Раздел 1. Пределы и их свойства Тема 1.3. Теоремы о пределах. Нахождение пределов

План

1. Теоремы о пределах
2. Нахождение пределов функций

Следствия

1. Постоянный множитель функции можно вынести за знак предела.

- $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2. Предел многочлена и дробно-рациональных функций равен их значению в точке а , если а принадлежит области определения.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(a)$

- **Опр.** Функция f(x) называется бесконечно малой (бм), если предел функции, при x стремящимся к a, равен 0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

- **Опр.** Функция f(x) называется бесконечно большой (бб), если предел функции, при x стремящимся к a, равен бесконечно большому числу или бесконечности.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Свойства

1. Сумма нескольких бм(бб) величин равна бм(бб).
   - бм+бм+бм=бм   бб+бб+бб=бб
2. Произведение бм(бб) на число с равно бм(бб).
   - бм · с = бм   бб · с = бб
3. Произведение бм(бб) величин есть величина бм(бб).
   - бм · бм · бм=бм   бб · бб · бб=бб
4. Сумма числа с и бм(бб) величин равна бм(бб).
   - бм + с = бм   бб + с = бб
5. Частное некоторого числа с и бм равно бб.
   - $\frac{с}{бм} = бб$
6. Частное некоторого числа с и бб равно бм.
   - $\frac{с}{бб} = бм$

Замечательные пределы

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел.
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$ – второй замечательный предел.

Пример 1

- 1. $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - 8x + 5) =$
- 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{x^2-9} =$
- 3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6}{2x^2+3} =$

- Очень часто при нахождении пределов дробно-рациональных функций получаются числовые неопределённости: $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $\infty - \infty$; 1^{∞}.
- В таких случаях для вычисления пределов функций выполняют равносильные преобразования алгебраических выражений:

1. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается делением числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (переменной).

Пример 2

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x}{1+x^3}=$$

1. Неопределённость $\frac{0}{0}$ раскрывается несколькими способами в зависимости от функции:

- а) Разложить числитель и знаменатель на множители, сократить в полученную дробь на множитель стремящийся к нулю.

Пример 3

- $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4} =$

- б) Умножить числитель и знаменатель на множитель сопряжённый числителю или знаменателю, преобразовать полученное выражение и сократить на общий множитель стремящийся к нулю.

- **<u>Опр.</u>** Сопряжёнными называются выражения, если они имеют противоположный знак действия.

(а + в)~(а - в)

$(а + в)(а - в) = а^2 - в^2$

$(\sqrt{а})^2 = а$

Пример 4

- $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}=$$

- в) Для раскрытия неопределённости используют следующие отношения основанные на замечательных пределах, если $x \to 0$, то под знаком предела можно выполнять равносильные замены: $\sin \alpha = \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha = \alpha$, $\arcsin \alpha = \alpha$, $\mathrm{arctg}\, \alpha = \alpha$, $\ln(1 + \alpha) = \alpha$.

Пример 5

- $$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,3x}{\ln(1+\sin 5x)} =$$