

**Алгоритмически
неразрешимые
задачи
и вычислимые
функции**

Алгоритмически неразрешимая задача

*- это задача, для
которой невозможно
построить алгоритм
решения.*

*В 1900 г. на Международном математическом конгрессе в Париже немецкий математик Д. Гильберт сформулировал **23** математические **проблемы**.*

Сегодня решение (даже частичное) какой-либо проблемы Гильберта расценивается как высшее математическое достижение.



10-ая проблема Гильберта

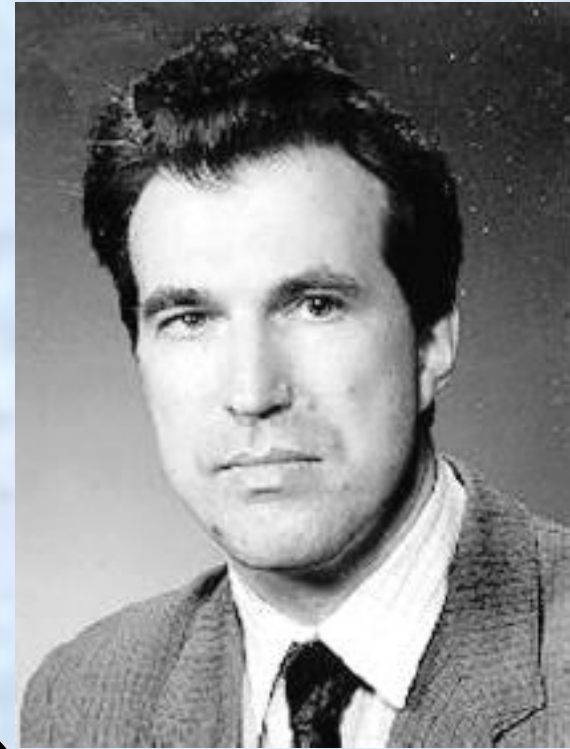
Задано произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

(Например, $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^3 = 0$).

Требуется выяснить, существует ли у данного уравнения решение в целых числах.

*В 1970 г. математик **Ю.В. Матиясевич** (СССР) доказал невозможность построения алгоритма решения этой задачи.*



Проблема останова

*По описанию произвольного алгоритма и его исходных данных требуется определить **остановится** ли алгоритм на этих данных или будет работать бесконечно.*

Это классическая алгоритмически неразрешимая задача – доказано в теории алгоритмов.

Проблема

распознавания выводимости

любой теоремы из любой системы

аксиом, которую пытался

решить Лейбниц в XVII в.,

пытаясь построить алгоритм

решения любых мат. задач.

В 1936 г. амер. математик А. Чёрч

доказал теорему об алгоритмической

неразрешимости проблемы.

Методы доказательства

алгоритмической неразрешимости

*основаны на **методе сведения***

к этим задачам известных

алгоритмически неразрешимых

задач.

Задачи, для которых доказана

алгоритмическая неразрешимость, не

надо и пытаться решать на ЭВМ –

***практическая ценность** понятия*

«алгоритмической неразрешимости».

Вычислимая функция

(алгоритмически вычислимая)

– функция, вычисляемая некоторым алгоритмом.

Теория вычислимости –
раздел теории алгоритмов.

Пример

невычислимой функции

$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи числа } \pi \\ & \text{есть отрезок из } n \text{ девяток} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Анализ первых 800 знаков разложения π показывает, что $f(n)=1$ для $n=0, 1, 2, 6$.
Не существует общего метода (алгоритма), реализующего эту функцию.

*В теории алгоритмов было сформулировано понятие вычислительной машины и доказано, что для преобразования информации не обязательно строить специализированные вычислительные устройства: все можно сделать на одном **универсальном** устройстве при помощи подходящей программы и соответствующего кодирования.*

Контрольные вопросы

- Что такое алгоритмически не разрешимая задача?
- Кто сформулировал 23 математические проблемы, решение (даже частичное) которых расценивается как высшее математическое достижение?
- Задано произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Какая математическая проблема поставлена?
- Решена ли проблема предыдущего вопроса? Если решена, то кем и с каким результатом.
- В чем заключается «Проблема распознавания выводимости любой теоремы из любой системы аксиом»? И решена ли она?
- В чем заключается *практическая ценность понятия «алгоритмической неразрешимости»?*
- *Что такое вычислимая функция?*