



СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ИНФОРМАТИКА ДЛЯ СПО

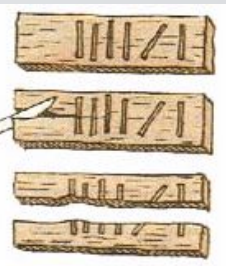
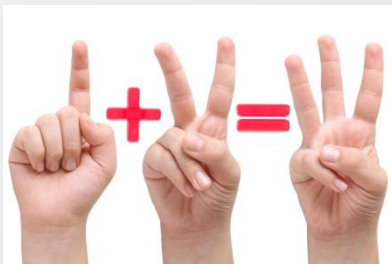


ЧТО ТАКОЕ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ?

Система счисления — это правила записи чисел с помощью специальных знаков — *цифр*, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Счёт на пальцах:



УНАРНАЯ СИСТЕМА

Уна́рная (едини́чная, ра́зная) систе́ма счисления — **непозиционная система счисления** с единственной цифрой, обозначающей 1.

Унарная (лат. *unus* – один) – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (1 000 000?)







НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.


НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- унарная
- египетская десятичная
- римская
- славянская
- и другие...

ЕГИПЕТСКАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА

черта		- 1	лотос		- 1000		- 1000000
хомут		- 10	палец		- 10000	человек	
верёвка		- 100	лягушка		- 100000		

 = 1235

2014 = 

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)

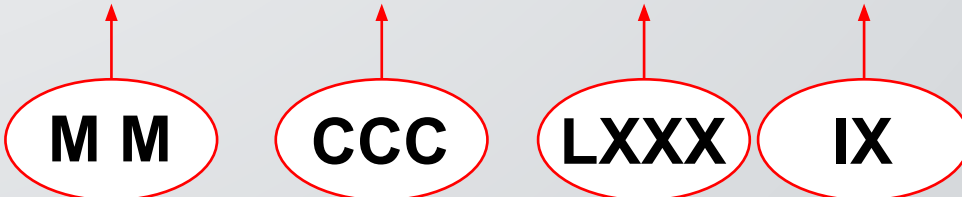
РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$


MM
CCC
LXXX
IX

$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

MCDLXVII =

MMDCXLIV =

MMMCCCLXXII =

CMXXVIII =

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

СМХСІV =

МММСDXLIX =

МСМХLIX =

ММСDХСІХ =

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

1468 =

1383 =

1152 =

1099 =

НЕДОСТАТКИ РИМСКОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- можно записывать только натуральные числа;
- чтобы записывать большие числа, необходимо вводить все новые и новые цифры;
- сложно выполнять арифметические действия.

СЛАВЯНСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Система записи чисел кириллицей, цифёрь — способ записи чисел алфавитной записи чисел с использованием кириллицы и ли глаголицы, использовавшийся в Древней Руси.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
·Ѧ·	·Ѣ·	·Г·	·Д·	·Е·	·С·	·З·	·И·	·О·
10	20	30	40	50	60	70	80	90
·І·	·К·	·Л·	·М·	·Н·	·Ѫ·	·Ѧ·	·П·	·Ч·
100	200	300	400	500	600	700	800	900
·Р·	·С·	·Т·	·Ѧ·	·Ф·	·Х·	·Ѩ·	·Ѧ·	·Ц·
11	12	13	14	15	16	17	18	19
·Ѧі·	·Ѣі·	·Гі·	·Ді·	·Еі·	·Сі·	·Зі·	·Иі·	·Оі·

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

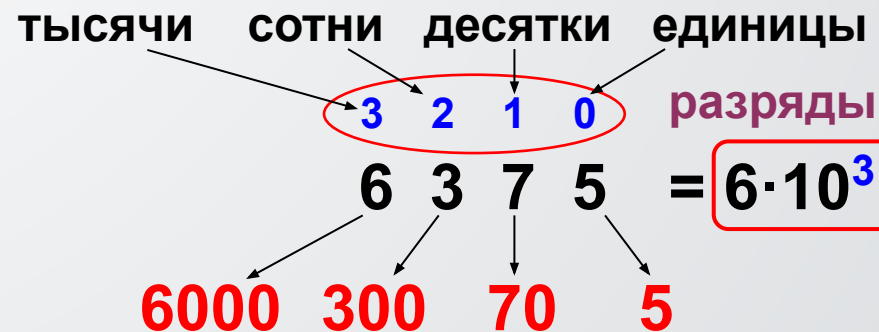
Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Алфавит системы счисления — это используемый в ней набор цифр.

Основание системы счисления — это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

ФОРМЫ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ



развёрнутая форма
записи числа

$$= 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Схема Горнера:

$$6 \ 3 \ 7 \ 5 = ((6 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 7) \cdot 10 +$$

5



- для вычислений не нужно использовать возведение в степень
- удобна при вводе чисел с клавиатуры, начиная с первой

ПЕРЕВОД В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

Через развёрнутую запись:

разряды: 3 2 1 0

$$1234_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 194$$

=1

основание системы счисления

$$\text{разряды: } a_3 a_2 a_1 a_0 = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p$$

Через схему Горнера:

$$1234_5 = ((1 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 4 = 194$$
$$a_3 a_2 a_1 a_0 = ((a_3 \cdot p + a_2) \cdot p + a_1) \cdot p + a_0$$

ПЕРЕВЕСТИ В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

$$1042_5 =$$

$$1054_8 =$$

$$101001_2 =$$

$$101012_3 =$$

$$F23A_{16} =$$

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

$$194 = 1234_5 = ((1 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 4$$

делится на 5

остаток от деления на 5

$$a_3 a_2 a_1 a_0 = ((a_3 \cdot p + a_2) \cdot p + a_1) \cdot p + a_0$$

$$a_3 a_2 a_1 = (a_3 \cdot p + a_2) \cdot p + a_1$$

остаток от деления на p

частное от деления на p

? Как найти a_1 ?

? Как по записи числа в системе с основанием p определить, что оно делится на p^2 ?

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

10 → 5

$$\begin{array}{r|l} 194 & 5 \\ \hline 190 & 38 \\ \hline 4 & 35 \\ & 7 \\ & 5 \\ & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{array}$$

$$194 = 1234_5$$



Как перевести в систему с основанием 8?

Делим число на p , отбрасывая остаток на каждом шаге, пока не получится 0. Затем надо выписать найденные остатки в обратном порядке.

АЛГОРИТМ ПЕРЕВОДА ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ ПОЗИЦИОННУЮ СИСТЕМУ

1. Целую часть числа (N) разделить нацело на p с остатком. Записать частное и остаток.
2. Если частное больше p , разделить его на p и записать частное и остаток
3. Повторять пункт 2 до тех пор, пока частное не станет меньше p

В новой системе счисления целая часть будет записываться из последнего частного, которое будет цифрой старшего разряда, и всех остатков, записанных в порядке обратном порядку их получения.

ПЕРЕВЕСТИ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

10 → 5 | **256;114;17;354;1265**

10 → 8 | **64;112;27;364;2265**

10 → 3 | **999;1205;1702;3541;3265**

10 → 7 | **261;141;17;354;1265**

ЗАДАЧИ

Задача: в некоторой системе счисления число 71 записывается как « 56_x »? Определите основание системы счисления X .

$$71 = 56_x$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача: в некоторой системе счисления число 71 записывается как « 56_x »? Определите основание системы счисления X .

$$71 = 56_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $X > 6$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$56_x = 5 \cdot X^1 + 6 \cdot X^0 = 5 \cdot X + 6$$

- решаем уравнение

$$71 = 5 \cdot X + 6$$

$$X = 13$$

ЗАДАЧИ

Задача: в некоторой системе счисления число 71 записывается как « 155_x »? Определите основание системы счисления X .

$$71 = 155_x$$

- в записи есть цифра 5, поэтому $X > 5$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$155_x = 1 \cdot X^2 + 5 \cdot X^1 + 5 \cdot X^0 + 5 \cdot X^0 + 5$$

- решаем уравнение

$$71 = X^2 + 5 \cdot X + 5$$

$$X = 6$$

$$X \neq -11$$

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 27 записывается в виде 30. Укажите это основание.
2. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 13 записывается в виде 111. Укажите это основание.
3. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 12 записывается в виде 110. Укажите это основание.
4. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается в виде 1004. Укажите это основание.
5. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 30 записывается в виде 110. Укажите это основание.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1. Запись числа 210_5 в системе счисления с основанием N выглядит так 313_N .
Укажите основание N этой системы счисления
2. Запись числа 65_8 в системе счисления с основанием N выглядит так 311_N .
Укажите основание N этой системы счисления
3. Чему равно число x , если выполнено равенство $25_x + 17_{2x} = 13_{5x}$

ЗАДАЧИ

Задача: найдите все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 24 оканчивается на 3.

$$24 = k \cdot X + 3$$

$$21 = k \cdot X \quad X = \cancel{3}, 7, 21$$

ЗАДАЧИ

Задача: найдите все десятичные числа,
не превосходящие 40, запись которых в системе
счисления с основанием 4 оканчивается на 11.

$$N = k \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 1 = k \cdot 16 +$$

При $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ получаем

$$N = 5, 21, 37, 53, \dots$$

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1. найдите все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 40 оканчивается на 7.
2. найдите все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 17 оканчивается на 5.
3. найдите все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 42 оканчивается на 6.
4. Найдите все основания системы счисления, в которых запись числа 29 оканчивается на 5.
5. Найдите все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 101

ЗАДАЧИ

Задача: Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О и У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:


- | | | |
|----------|-------|----------|
| 1. ААААА | А → 0 | 1. 00000 |
| 2. ААААО | О → 1 | 2. 00001 |
| 3. ААААУ | У → 2 | 3. 00002 |
| 4. АААОА | | 4. 00010 |
| 5. ... | | 5. ... |

в троичной системе!

Найдите слово, которое стоит на 140-м месте от начала списка.

на 1-м месте: 0

на 140-м месте:

139  Сколько всего?

$$139 = 12011_3$$

↓
ОУАОО

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

Все 5-буквенные слова, состоящие из букв А,О,У, записаны в алфавитном порядке.
Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОУ

Выполните следующие задания:

- А) определите, сколько всего слов в списке;
- Б) укажите слова, которые стоят на 101-м, 125-м, 170-м и 210-м местах
- В) укажите порядковые номера слов ОАОАО, УАУАУ, АОУОА, УОАОУ
- Г) укажите номер первого и последнего слова, которое начинается с буквы О

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

Все 5-буквенные слова, состоящие из букв А,К,Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААР
4. ААААУ
5. АААКА

Выполните следующие задания:

- А) определите, сколько всего слов в списке;
- Б) укажите слова, которые стоят на 150-м, 250-м, 350-м и 450-м местах
- В) укажите порядковые номера слов АКУРА, КАРАУ, РУКАА, УКАРА, УРАКА
- Г) укажите номер первого и последнего слова, которое начинается с буквы Р

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

$$0,6375 = 6 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 + 7 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,0001$$

Развёрнутая форма записи:

разряды: ⁻¹ ⁻² ⁻³ ⁻⁴

$$0,6375 = 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0,1234_5 = 1 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3} + 4 \cdot 5^{-4}$$

перевод в десятичную систему

Схема Горнера:

$$0,6375 = 10^{-1} \cdot (6 + 10^{-1} \cdot (3 + 10^{-1} \cdot (7 + 10^{-1} \cdot 5)))$$

$$0,1234_5 = 5^{-1} \cdot (1 + 5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4)))$$

перевод в десятичную систему

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА: ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

$$0,1234_5 = 5^{-1} \cdot (1 + 5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4)))$$

$$5 \cdot (0,1234_5) = 1 + 5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4))$$

целая часть

дробная часть

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 = p^{-1} \cdot (a_1 + p^{-1} \cdot (a_2 + p^{-1} \cdot (a_3 + p^{-1} \cdot a_4)))$$
$$p \cdot (0, a_1 a_2 a_3 a_4) = a_1 + p^{-1} \cdot (a_2 + p^{-1} \cdot (a_3 + p^{-1} \cdot a_4))$$



Как найти a_2 ?

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА: ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

10 → 5

0,9376

Вычисления	Целая часть	Дробная часть
$0,9376 \cdot 5 = 4,688$	4	0,688
$0,688 \cdot 5 = 3,44$	3	0,44
$0,44 \cdot 5 = 2,2$	2	0,2
$0,2 \cdot 5 = 1$	1	0

$0,9376 = 0,4321_5$

АЛГОРИТМ ПЕРЕВОДА ДРОБНОЙ ЧАСТИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

1. Дробную часть числа (M) умножить на основание p .
2. Записать целую часть полученного числа в позицию с номером -1 ;
3. Выделить дробную часть получившегося числа и умножить на p ;
4. Выделить целую часть числа и записать ее в следующей справа разряд дробной части.
5. Выполнять пункты 3-4 до тех пор, пока в дробной части не будет получен ноль или не будет достигнута требуемая точность, например пять знаков после запятой

Заметим, что при переводе числа из десятичной системы счисления в другую систему может получиться число с бесконечной дробной частью

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА: ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

10 → 5 | **0,3**

10 → 6 | **25,375**

10 → 7 | **0,31**

10 → 3 | **1**
215,305

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1. Запишите число $0,12321_4$ в развернутой форме и с помощью схемы Горнера
2. Перевидите число $15,125$ в двоичную, четверичную, шестеричную и восьмеричную системы
3. Какие из этих чисел больше $0,5$; $0,011_2$; $0,12_3$; $0,21_4$; $0,22_5$; $0,25_6$; $0,35_7$; $0,35_8$?
4. Переведите числа $11,125$; $15,75$; $22,6875$ и $30,375$ в систему счисления с основанием 4

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Переведите из римской системы счисления: MDCXLIX, MMCDLXIV, CDXCI
2. Переведите в римскую систему счисления 103, 2067, 1951, 2019
3. Переведите в десятичную систему счисления: $F2B4_{16}$, 10100110_2 , 2012011_3 , 657_8
4. Известно, что для целого числа x выполнено: $33_{4+x} - 33_4 = 33_{10}$. Определите значение x . Ответ запишите в десятичной системе счисления.
5. Запись числа 67 в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание N этой системы счисления

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!

Контакты: к.т.н. Губанов В.С., преподаватель КМТ,
e-mail: gvs1819kmt@yandex.ru