Операции над функциями и их графики

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А.Д.Александров

Повторение

1. Проверьте, понимаете ли вы смысл следующих ключевых слов: экстремум, максимум, минимум, монотонность, четность, нечетность, непрерывность.
2. Как с помощью графика найти область определения функции?
3. Как графически изображаются корни (нули) функции?
4. Как с помощью графика найти промежутки, на которых функция сохраняет постоянный знак?
5. Что такое точка локального максимума (минимума)?
6. Чем отличается наибольшее значение функции от ее локального максимума?
7. Перечислите, какие свойства функции включаются в схему ее исследования.
8. Дайте определение четной и нечетной функции. Какой симметрией обладают графики этих функций?
9. Дайте определение периодической функции. Как выглядит график такой функции?
10. Какая функция называется ограниченной?

Арифметические операции

Над функциями можно производить арифметические операции — сложение, умножение, деление. Пусть даны две функции f и g *с одной и той же областью определения* D.

Суммой функций f и g называется функция $h = f + g$, с той же областью определения, значения которой в точке x получаются сложением значений функций f и g в этой точке:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Композиция функций.

- -это применение одной функции к результату другой

Пусть даны две функции: $y = g(x)$ и $z = f(y)$. Сложной функцией (или композицией функции f и g) называется функция $z = h(x)$, значения которой вычисляются по правилу $h(x) = f(g(x))$, т.е. сначала вычисляется $g(x)$, при этом получается некоторое число y, а затем вычисляется значение f в точке y.

Так, функцию $z = \sqrt{1-x^2}$ можно рассматривать как композицию функций $y = 1 - x^2$ и $z = \sqrt{y}$.

Обратная функция

Две функции f и g называются взаимно обратными, если формулы $y = f(x)$ и $x = g(y)$ выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y, т.е. если равенство $y = f(x)$ верно тогда и только тогда, когда верно равенство $x = g(y)$:

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Если две функции f и g взаимно обратны, то g называют обратной функцией для f и, наоборот, f — обратной для g.

Графики и свойства взаимно обратных функций

Теорема. Пусть f и g — взаимно обратные функции. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно биссектрисы угла xOy.

Свойства взаимно обратных функций

1. *Тождества*

Пусть f и g — взаимно обратные функции. Это означает, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$ равносильны.

Подставим одно из этих равенств в другое. Получим два тождества:

$$f(g(y)) = y \text{ и } g(f(x)) = x.$$

Пример

Функции $y = x^2$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$ взаимно обратны. Имеем два тождества:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \text{ и } \sqrt{x^2} = x \text{ при } x \geq 0.$$

2. *Область определения*

Пусть f и g — взаимно обратные функции. Область определения функции f совпадает с областью значений функции g, и, наоборот, область значений функции f совпадает с областью определения функции g (рис. 36).

Действительно, обратная функция к функции $y = f(x)$ определена для всякого числа y, которое является значением функции для некоторого числа x: мы берем равенство $y = f(x)$ и из него выражаем x как функцию от y. Это свойство наглядно проявляется на графике: график функции $y = f(x)$ совпадает с графиком обратной функции $x = g(y)$, только аргумент функции g откладывается по оси y. Ясно, что аргументы функции g — это значения функции f и наоборот.

Условие существования обратной функции

Условие того, что функция имеет обратную, заведомо выполняется, если функция строго возрастает или строго убывает. Действительно, если f, например, строго возрастает, то при двух различных значениях аргумента она принимает различные значения, так как большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Следовательно, уравнение $f(x) = y$ для строго монотонной функции имеет не более одного решения.

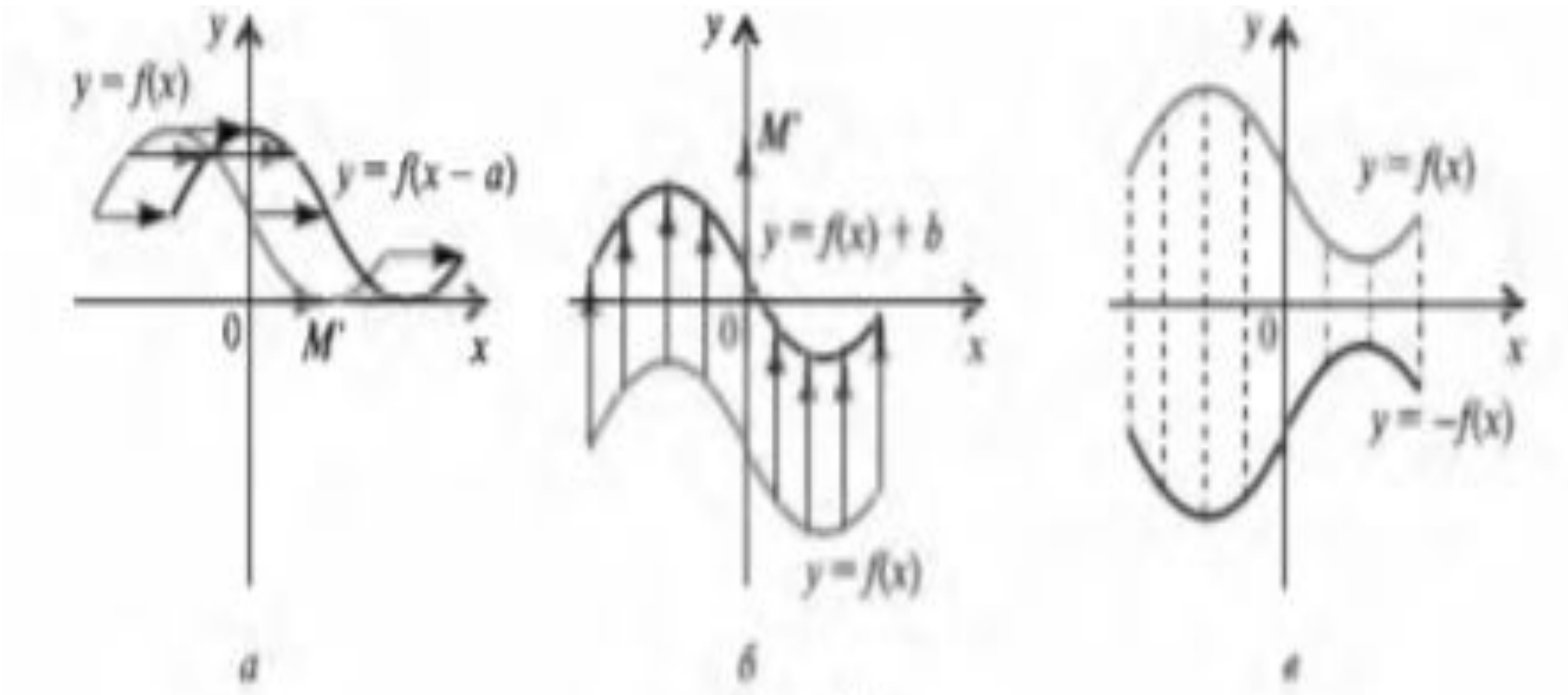
Обратной функции не имеет:

Примеры

1. $y = |x|$. Для данного положительного числа y найдутся два значения аргумента x такие, что $|x| = y$. Например, если $y = 2$, то $x = 2$ или $x = -2$. Значит, выразить однозначно x через y нельзя.
2. $y = x^2$. Ситуация здесь такая же, как в предыдущем примере: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$.
3. $y = \sin x$.

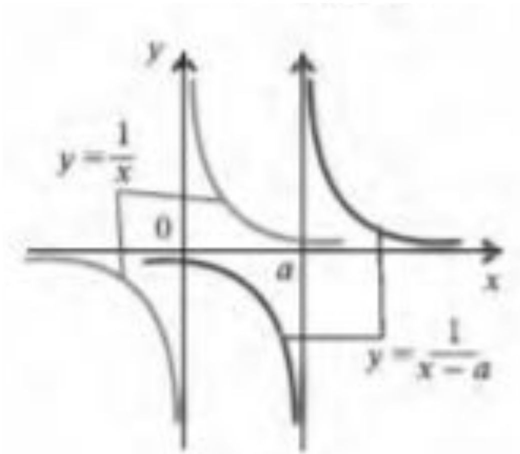
Преобразование графиков

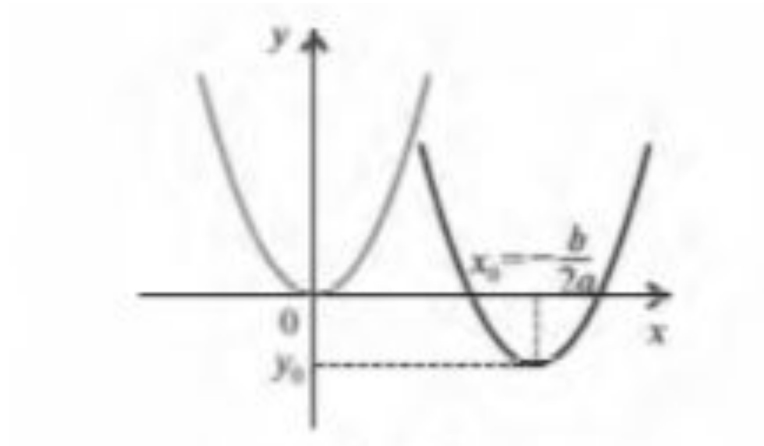
Параллельный перенос

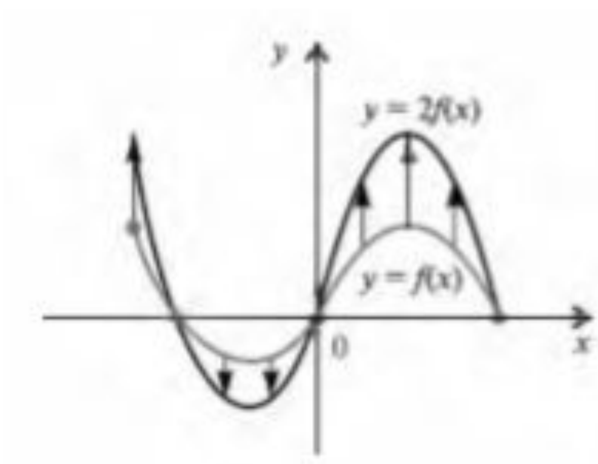


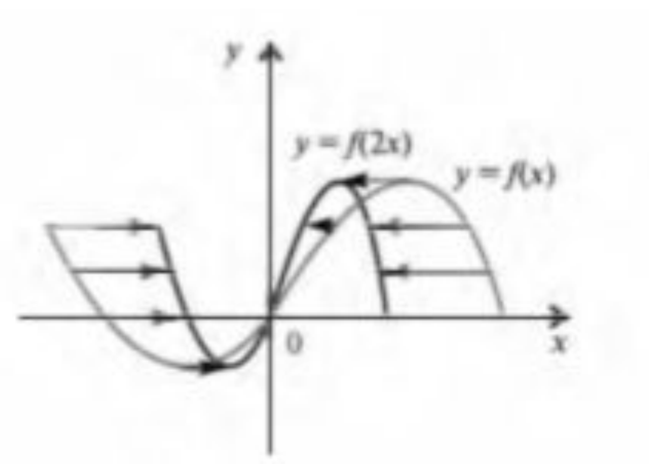
Преобразование графиков

Изменение маштаба









Пример

Построить график функции $y=\dfrac{x}{x+2}$.

Преобразуем правую часть: $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+2-2}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$, т.е. $y-1=\dfrac{-2}{x+2}$, или $y-1=\dfrac{-2}{x+2}$. Отсюда ясно, какие преобразования надо сделать с известным графиком $y=\dfrac{1}{x}$, чтобы построить требуемый график: его надо отразить относительно оси x (или оси y; это в данном случае безразлично), растянуть по оси y и затем сделать параллельный перенос в точку $(-2, 1)$. Практически поступают так: строят «крест» — прямые $x=-2$ и $y=1$ — через точку, в которую нужно перенести начало координат, а затем гиперболу располагают в первом — третьем или втором — четвертом квадрантах в зависимости от знака числителя c в записи $y=\dfrac{c}{x-a}+b$ (в нашем случае $c=-2$) (рис. 47).

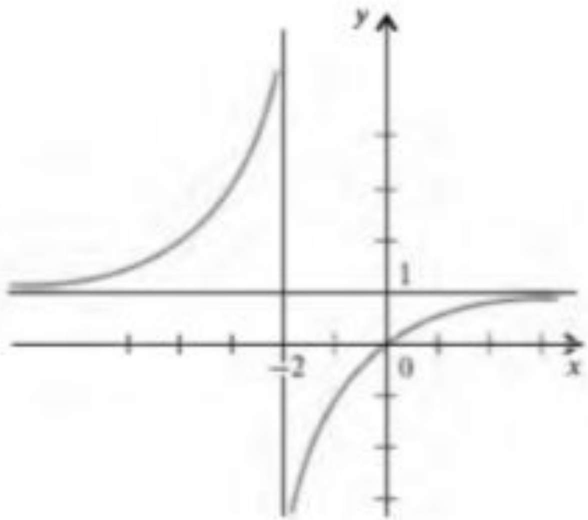


Рис. 47

Контрольные вопросы

1. Проверьте, понимаете ли вы смысл следующих ключевых слов: арифметические операции над функциями, сложная функция, обратная функция, преобразование графиков.
2. Как определяется рациональная функция?
3. Как определяется сложная функция?
4. Расскажите, как связаны между собой свойства и графики взаимно обратных функций.
5. Проверьте, понимаете ли вы смысл обозначений: $f(x - a)$, $f(x) + b$, $f(kx)$.
6. Как перемещается график функции $y = f(x - a)$ при изменении параметра a?
7. Как перемещается график функции $y = f(x) + b$ при изменении параметра b?
8. Как связаны между собой графики функций $y = f(x)$, $y = f(-x)$ и $y = -f(x)$?
9. Как связаны между собой области определения функций $y = f(x)$, $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(-x)$ и $y = -f(x)$?
10. Как изменится график функции $y = f(kx)$ при изменении параметра k? Тот же вопрос для функции $y = kf(x)$.