $E_t (x + x') \neq E_t (x) + E_t (x')$
- автономные, т.е. вектор *F(x)* зависит только от *x* и не зависит от времени:
- $\dot{x} = F(x)$
- неавтономные т.е. вектор *F(x)* зависит не только от координаты *x,* но зависит от времени:
- $\dot{x} = F (x, t)$

Классификация динамических систем

- детерминированные – это все рассмотренные выше системы, когда нет шумов, случайных слагаемых.
- случайные динамические системы – это автономные динамические системы, в которых есть шум определенного вида ε_t
- $\dot{x} = F(x) + \varepsilon_t$

Устойчивость решения динамических систем

- **Устойчивость по Ляпунову**. Решение динамической системы устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $||x_0 - \pi_0|| < \delta$, то $||x(t) - \pi(t)|| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$.
- Таким образом, для двухмерной динамической системы любое решение, которое начинается в δ-окрестности точки π_0 остается внутри трубки с максимальным радиусом ε при всех



Устойчивость решения динамических систем

- **Асимптотическая устойчивость**. Если решение динамической системы устойчиво не только по Ляпунову, но и удовлетворяет соотношению
- $\lim ||x(t) - \pi(t|| = 0$ при условии $t \to \infty$ и $||x_0 - \pi_0|| < \delta$, то решение является асимптотически устойчивым.
- Таким образом, все решения, достаточно близкие к π_0 в начальный момент времени постепенно сходятся к $\pi(t)$ на больших временах. И если решение асимптотически устойчиво, то оно устойчиво и по Ляпунову.

Устойчивость решения динамических систем

- **Экспоненциальная устойчивость**. Если решение динамической системы устойчиво не только по Ляпунову, но из условия $||x_0 – \pi_0|| < \delta$ следует, что $||x(t) – \pi(t)|| \le \alpha\, ||x_0 – \pi_0|| e^{-\beta t}$ для всех $t \ge 0$, то решение является асимптотически устойчивым.
- Все решения, близкие к π_0 в начальный момент времени сходятся к $\pi(t)$ с большей или равной экспоненциальной скоростью. В отличии от предыдущего случая экспоненциальная устойчивость отличается лишь скоростью сходимости решения.

Одномерные динамические системы

- Одномерные динамические системы – это динамические системы на прямой или динамические системы с одной с одной степенью свободы.
- Рассмотрим динамическую систему первого порядка, математическая модель которой задана в следующем виде:
- $\dot{x}_t = F\,(x_t),\ x_t = x\,(t),\ t \geq 0$

1. Аналитический подход решения задачи Коши

- Формулировка задачи Коши: известен закон эволюции и начальное состояние системы, требуется найти решение дифференциального уравнения или интеграл.
- Это самый мощный подход к анализу динамических систем. Но есть один недостаток к анализу нелинейных – не всегда удается получить аналитическое решение задачи.

2. **Численное решение задачи Коши**

- это численный эксперимент, применение численных методов. Однако не всегда удается получить фазовый портрет, так как коэффициенты динамической системы принимают непрерывный набор численных значений.
- Когда пытаются построить фазовую траекторию, теоретически нужно рассмотреть все возможные параметры решений, чтобы не упустить важные параметры, например, бифуркацию.
- Иногда этот подход применяют как дополнение к первому или третьему подходу.

3. **Качественный анализ** или **метод фазовых траекторий**

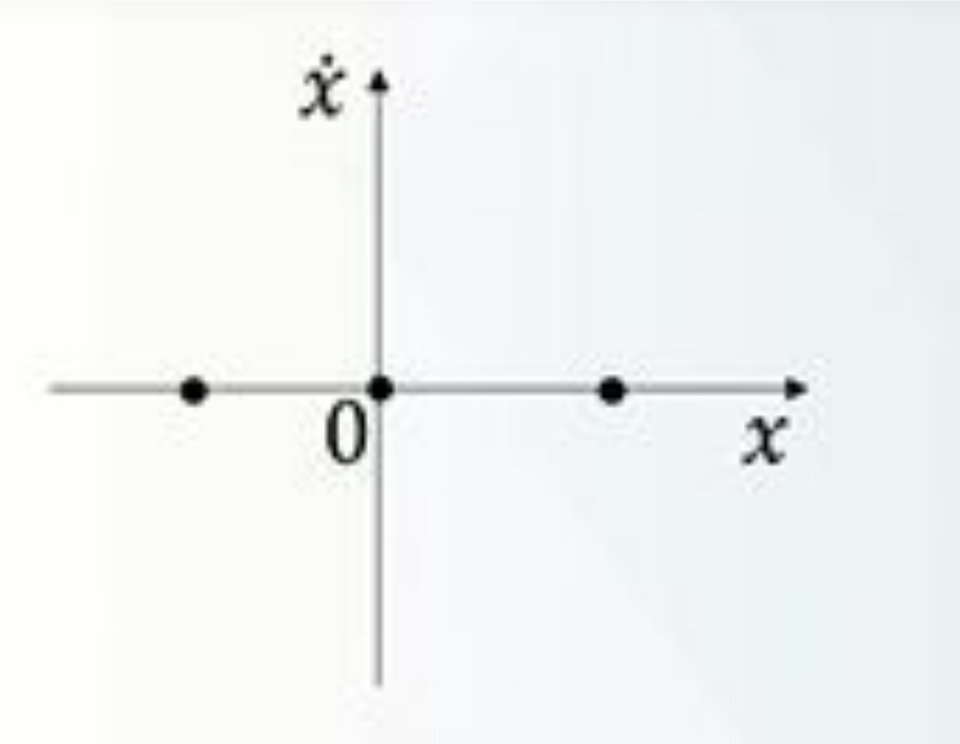
- Позволяет по заданному закону эволюции получить фазовый портрет.
- Применим как к линейным, так и к нелинейным динамическим системам.
- Основное достоинство этого метода – глобальная картина поведения фазовых траекторий. Зная фазовый портрет можно однозначно определить поведение всей динамической системы.
- Есть и ограничения, связанные с числом степеней свободы.
- Для одномерных, двухмерных и трехмерных можно получить решение, а для четырехмерных и выше степеней свободы это становиться затруднительно.
-

Качественный анализ динамических систем

- Задача Коши в рамках качественного анализа формулируется следующим образом.
- Входные данные:
- $\dot{x}_t = F\,(x_0, \alpha)$,
- где
- x_t € R^n – вектор длин переменных;
- α € R^m – вектор параметров системы.
- Необходимо найти компоненты (координаты) α при которых:
- равновесие системы является устойчивым;
- происходит локальная бифуркация в системе.

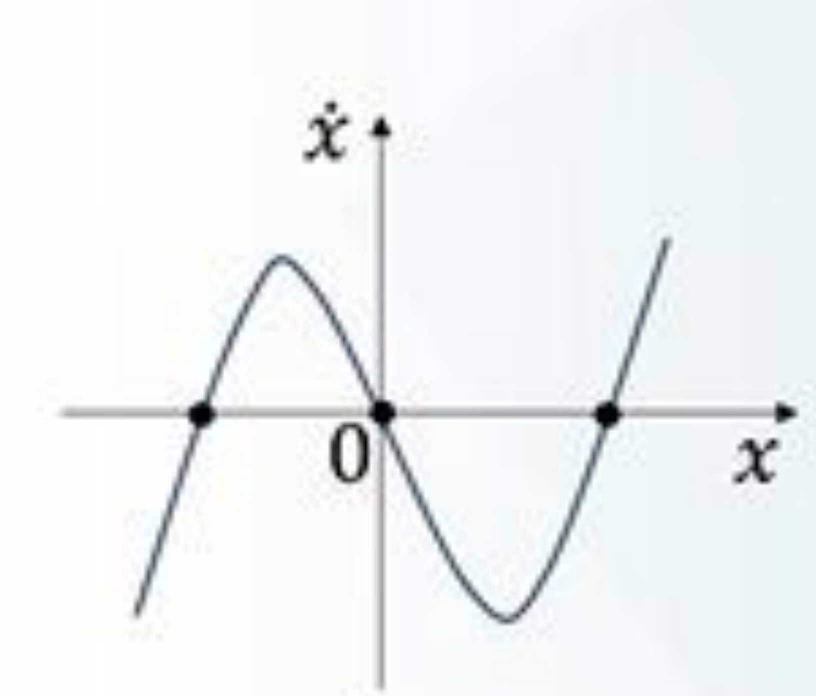
Алгоритм анализа одномерных динамических систем $\dot{x}_t = F(x_t)$

- Шаг 1. Решить уравнение $F(x_t)$ и определить стационарные (фиксированные, равновесные) точки x^* Их может быть одна, две или три, все зависит от функции



Алгоритм анализа одномерных динамических систем $\dot{x}_t = F\,(x_t)$

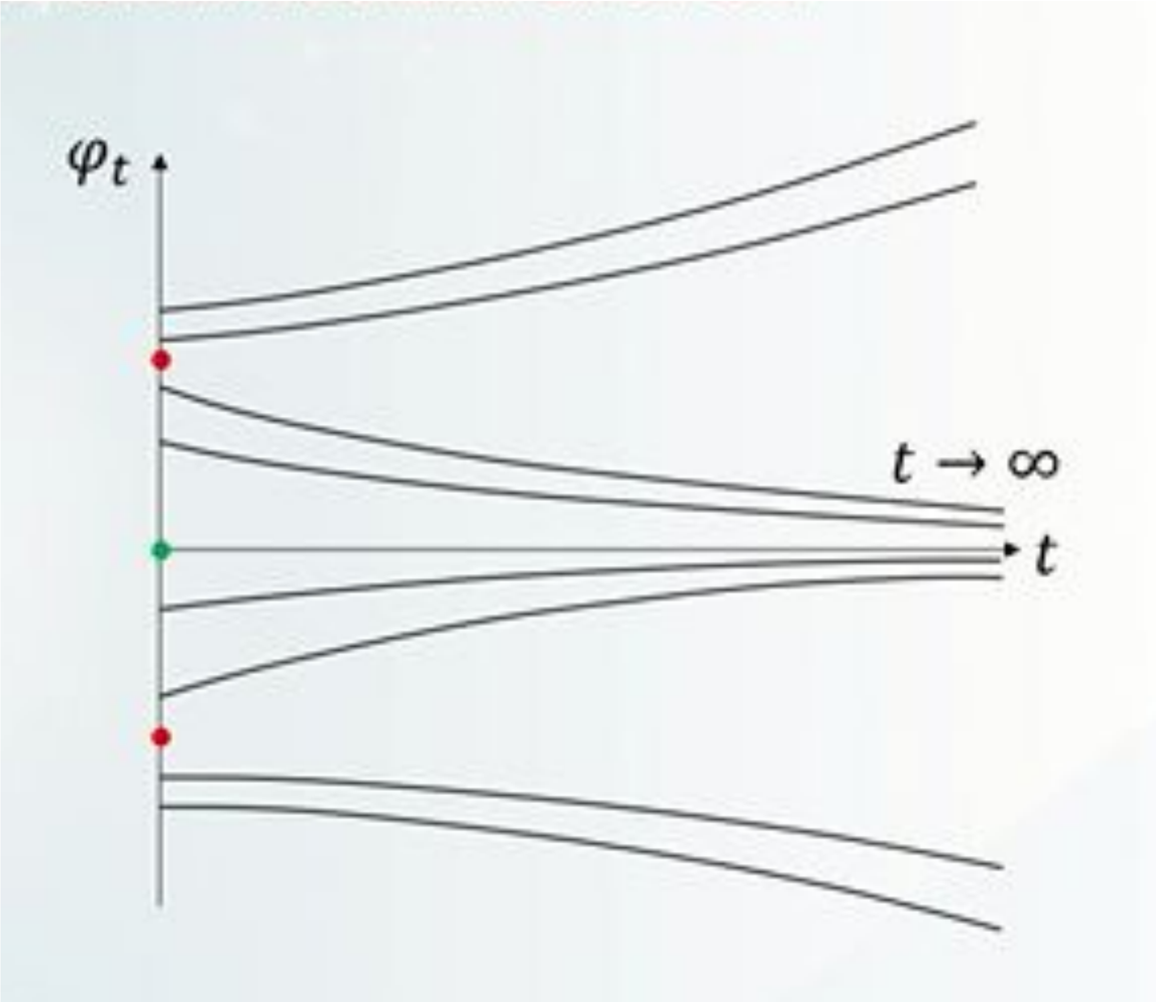
- Шаг 2. Изобразить фазовую траекторию $\dot{x}_t = F\,(x_t)$ на плоскости $x0\dot{x}$. Особенность фазовой траектории в том, что она пересекает ось x в равновесных точках.



Алгоритм анализа одномерных динамических систем $\dot{x}_t = F(x_t)$

- Шаг 3. Классифицировать стационарные точки, т е. определить какие точки являются асимптотически устойчивые, какие неустойчивые.
- Если в некоторой окрестности x^* фазовая траектория убывает, то x^* является асимптотически устойчивой точкой или **аттрактором**.
- Неустойчивая точка – это **репеллер**, фазовая траектория в их окрестности возрастает.

Поведение решений динамической системы вблизи аттрактора и репеллеров

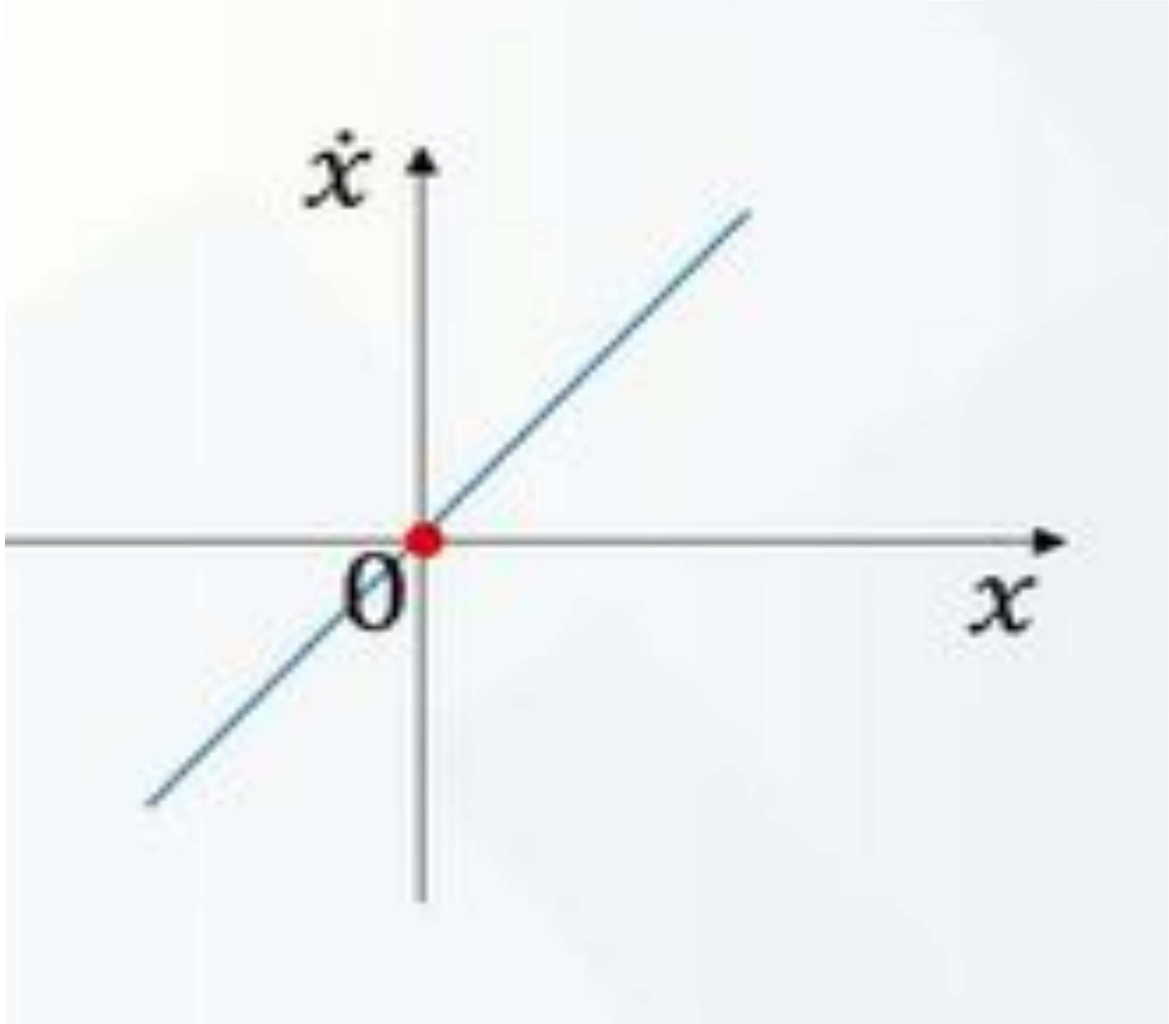


Модель Т. Мальтуса

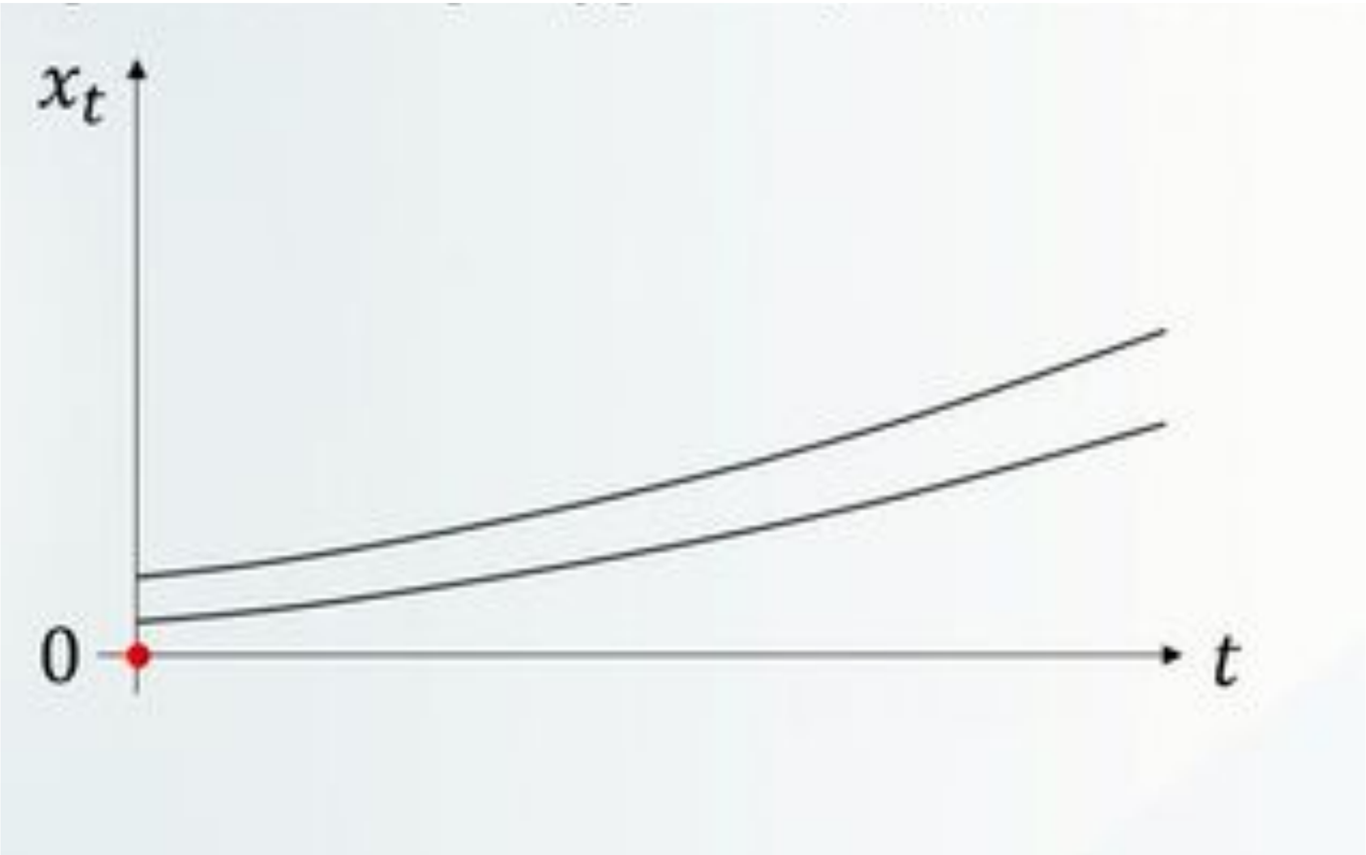
- Т. Мальтус – известный демограф, экономист. Он показал в своем труде «О росте народонаселения», что с увеличением населения, ростом популяции истощаются ресурсы.

- Адаптируем модель Мальтуса к моделированию роста производства продукции без ограничения на потребление ресурсов. Математическая модель представлена ниже:
- $\dot{x}_t = \alpha x_t$,
- где
- $x_t \geq 0$ – количество продукции;
- $\alpha > 0$ – постоянный темп роста продукции.

Модель Т. Мальтуса



Фазовые траектории модели Мальтуса



Выводы:

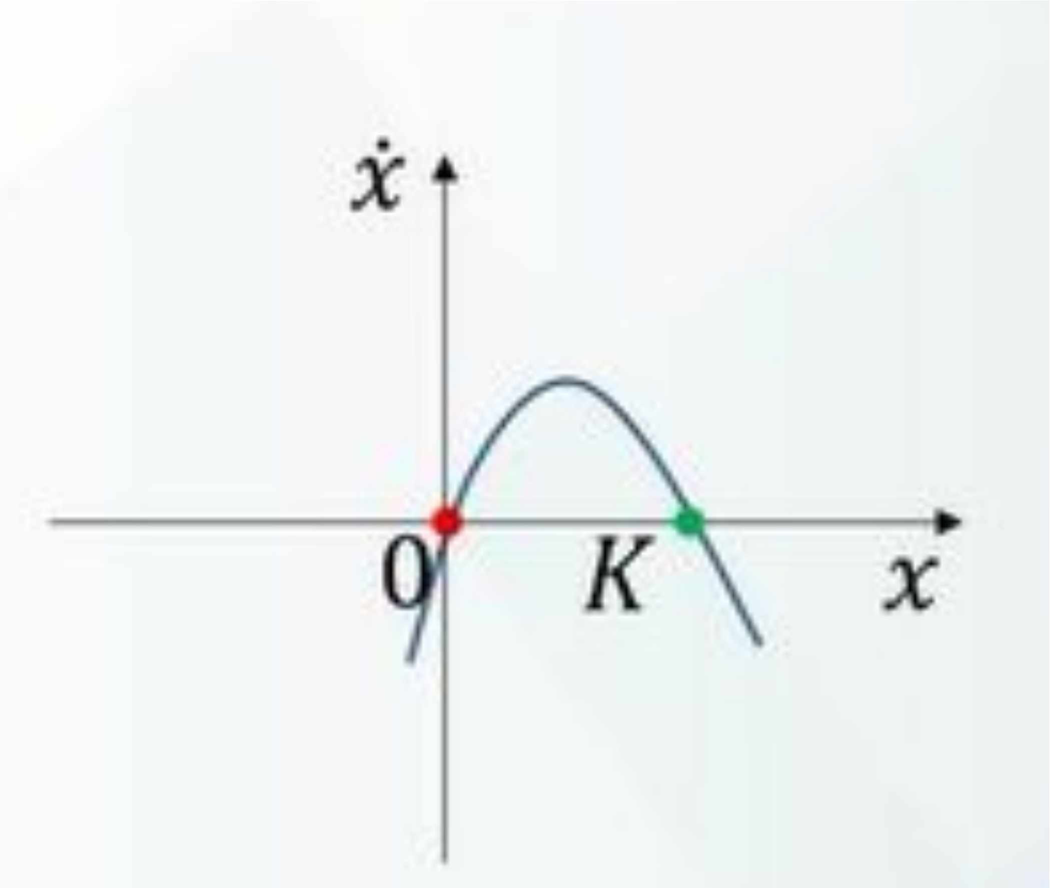
- Во-первых, неограниченное потребление ресурса приводит к неограниченному производству продукта. В реальной ситуации этого конечно же не происходит, следовательно, модель является неадекватной и необходимо перейти к другой модели.

- Во-вторых, неограниченное производство приводит к истощению ресурсов.

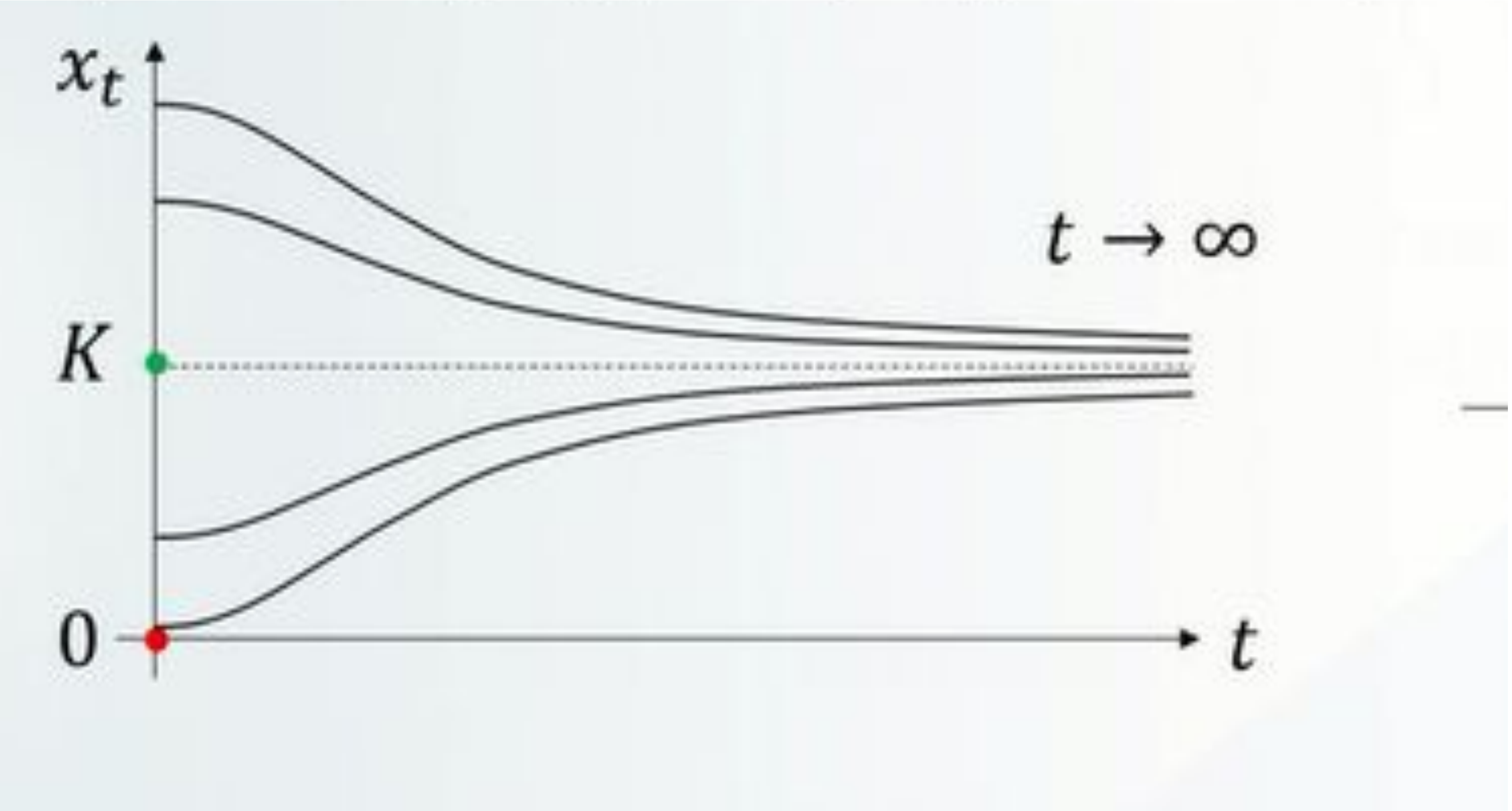
Модель Ферхюльста

- Математическая модель роста производства продукции с учетом ограничения на потребление ресурсов представлена ниже:
- $\dot{x}_t = \alpha \cdot x_t\ (1 - x_t / K)$,
- где
- $x_t \geq 0$ – количество продукции;
- $\alpha > 0$ – постоянный темп роста продукции;
- $K > 0$ – максимальное количество продукции, определяемое доступным ресурсом.

Фазовая плоскость модели Ферхюльста



Поведение фазовых траекторий модели Ферхюльста



Выводы

- ограниченное потребление ресурса приводит к ограниченному потреблению продукции;
- ограниченное производство не приводит к истощению ресурсов.