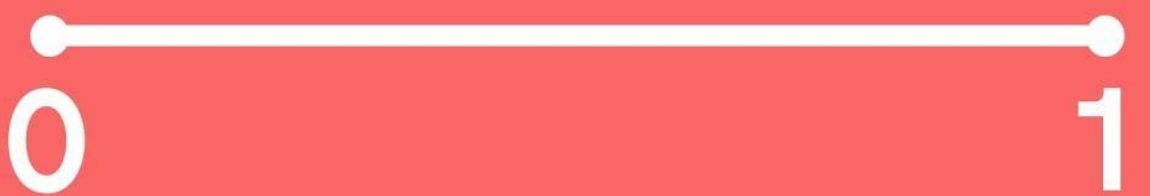
Abordări probabiliste în Machine Learning

PROBABILITATE?



Ce este probabilitatea?

Probabilitatea este un concept care estimează răspunsul la întrebarea:

- “Se va produce oare un anumit eveniment?", unde răspunsul clasic "nu" sau "da" este înlocuit cu scara numerică de la 0 până la 1.
  - ”0” arată că evenimentul nu va avea loc (echivalent răspunsului ferm "nu"),
  - ”1” reprezintă faptul că evenimentul va avea loc (echivalent răspunsului ferm "da").

Definiții și notații

- Probabilitatea este adesea asociată cu cel puțin un eveniment
  - aruncarea zarului
  - bile negre/roșii din coș

- Rezultatul evenimentului este **random**
  - variabila care reprezintă rezultatul acestor evenimente se numește **variabilă aleatorie (VA)**

- De multe ori suntem interesați să cunoaștem valoarea acestei variabile
  - De exemplu, care este probabilitatea ca atunci când un zar „corect” să cadă 3?
    - corect ar însemna că probabilitatea de a cadea pe oricare dintre 6 fețe este **egală**
  - Intuitiv răspunsul este $\frac{1}{6}$ - Corect!
- Dar cum reprezentăm asta matematic?
- De obicei VA sunt notate prin majuscule
  - Vom nota vaiabila aleatorie prin ***X***

- Prin urmare, vrem să știm care este probabilitatea că **X** = 3

- „Care este probabilitatea?” – notăm prin **P**

- Așadar, enunțul „care este probabilitatea ca atunci când arunc un zar corect să aterizeze pe un 3?”
  - Îl putem traduce matematic ca „**P (X = 3)**”

Cele 3 tipuri de probabilitate

- Probabil că primul lucru care trebuie înțeles este că există diferite tipuri de probabilitate:
  - **Probabilitate marginală**
  - **Probabilitatea comună**
  - **Probabilitate condiționată**

Probabilitate marginală

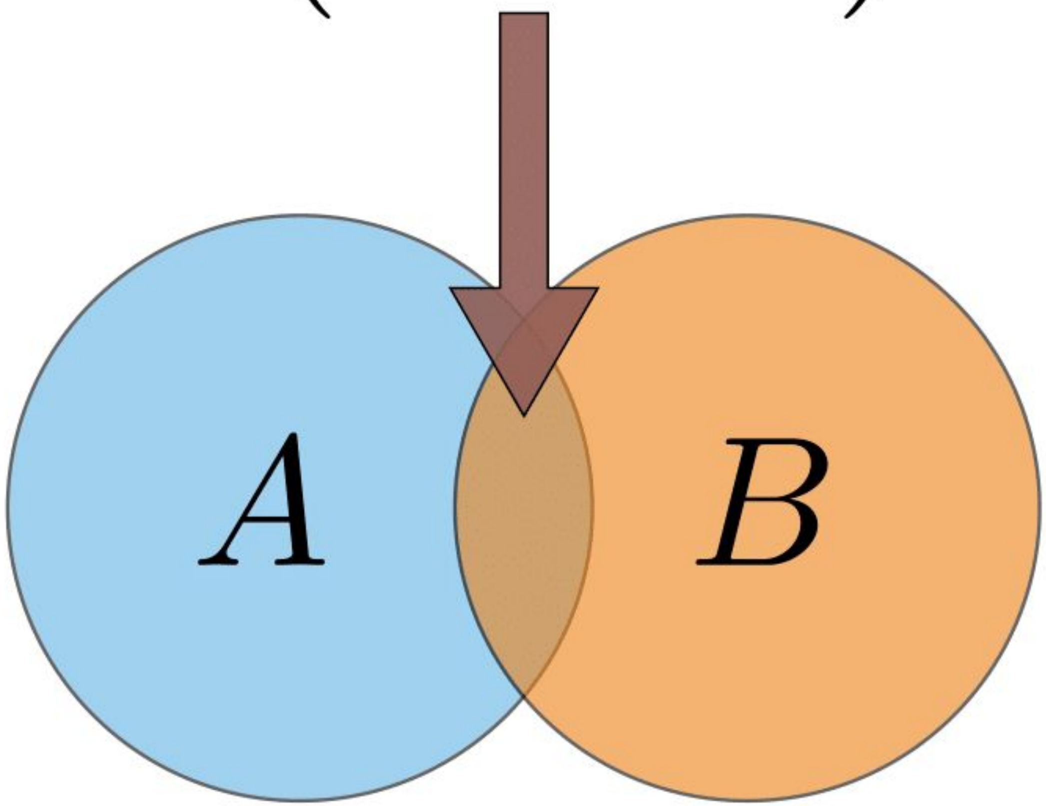
- Dacă **A** este un eveniment, atunci probabilitatea marginală este probabilitatea ca acel eveniment să se producă, P (A).
- Presupunem că avem un pachet de cărți de joc
  - un exemplu de probabilitate marginală ar fi probabilitatea ca o carte extrasă dintr-un pachet să fie roșie: **P (roșu) = 0,5.**

Probabilitate comună

- Probabilitatea a două evenimente care sunt intersectate
- Dacă A și B sunt două evenimente, atunci probabilitatea comună a celor două evenimente este scrisă ca $P(A \cap B)$
- Presupunem că avem un pachet de cărți de joc:
  - probabilitatea ca o carte extrasă dintr-un pachet să fie roșie și să aibă valoarea 4 este **P (roșu și 4) = 2/52 = 1/26**

Probabilitate comuna

$$P(A \cap B)$$



Probabilitate condiționată

- Probabilitatea ca un eveniment să aibă loc știind că alte evenimente au avut deja loc
- Dacă A și B sunt două evenimente, atunci probabilitatea condiționată a apariției A având în vedere că B s-a produs se scrie ca **P (A | B)**
- Presupunem că avem un pachet de cărți de joc:
  - probabilitatea ca o carte să fie 4, dat fiind faptul că am extras o carte roșie este **P (4 | roșu) = 2/26 = 1/13**

Legarea celor 3 tipuri

- Regula generală de multiplicare
  - Regula generală de înmulțire este o ecuație frumoasă care leagă toate cele 3 tipuri de probabilitate:

$$P(A|\mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Explicații

- Uneori, distincția dintre **probabilitatea comună** și **probabilitatea condiționată** poate fi destul de confuză, așa că folosind exemplul alegerii unei cărți dintr-un pachet de cărți de joc vom încerca să facem diferența

- În cazul în care dorim să găsim probabilitatea de a extrage o carte care este **roșie și 4** adică probabilitatea comună **P (roșu și 4**) imaginați-vă că toate cele 52 de cărți sunt cu fața în jos și alegeți una la întâmplare

- Dintre cele 52 de cărți, 2 dintre ele sunt **„roșu și 4”** (4 de dobă și 4 de inimă). Deci, probabilitatea comună este **2/52 = 1/26**

- În cazul în care dorim să găsim probabilitatea de a extrage o carte care este 4 având în vedere că știm că cardul este deja roșu, adică probabilitatea condiționată, **P (4 | roșu),** imaginați-vă că aveți toate cele 52 de cărți

- însă, înainte de a alege o carte la întâmplare, **sortați cărțile și selectați toate cele 26 de roșii.** Acum puneți cele 26 de cărți cu fața în jos și alegeți o carte la întâmplare. Din nou, 2 dintre acele cărți roșii sunt 4, astfel încât probabilitatea condiționată este **2/26 = 1/13**

- Putem folosi regula generală de înmulțire definită mai sus pentru a calcula probabilitatea comună
- Mai întâi ne reamenajăm pentru a face probabilitatea comună, **P (A ∩ B),** subiectul ecuației
- După rearanjament obținem

$$P\ (A\ \cap\ B)\ =\ P\ (A\,|\,B) \times P\ (B)$$

- Fie A în cazul în care cartea este un 4 și B este în cazul în care cartea este de roșu.

P (A | B) = 1/13 și P (B) = 1/2

Inferența Bayesiană

- Înainte de a introduce inferența bayesiană, este necesar să înțelegem teorema lui Bayes

Cunoștințe apriorii - **Prior**

- De exemplu, dacă dorim să găsim probabilitatea de a vinde înghețată într-o zi caldă și însorită, teorema lui Bayes ne oferă instrumentele pentru a utiliza cunoștințe prealabile despre probabilitatea de a vinde înghețată în orice alt tip de zi

Definiția matematică

- Teorema lui Bayes:

$$P(A|\mathrm{B}) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

- unde A și B sunt evenimente, P (B | A) este probabilitatea condiționată de a se produce evenimentul A, având în vedere că evenimentul B a avut deja loc și P (A) și P (B) sunt probabilitățile marginale ale evenimentului A și B

Exemplu

- În pachet sunt 52 de cărți, 26 dintre ele sunt roșii și 26 negre. Care este probabilitatea ca cartea aleasă să fie un 4 având în vedere că știm că cartea este de roșu?

- Traducerea în matematică:
  - evenimentul A este evenimentul în care cartea aleasă este un 4, iar evenimentul B este că cartea este de roșu

- **P (A | B)** în ecuația de mai sus este **P (4 | roșu)** în exemplul nostru, și asta este ceea ce vrem să calculăm, dar după teorema lui Bayes

- Înclocuim în Teorema lui Bayes:

$$P(4|roșu) = \frac{P(roșu|4) \times P(4)}{P(roșu)}$$

- Trebuie să găsim probabilitățile pentru termenii din partea dreaptă. Respectiv:

  1. $P(B|A) = P(roșu|4) = 1/2$

  2. $P(A) = P(4) = 4/52 = 1/13$

Cum ne permite teorema lui Bayes să încorporăm observările anterioare?

- Fie A să reprezinte evenimentul în care vindem înghețată și B să fie evenimentul vremii

- Apoi am putea întreba care este probabilitatea de a vinde înghețată într-o zi dată, având în vedere tipul de vreme?

- Din punct de vedere matematic, aceasta este scrisă ca

$$P\ (A\ =\ \textit{vânzare de înghețată} \mid B\ =\ \textit{tip de vreme}),$$

echivalent cu partea stângă a ecuației

- **P (A)** pe partea dreaptă este expresia care este cunoscută drept anterioară. În exemplul nostru, acesta este $P\ (A\ =\ v\hat{a}nzare\ de\ \hat{i}ngheța t$ă), adică probabilitatea (marginală) de a vinde înghețată indiferent de tipul de vreme afară

  - **P (A)** este cunoscut ca prior (anterior), deoarece am putea cunoaște deja probabilitatea marginală a vânzării înghețatei

- De exemplu, aș putea privi datele care spuneau că 30 de persoane din 100 au cumpărat de fapt înghețată la un magazin undeva. Deci,

$$P\ (A\ =\ vânzare\ de\ înghețată)\ =\ 30/100\ =\ 0{,}3$$

- înainte să știu ceva despre vreme. Acesta este modul în care teorema lui Bayes ne permite să includem informații anterioare

Acum știm care este teorema lui Bayes și cum să o folosim, putem începe să răspundem la întrebarea: Ce este inferența bayesiană?

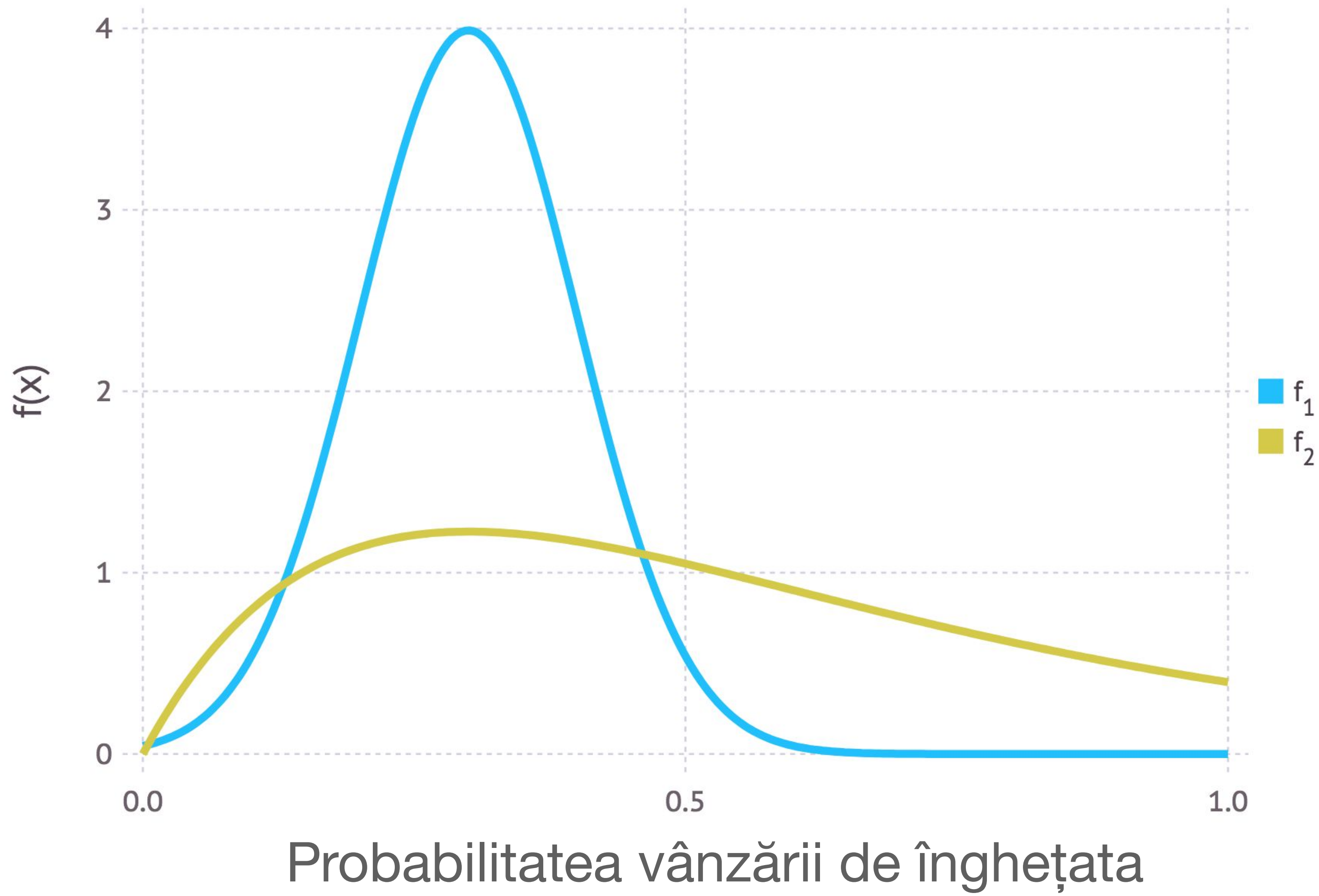
- **Inferența** este procesul de distribuire a probabilității din date

- **Inferența bayesiană** este, așadar, doar procesul de distribuire a probabilităților din date folosind teorema lui Bayes

- În exemplul de înghețată de mai sus, am văzut că probabilitatea anterioară de a vinde înghețată era de 0,3

- Cu toate acestea, dacă 0.3 ar fi doar cea mai bună presupunere a mea, dar eram un pic nesigur cu privire la această valoare, probabilitatea ar putea fi, de asemenea, 0,25 sau 0,4.

- Această distribuție este cunoscută sub numele de **distribuție anterioară**.



4
3
2
1
0
f(x)
0.0
0.5
1.0
f1
f2
Probabilitatea vânzării de înghețata

Modelul teoremei lui Bayes

- În loc de evenimentul A, vom vedea de obicei Θ, acest simbol se numește Theta.
- Deci, dacă încercăm să estimăm valorile parametrilor unei distribuții gaussiene, atunci **Θ** reprezintă atât media, **μ** cât și abaterea de la standard, **σ**, scrisă matematic ca **Θ = {μ, σ}.**
- În loc de evenimentul B, vom vedea date sau

x = {x1, x2, ..., xn}

Acestea reprezintă datele, adică setul de observații pe care le avem.

$$P(\boldsymbol{\Theta}|data) = \frac{P(data|\boldsymbol{\Theta}) \times P(\boldsymbol{\Theta})}{P(data)}.$$

- Am văzut că **P (Θ)** este **distribuția anterioară**. Reprezintă observările noastre despre adevărata valoare a parametrilor, la fel cum am avut distribuții care reprezintă observarea noastră despre probabilitatea de a vinde înghețată.

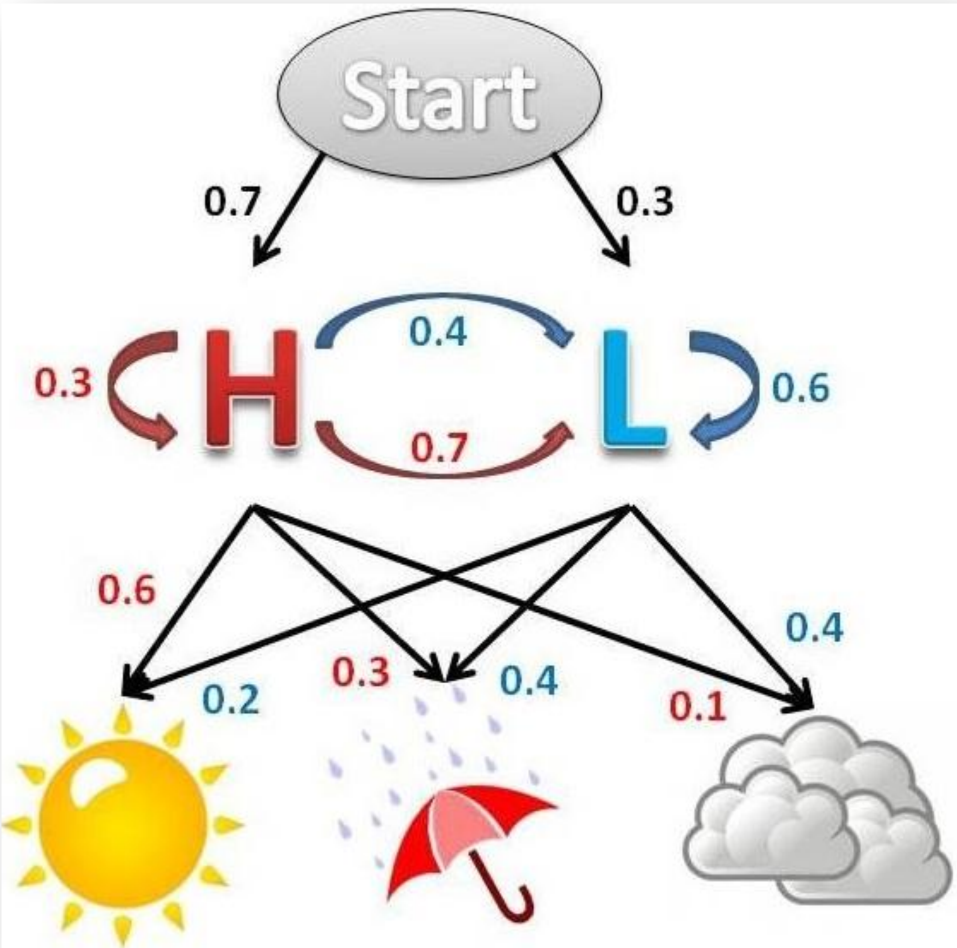
- **P (Θ | data**) din partea stângă este cunoscută sub numele de **distribuție posterioară.** Aceasta este distribuția care reprezintă observarea noastră despre valorile parametrilor după ce am calculat tot pe partea dreaptă, luând în considerare datele observate.

TEORIA PROBABILITĂȚII & ML

- În general vorbind, teoria probabilității este studiul matematic al incertitudinii.
- Acesta joacă un rol central în procesul de învățare a mașinilor,
  - întrucât proiectarea algoritmilor de învățare se bazează adesea pe asumarea probabilistică a datelor.

Exemplul 1

- Avem următoarea figură:



Există o anumită stare - de exemplu, temperatură ridicată sau scăzută a aerului.

- Ce fel de stare - nu știm, dar cunoaștem semnele: soarele strălucea, ploua, erau nori.
- Avem un set de valori colectate în timpul perioadei statistice: soarele - ploaia,

soarele - ploaia - norii.

Exemplul 1

- **Numerele de deasupra săgeților sunt probabilități, adică :**
  - **dacă este însorit, atunci cu o probabilitate de căldură de 60% și cu o probabilitate de 20% este rece.**
  - **dacă există nori, atunci căldura este de 10% și este rece cu o probabilitate de 40%.**

- Din exemplul anterior concluzionăm că ML întipărește informația statistică pe o perioadă studiată, fie zile, luni, ani,
  - luând în considerare probabilitatea producerii evenimentului anumit.
- Pe măsură ce acumulează informația ML poate face o prognoză a vremii pe viitor.

Scurt istoric

- Pentru prima dată abordări probabiliste în Machine Learning au avut loc în anii ’90 și 2000 până când a început revoluția profundă declanșată de apariția rețelelor neuronale.

Abordări probabiliste: Bayes

- Abordarea Bayes este cea mai academică viziune a învățării mașinilor.

Acest lucru este bun și rău.

Abordări probabiliste: Bayes

De ce e bun?

- Pentru că oferă o descriere matematică clară a formării și a estimărilor numerice ale fiabilității ipotezelor.

De ce e rău?

- Pentru că în viața reală nu este întotdeauna posibilă implementarea unui model matematic impecabil.

Avem notațiile:

- P(h) **- probabilitatea că se petrece evenimentul h (h, în acest caz nu este număr, ci înseamnă o abstractizare, care, desigur, poate fi și un număr; vom desemna prin h - o anumită ipoteză)**
- P(A^B) **- este probabilitatea că a avut loc atât evenimentul A cât și evenimentul B**
- P(A\B) **- probabilitatea că s-a întâmplat evenimentul A, cu condiția că avut loc și B (adică, în cazul în care A - posesia mașinii roșii și B- posesia mașinii, atunci P(A\B) - probabilitatea de a deține o mașină roșie, calculată numai pentru proprietarii de autoturisme)**

Teorema Bayes

- Teorema lui Bayes este o consecință a afirmației evidente:

$$P(A \wedge B) = P(A \backslash B)P(B) = P(B \backslash A)P(A)$$

- Adică:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(B \setminus A)P(A)}{P(B)}$$

- Bineînțeles, P (B) trebuie să fie mai mare decât 0, dar acest lucru este de înțeles, dacă B este un eveniment improbabil, atunci P(A\B) este de asemenea improbabil.

- Fie că notăm datele noastre – D, iar ipotezele noastre – h. Atunci trebuie să găsim probabilitatea ipotezei pentru datele noastre P(h\D), care prin teorema lui Bayes este egală cu:

$$P(h \setminus D) = \frac{P(D \setminus h)P(h)}{P(D)}$$

- Suntem interesați doar de relația de probabilitate, deci putem elimina P(D) din această expresie (D nu depinde de h) și P (h) (presupunem că toate ipotezele sunt la fel de probabile, strict vorbind, acest lucru nu este întotdeauna așa, dar în multe cazuri acest lucru este adevărat).
- Reiese că trebuie să găsim o ipoteză h pentru care P(D\h) este maximă.

- **Până ce nu avem nici date concrete, nici mulțimea ipotezelor.**
- **Hai să le inventăm.**

Exemplul 2

- Să presupunem că am extras N=3 mere: R=1 roșii și G=2 verzi.
- Să prezentăm două ipoteze:
  - ❖ h_1 - în coș sunt 10 mere dintre care 3 sunt roșii și 7 verzi
  - ❖ h_2 - în coș sunt 10 mere dintre acestea 7 sunt verzi și 3 roșii
- Acum, trebuie doar să calculam probabilitatea obținerii datelor noastre în fiecare dintre aceste ipoteze.

- **Notăm prin R0 și G0 numărul de mere roșii și verzi din coș.**
- **În câte moduri putem extrage R mere din R0?**

$$C(R_0, R) = \frac{R_0\,!}{(R_0 - R)!\,R\,!}$$

- **Aceasta este formula coeficientului binomial. Adică dacă avem 3 mere, atunci putem să extragem 2 mere din ele în trei moduri ● ● ○, ● ○ ●, ○ ●●:**

$$C(3,2) = \frac{3!}{(1!\cdot 2!)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1\cdot(1\cdot 2))} = 3$$

- **Formula dată este necesară doar p/u rezolvarea problemei respective .**

- **Atunci probabilitatea căutată este egală cu:**

$$P(R_0, R, G_0, G) = \frac{C(R_0, R) \cdot C(G_0, G)}{C(R_0 + G_0, R + G)}$$

- **A rămas să aplicăm aceasta (probabilitatea) la ipotezele noastre:**
  - **ipoteza** $h_1 : P(3,7,1,2) = 0.525$
  - **ipoteza** $h_2 : P(7,3,1,2) = 0.175$
- **Se observă că ipoteza I este în câștig.**

$R_0 \setminus G_0$

MĂRIM COLECȚIA DE IPOTEZE

- **Hai să nu ne limităm la 2 ipoteze. Luăm în considerare oricare combinație R0 și G0 (R și G rămân aceleași). Obținem tabelul :**

$R_0 \setminus G_0$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1.0000	0.7500	0.6000	0.5000	0.4286	0.3750
2	0	0	0.5000	0.6000	0.6000	0.5714	0.5357	0.5000
3	0	0	0.3000	0.4500	0.5143	0.5357	0.5357	0.5250
4	0	0	0.2000	0.3429	0.4286	0.4762	0.5000	0.5091
5	0	0	0.1429	0.2679	0.3571	0.4167	0.4545	0.4773
6	0	0	0.1071	0.2143	0.3000	0.3636	0.4091	0.4406
7	0	0	0.0833	0.1750	0.2545	0.3182	0.3671	0.4038

Se observă 2 probleme:

- **Problema mai mică: multe ipoteze au aceeași probabilitate (De ex: $(R_0 = 1, G_0 = 4)$ și $(R_0 = 2, G_0 = 4)$)**
- **Problema mai mare: am obținut că soluția cea mai bună este $(R_0 = 1, G_0 = 2)$. Acest rezultat este atât exact, cât și fără sens. Adică ML ne-a spus:**
  - ***”dacă ați extras din coș 1 măr roșu și 2 mere verzi, înseamnă că cel mai probabil acolo și era 1 măr roșu și 2 mere verzi.”***
- **Așa și este. ML are dreptate, dar avem nevoie de așa un răspuns?**
- **Evident că acesta nu e rezultatul la care ne așteptam.**
- **Aceasta se numește *<u>supraînvățare a mașinii</u>*.**

- **Inteligența artificială a noastră a învățat pe de rost toate datele de învățare. Cel mai probabil ML nu e în stare să rezolve problemele calitativ, dar la toate întrebările de învățare ea dă un răspuns de învățare exact.**

$R_0 \setminus G_0$

- **Să presupunem că știm de undeva că în coș se află doar 6, 7 sau 8 mere. Probabilitatea altor ipoteze este 0. Atunci tabelul nostru ia forma:**

$R_0 \setminus G_0$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0.5000	0.4286	0.3750
2	0	0	0	0	0.6000	0.5714	0.5357	0
3	0	0	0	0.4500	0.5143	0.5357	0	0
4	0	0	0.2000	0.3429	0.4286	0	0	0
5	0	0	0.1429	0.2679	0	0	0	0
6	0	0	0.1071	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

MULȚUMESC

PENTRU

ATENȚIE !!!