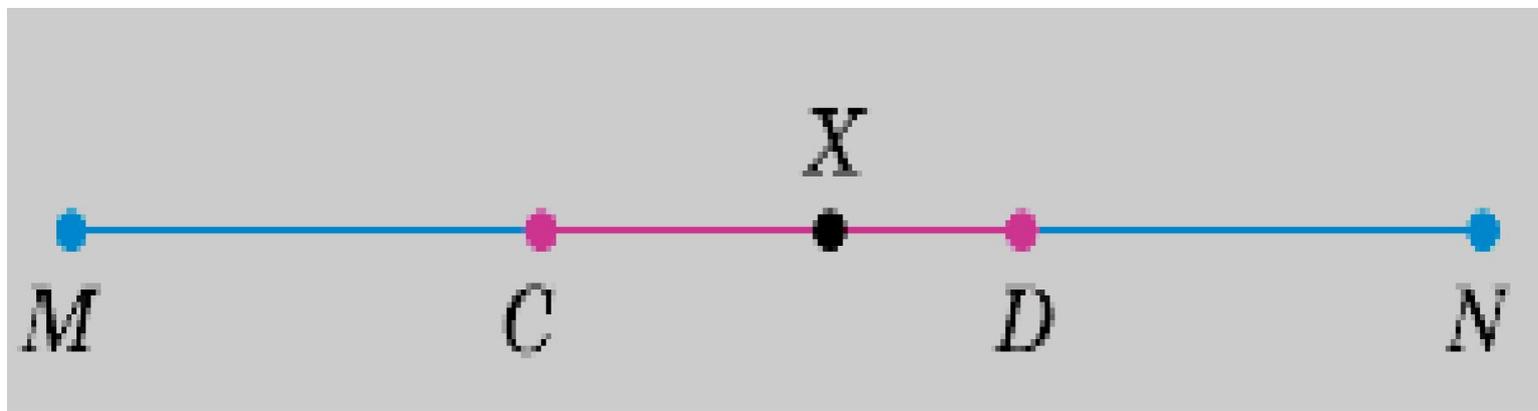


# Случайный выбор точки из отрезка

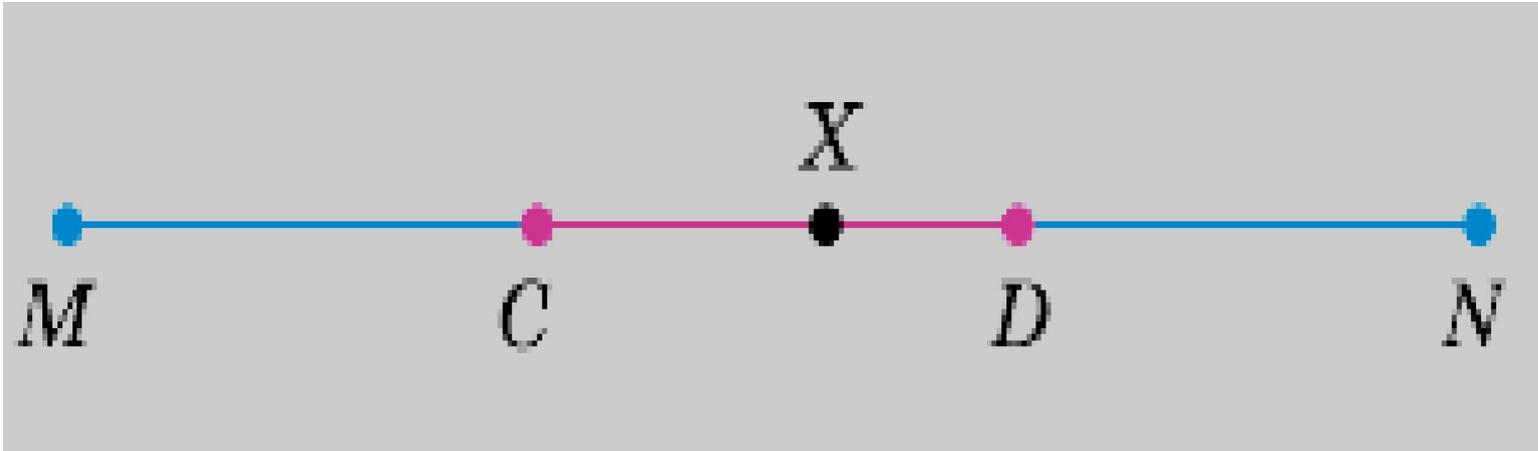
Рассмотрим опыт, который состоит в случайном выборе одной точки  $X$  из некоторого отрезка  $MN$ . Элементарными событиями служат все точки отрезка. Пусть отрезок  $CD$  содержится в отрезке  $MN$ . Нас интересует событие, состоящее в том, что выбранная точка  $X$  принадлежит отрезку  $CD$ .



Тогда вероятность события  $CD$  «точка  $X$  принадлежит отрезку  $CD$ , содержащемуся в отрезке  $MN$ » равна  $P(CD) = \frac{CD}{MN}$ .

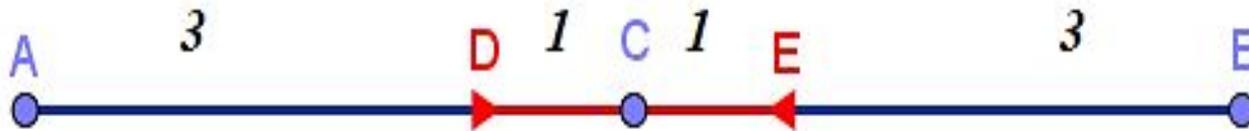
Это число неотрицательное и не превосходит 1, как и полагается вероятности случайного события.

**Пример 1.** Случайный опыт состоит в случайном выборе одной точки  $X$  из отрезка  $MN$ . Точки  $C$  и  $D$  делят отрезок  $MN$  на три равные части. Найдите вероятность того, что точка  $X$  принадлежит отрезку  $CD$ .



**Пример 2.** Иван Петрович шел пешком от электрички до дачи и по дороге потерял ключи. Дорога от станции до посёлка составляет 10 км, из которых 4 км проходит через лес. Считая, что Иван Петрович мог потерять ключи в любой момент, найдите вероятность того, что он потерял их в лесу.

**Пример 3.** Длина отрезка  $AB$  равна 8 см. Точка  $C$  – середина отрезка  $AB$ . Из отрезка  $AB$  наудачу выбирают одну точку. Найдите вероятность того, что эта точка удалена от точки  $C$  менее чем на 1 см.



## Геометрическую вероятность можно применять к числовым промежуткам.

Пример 4. Найдём вероятность того, что случайное число, которое выбирается из отрезка  $[0; 1]$ , не меньше  $\frac{1}{3}$ , но не больше, чем  $\frac{1}{2}$ .

Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка  $[0; 1]$  на числовой прямой выбирается случайная точка с координатой  $x$ . Найдём вероятность того, что эта точка попадет в отрезок  $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$  (рис. 3).

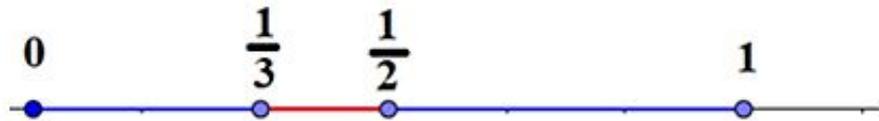


Рис. 3

Поскольку отрезок, из которого выбирается точка, единичный, искомая вероятность равна длине отрезка  $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ , то есть  $\frac{1}{6}$ .

Обобщим результат. Предположим, что случайным образом выбирается число  $x$ , удовлетворяющее условию  $m \leq x \leq n$ . Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка  $[m; n]$  на числовой прямой выбирается точка с координатой  $x$  (см. рис. 4).



Рис. 4

Рассмотрим событие, состоящее в том, что точка с координатой  $x$  выбрана из отрезка  $[a; b]$ , содержащегося в отрезке  $[m; n]$ . Это событие обозначим  $a \leq x \leq b$ . Его вероятность равна отношению длин отрезков  $[a; b]$  и

$$[m; n]: P(a \leq x \leq b) = \frac{b-a}{n-m}.$$

**Пример 5.** Из отрезка  $[0;5]$  случайным образом выбирают число  $x$ . Найдите вероятность того, что:

а)  $1,5 \leq x \leq 2,3$ ; б)  $x > 3$ ; в)  $4x - 2 \leq 5$ ; г)  $5 < 2x < 6$ .

**Решение.** а) Воспользуемся формулой:  $P(1,5 \leq x \leq 2,3) = \frac{2,3 - 1,5}{5} = 0,16$ .

б) В данной задаче  $x > 3$  – то же, что и  $3 < x \leq 5$ . Воспользуемся формулой:

$$P(3 < x \leq 5) = \frac{5 - 3}{5} = 0,4.$$

в) Преобразуем неравенство:  $x \leq 1,75$ . То есть, нужно найти вероятность того, что  $0 \leq x \leq 1,75$ .

$$P(4x - 2 \leq 5) = \frac{1,75}{5} = 0,35.$$

г) Преобразуем двойное неравенство:  $2,5 < x < 3$ .

$$P(5 < 2x < 6) = \frac{0,5}{5} = 0,1.$$

**Пример 6.** Иван Иванович обещал позвонить Ивану Никифоровичу между 15:00 и 16:00. Известно, что Иван Иванович всегда держит своё слово. А Иван Никифорович, который ждал звонка, отлучился на 10 минут, забыв взять с собой телефон. Найдите вероятность того, что, когда Иван Иванович позвонил, телефон у Ивана Никифоровича был с собой.

Временные промежутки удобно изображать на числовой прямой. Обозначим  $AB$  временной промежуток от 15:00 до 16:00. Его длина 60 минут. Иван Никифорович отлучился на 10 минут – этот промежуток обозначим  $CD$  (рис. 5).

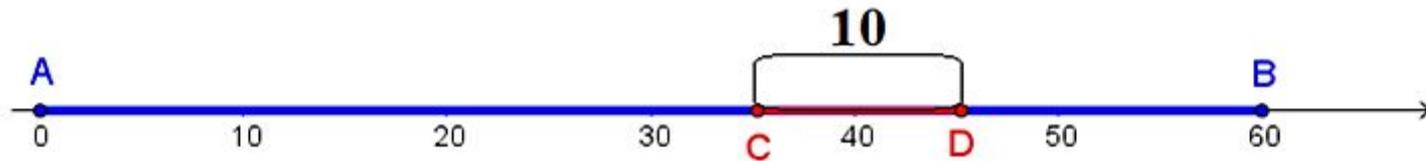


Рис. 5

Мы не знаем в какой момент отлучился Иван Никифорович, то есть мы не знаем расположение отрезка  $CD$ . Но нам нужно знать только длину промежутка:

$$P(CD) = \frac{CD}{AB} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

Значит, вероятность противоположного события равна  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,83$ .

**Пример 7а.** Из отрезка  $[0;1]$  случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найдите вероятность того, что оба числа меньше  $0,5$ :

$$x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}$$

$P\left(x < \frac{1}{2}\right) = 0,5$ ,  $P\left(y < \frac{1}{2}\right) = 0,5$ . Так как числа выбираются независимо друг от друга, события  $x < \frac{1}{2}$  и  $y < \frac{1}{2}$  независимы. Поэтому вероятность их одновременного наступления равна

$$P\left(x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}\right) = P\left(x < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(y < \frac{1}{2}\right) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

**Пример 7б.** Из отрезка  $[0;1]$  случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найдите вероятность того, что

**Пример 7в.** Из отрезка  $[0;1]$  случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найдите вероятность того, что  $x < 0,5$  и  $y < 0,5$ .

**Пример 7г.** Из отрезка  $[0;1]$  случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найдите вероятность того, что

**Пример 7д\***. Из отрезка  $[0;1]$  случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа  $x$  и  $y$ . Найдите вероятность того, что  $y < x$

# Задание на дом

1. Из отрезка  $[0; 1]$  случайным образом выбирается число  $x$ .

Найдите вероятность того, что:

а)  $x < 0,5$ ; б)  $x > 0,7$ ; в)  $x \leq 0,3$ ; г)  $x \geq 0,9$ ;

д)  $0,4 \leq x \leq 0,6$ ; е)  $x \leq 0,3$  или  $x \geq 0,5$ ; ж)  $x < 2$ ; з)  $x \leq 0$ .

2. Длина отрезка  $MN$  равна 3 см. Из этого отрезка наудачу выбирают одну точку. Найдите вероятность того, что эта точка:

а) удалена от точки  $M$  менее чем на 1 см;

б) удалена от точки  $M$  не более чем на 2 см;

в) удалена от обоих концов более чем на 0,5 см;

г) удалена от ближайшего из концов менее чем на 0,25 см.