

**Алгоритмически  
неразрешимые  
задачи  
и вычислимые  
функции**

# Алгоритмически неразрешимая задача

*- это задача, для  
которой невозможно  
построить алгоритм  
решения.*

*В 1900 г. на Международном математическом конгрессе в Париже немецкий математик Д. Гильберт сформулировал **23** математические **проблемы**.*

*Сегодня решение (даже частичное) какой-либо проблемы Гильберта расценивается как высшее математическое достижение.*



# 10-ая проблема Гильберта

*Задано произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами*

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

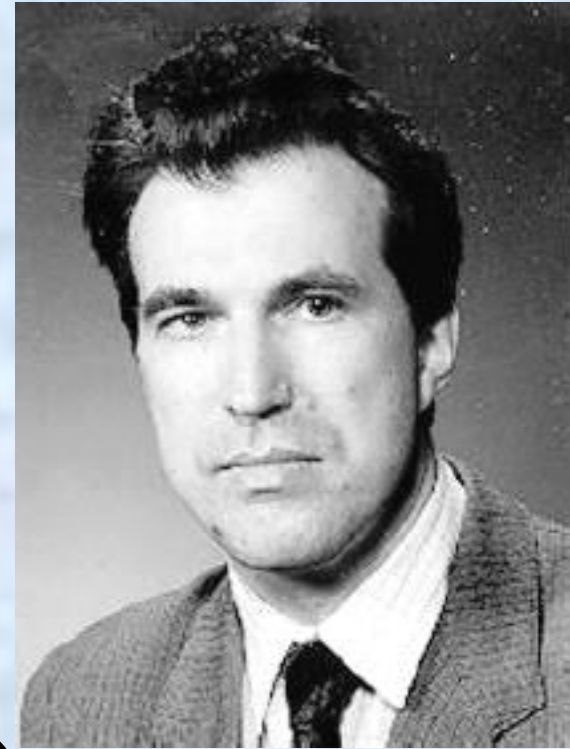
*(Например,  $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^3 = 0$ ).*

*Требуется выяснить, существует ли у данного уравнения решение в целых числах.*



*В 1970 г. математик **Ю.В. Матиясевиц** (СССР)*

*доказал  
невозможность  
построения  
алгоритма  
решения этой задачи.*



# Проблема останова

*По описанию произвольного алгоритма и его исходных данных требуется определить **остановится** ли алгоритм на этих данных или будет работать бесконечно.*

*Это классическая алгоритмически неразрешимая задача – доказано в теории алгоритмов.*

# Проблема

**распознавания выводимости**

*любой теоремы из любой системы*

*аксиом, которую пытался*

*решить Лейбниц в XVII в.,*

*пытаясь построить алгоритм*

*решения любых мат. задач.*

*В 1936 г. амер. математик А. Чёрч*

*доказал теорему об алгоритмической*

*неразрешимости проблемы.*

# Методы доказательства

**алгоритмической неразрешимости**

*основаны на **методе сведения***

*к этим задачам известных*

*алгоритмически неразрешимых*

*задач.*

*Задачи, для которых доказана*

*алгоритмическая неразрешимость, не*

*надо и пытаться решать на ЭВМ –*

***практическая ценность** понятия*

*«алгоритмической неразрешимости».*



# Вычислимая функция

(алгоритмически вычислимая)

*– функция, вычисляемая некоторым алгоритмом.*

***Теория вычислимости*** –  
*раздел теории алгоритмов.*

# Пример

## невычислимой функции

$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи числа } \pi \\ & \text{есть отрезок из } n \text{ девяток} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Анализ первых 800 знаков разложения  $\pi$  показывает, что  $f(n)=1$  для  $n=0, 1, 2, 6$ .  
Не существует общего метода (алгоритма), реализующего эту функцию.

*В теории алгоритмов было сформулировано понятие вычислительной машины и доказано, что для преобразования информации не обязательно строить специализированные вычислительные устройства: все можно сделать на одном **универсальном** устройстве при помощи подходящей программы и соответствующего кодирования.*

# Контрольные вопросы

- Что такое алгоритмически не разрешимая задача?
- Кто сформулировал 23 математические проблемы, решение (даже частичное) которых расценивается как высшее математическое достижение?
- Задано произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Какая математическая проблема поставлена?
- Решена ли проблема предыдущего вопроса? Если решена, то кем и с каким результатом.
- В чем заключается «Проблема распознавания выводимости любой теоремы из любой системы аксиом»? И решена ли она?
- В чем заключается *практическая ценность понятия «алгоритмической неразрешимости»?*
- *Что такое вычислимая функция?*