

Лекция №2

Динамика материальной точки

к.ф.-м.н., доцент ШЕН
Стеблій Максим Евгеньевич

Раздел механики «**Кинематика**» посвящен описанию движения тел (траектории, скорости, ускорения) при этом не затрагивая описания причин этого движения.

Раздел механики «**Динамика**» занимается изучением причин движения. В основе классической (ньютоновской) «динамики» лежат три эмпирических (экспериментально установленных) закона, сформулированных Ньютоном в 1687 г.

Классическая механика имеет пределы применимости. Не применима если:

1. Скорость сопоставима со скоростью света ($u \approx c$) → **Релятивистская механика**.
2. Размеры системы сопоставимы с размером атома ($l \approx 10^{-9} \text{ м}$) → **Квантовая механика**.
3. Система содержит большое число частиц → **Статистика**.

Первый закон Ньютона: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. (скорость остается постоянной неопределенно долго, пока воздействие со стороны других тел не приведет к ее изменению)

Так как движение является понятием относительным (зависит от выбора системы отсчета), то тело движущееся с постоянной скоростью в одной системе может двигаться ускоренно относительно другой системы.

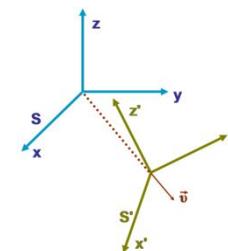
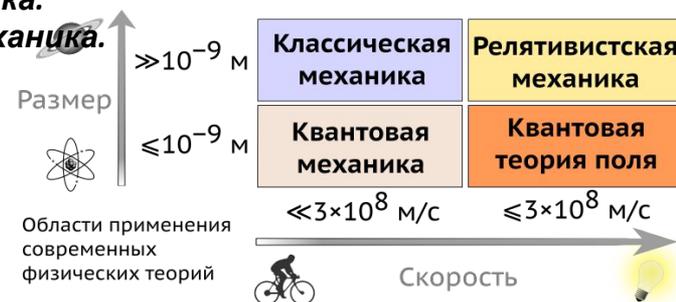
Система (группа систем) в которой выполняется первый закон Ньютона – **инерциальная система отсчета**.

Системы движущиеся с постоянной скоростью относительно друг друга – инерциальные.

Система в которой первый закон Ньютона не выполняется (скорость тела изменяется без действия других тел) – **неинерциальная система отсчета**.



Исаак Ньютон
1643-1727



Законы Ньютона

Для количественного описания процесса взаимодействия тел вводятся следующие понятия:

Сила (F) – векторная физическая величина являющаяся мерой воздействия (способности изменять положение, скорость, форму и т.д.) на данное тело со стороны других тел. Измеряется в ньютонах [Н].

Подчиняется **принципу суперпозиции**: результат воздействия на частицу нескольких внешних сил есть векторная сумма воздействия этих сил.

Масса (m) – мера **инертности** тела (, а так же определяет гравитационные свойства). Измеряется в килограммах [кг].

Инертность – способность тела оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения в отсутствие внешних воздействий, а также препятствовать изменению своей скорости при наличии внешних сил.

Экспериментально установлено и постулировано

Второй закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение всякого тела прямо пропорционально результирующей силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.

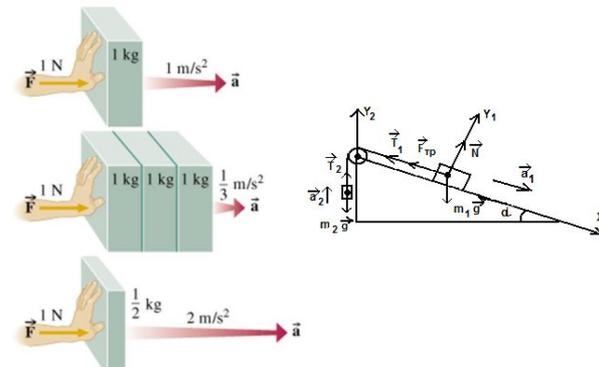
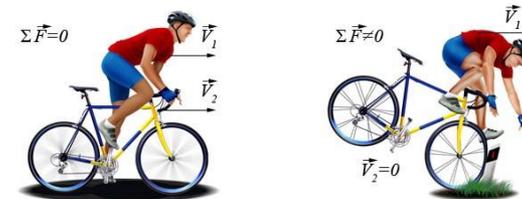
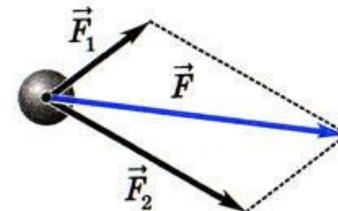
следствие \rightarrow $a = \frac{1}{m} \sum F$ \leftarrow причин

$$ma = \sum F \quad m \frac{dv}{dt} = \sum F \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \ddot{r} = \sum F$$

Третий закон Ньютона: всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, всегда равны по величине и противоположны по направлению.

$$F_{12} = -F_{21}$$

Силы возникают лишь попарно, причём любая сила, действующая на тело, имеет источник происхождения в виде другого тела. Иначе говоря, сила всегда есть результат взаимодействия тел.

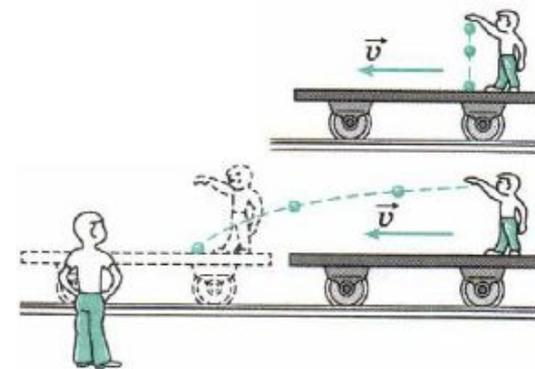


Магдебургские полушария (1654 г.)



Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета K и K' , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью \mathbf{u} . Пусть система K неподвижна, а система K' движется вдоль оси x . Рассмотрим движение точки P , если в начальный момент времени начала координат систем совпали:



Связь между координатами

Связь между скоростями

Связь между ускорениями

Связь между силами

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

d/dt

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + v_0 \\ \dot{y} = \dot{y}' \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = v'_x + v_0 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

d/dt

$$\begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

$\times m$

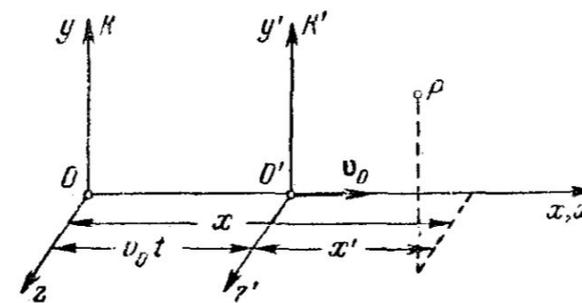
$$\begin{cases} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y \\ F_z = F'_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{F}' \end{cases}$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Следовательно, уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е. инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Принцип относительности Галилея: все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаково, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно.

Принцип Галилея является частным случаем **Принципа относительности** (А. Эйнштейна) - фундаментальный физический принцип, один из принципов симметрии, согласно которому **ВСЕ** физические процессы в инерциальных системах отсчета протекают одинаково, независимо от того, неподвижна ли система или она находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения.

Законы Ньютона + Принцип Галилея = Классическая механика



Импульс. Закон сохранения импульса.

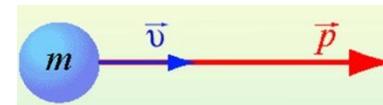
Считая массу тела m постоянной, второй закон Ньютона можно представить в виде:

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \rightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}$$

Действие силы \vec{F} приводит к изменению со временем некоторой величины $m\vec{v}$, которая называется импульсом \vec{p} :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

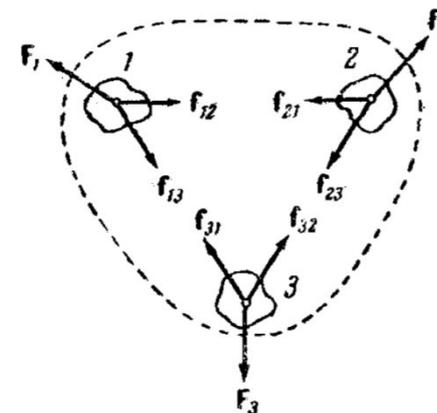
Импульс - векторная физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела. В классической механике импульс тела равен произведению массы этого тела на его скорость, направление импульса совпадает с направлением вектора скорости.



Второй закон можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

и сформулировать следующим образом: Производная импульса материальной точки по времени равна результирующей всех сил, действующих на точку. Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. Тела могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащим данной системе. Силы можно разделить на внутренние и внешние. Если внешних взаимодействий/сил нет, то система называется **замкнутой**.



Импульсом системы называется векторная сумма импульсов тел, образующих систему:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Рассмотрим систему из трех тел. Учитывая силы внутреннего взаимодействия между телами \vec{f}_{ij} (с учетом третьего з-на Ньютона) и внешнего воздействия \vec{F}_i , для каждого тела можно записать второй закон Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1: \frac{d}{dt} \vec{p}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 \\ 2: \frac{d}{dt} \vec{p}_2 = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2 \\ 3: \frac{d}{dt} \vec{p}_3 = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \frac{d}{dt} \sum \vec{p} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \rightarrow \frac{d}{dt} \sum \vec{p} = \sum \vec{F} \rightarrow \frac{d}{dt} \sum \vec{p} = 0 \rightarrow \sum \vec{p} = const$$

Закон сохранения импульса - векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю.

Работа. Мощность.

Действие силы может приводить к изменению положения или деформации тела.

Работа – скалярная величина, количественная мера действия результирующей силы на тело. Зависит от численной величины и направления силы f_s , и от перемещения тела s .

$$A = f_s s \rightarrow A = fs \cos \alpha$$

В зависимости от угла α работа может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если скалярная величина получается в результате перемножения двух векторных величин, то взаимосвязь соответствует скалярному произведению:

$$A = f s$$

Единица измерения работы – джоуль [**Дж**] – такая работа, которую совершает сила в 1 ньютон на пути в 1 метр.

Такая запись справедлива при условии, что сила f_s остается постоянной на всем участке s . Если величина проекции силы f_s на направление изменяется, то необходимо разбить путь на малые участки Δs , соответствующие постоянному значению силы f_s и перейти к интегрированию.

$$\Delta A = f_s \Delta s$$

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum f_s \Delta s = \int_s f_s ds$$

Часто важен не только результат действия силы (перемещения, деформация), но и интенсивность действия силы (временная характеристика). Вводится величина, показывающая, какую работу данная сила совершает в единицу времени – мощность.

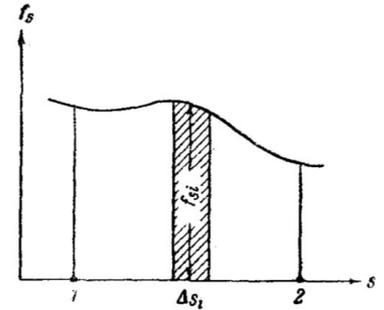
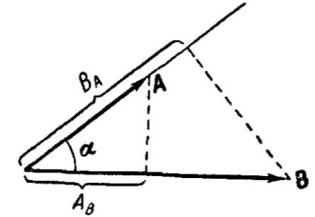
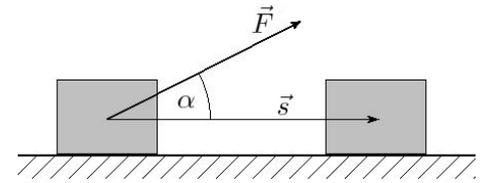
Мощность – скалярная величина, характеризующая интенсивность действия силы и численно равная отношению работы ΔA к промежутку времени Δt , за который она совершена.

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{d(fds)}{dt} = f \frac{dds}{dt} = f v$$

Единица измерения мощности – ватт [**Вт**] – такая мощность, Γ которой за 1 с совершается работа, равная 1 **Дж**.



Потенциальные силы

Рассмотрим случай, когда в каждой точке пространства на тело действует сила, зависящая от текущей координаты – тело находится в поле сил. Простейший случай – центральное поле сил (поле сил тяжести или шар на пружине). Сила действующая на шар будет зависеть только от радиуса r и принимает как положительные, так и отрицательные значения, при переходе положения равновесия r_0 .

$$F = -k(r - r_0)$$

Сила зависит только от положения тела (не зависит от скорости, например). В таком случае работа таких сил над телом не зависит от пути, а определяется только начальным и конечным положением. Поле таких сил называется потенциальным, а силы – консервативными.

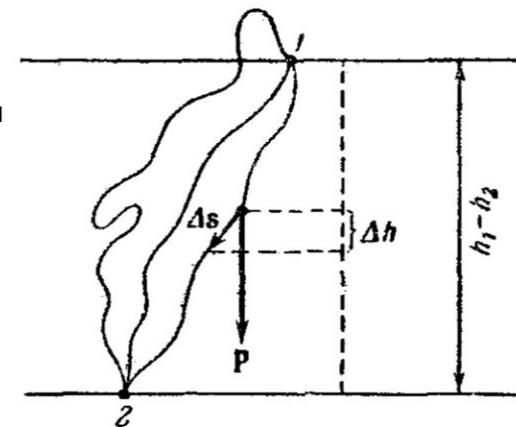
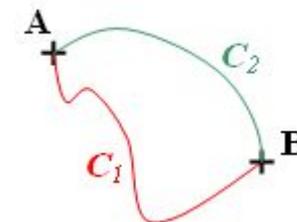
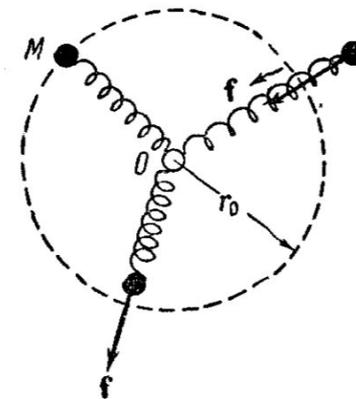
Силы, работа которых зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются неконсервативными.

Консервативные силы - это силы, работа которых не зависит от вида траектории, точки приложения этих сил и закона их движения, и определяется только начальным и конечным положением этой точки. Интегральное определение: **консервативные силы** — это такие силы, работа которых по любой замкнутой траектории равна 0.

$$\oint_C F dl = 0$$

Пример консервативных сил: сила тяжести, сила упругости, сила кулоновского взаимодействия
Пример неконсервативных сил: сила трения.

$$A = Fs = mg(h_1 - h_2)$$



Энергия

При некоторых условиях тела способны совершать работу над другими телами. Величина, характеризующая способность совершать работу – **энергия**.

Эта способность может быть обусловлена двумя причинами: движением и действием потенциальной силы.

Кинетическая (T) – энергия движения. Потенциальная (U) – энергия положения (взаимодействия).

Энергия - скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и взаимодействия материи, мерой перехода движения материи из одних форм в другие. Единица измерения – джоулях [Дж].

Кинетическая энергия

Пусть тело **1** массой m_1 движется со скоростью u_1 и действует на тело **2**. Это приведет к перемещению тела **2** на расстояние ds , как будто подействовала сила F . Получается, что тело **1** совершило работу dA над телом **2**:

$$dA = Fds$$

Очевидно, что в данном случае внешняя сила отсутствовала и работа совершалась за изменения скорости u_1 тела **1**. Можно сказать, что тело **1** обладало запасом некоторой величины, которая могла быть переведена в работу. В общем случае эта величина называется энергией E . В данном случае, работа dA равна убыли кинетической энергии dT :

$$dA = -dT$$

Это равенство свидетельствует о том, что энергия измеряется в тех же величинах,

что и работа – джоулях [Дж].

$$dA = -dT$$

используя связь работы и энергии

Величина кинетической энергии может быть только положительной.

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F \quad \text{- второй закон Ньютона}$$

$$dv_1 = \frac{1}{m_1} F dt \quad \times m v_1$$

$$m v_1 dv_1 = v_1 F dt = dT$$

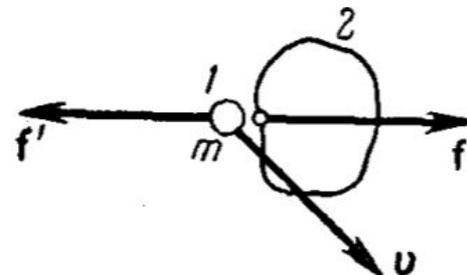
$$dT = m v_1 dv_1$$

$$\int dT = \int m v_1 dv_1$$

$$T = \frac{m v^2}{2}$$

- изменение энергии тела **1** связано с изменением скорости тела u_1 .

Исходная величина энергии определялась начальной скоростью тела (состоянием тела).



Потенциальная энергия

Рассмотрим тело, находящееся в потенциальном поле сил. Изменение положения тела связано с совершением работы, которая, в поле потенциальных сил, зависит только от начального и конечного положения.

Переход из положения **1** в положение **2** связан с совершением работы A_{12} . По аналогии со случаем кинетической энергии, можно предположить, что эта работа так же связана с изменением некоторой (потенциальной) энергии:

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Таким образом, каждой точке пространства можно сопоставить некоторое значение функции $U(\mathbf{r})$, зависящей от координат (радиус-вектора).

Конкретный вид функции $U(\mathbf{r})$ зависит от характера силового поля (определяется через силу).

Потенциальная энергия – относительная величина, зависит от выбора точки отсчета.

В поле силы тяжести масса обладает потенциальной энергией:

$$U = mgh$$

Потенциальная энергия сжатой пружины:

$$F = -kx$$

$$dA = -kx dx$$

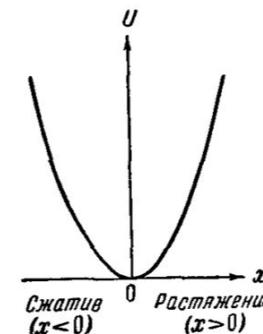
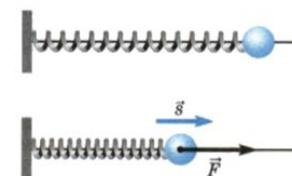
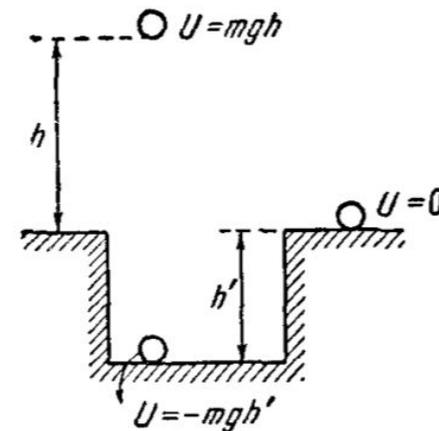
$$U = -\frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия - мера взаимодействия:

Гравитационное поле + масса

Электрическое поле + электрический заряд

Магнитное поле + движущийся электрический заряд



Полная энергия. Закон сохранения энергии.

В общем случае тело может обладать одновременно и кинетической и потенциальной энергией. Сумма этих энергий образует полную механическую энергию. На примере тела массой m движущегося на высоте h со скоростью u :

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

энергия движения энергия взаимодействия

В результате различных процессов кинетическая энергия может переходить в потенциальную и обратно (маятник, пружина).

Рассматривая бросок предмета вверх, в поле действия силы тяжести, можно отметить, что полная механическая энергия остается постоянной – действует только одна сила, постоянной величины и направления. Наличие добавочных внешних сил приведет к совершению дополнительной работы, что изменяет полную энергию системы.

Приращение полной энергии системы тел, между которыми действуют консервативные силы, равно работе внешних сил A' , приложенным к телам системы:
 $\Delta E = E_2 - E_1 = A'$

Если внешние силы отсутствуют, то:

$$A' = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

$$E = const$$

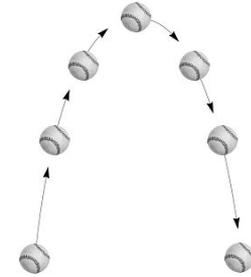
Закон сохранения энергии - фундаментальный закон природы, установленный эмпирически и заключающийся в том, что в изолированной физической системе, в которой действуют только потенциальные силы, полная механическая энергия остается постоянной.

Энергия системы складывается из сумм полных механических энергий входящих в систему тел:

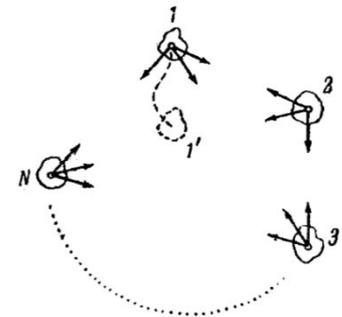
$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum U_{ij}$$

← энергия взаимодействия i -го тела со всеми остальными телами системы.

потенциальная энергия гравитационного поля



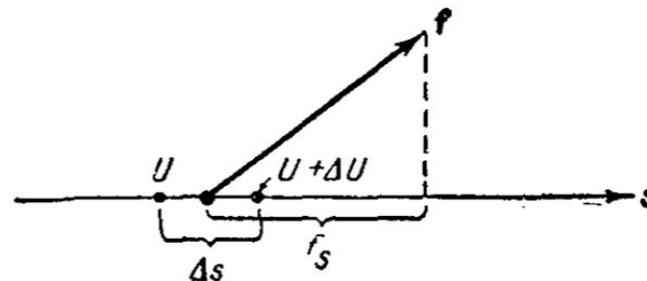
потенциальная энергия деформации (межатомного взаимодействия)



Связь между потенциальной энергией и силой.

Тело обладает определенной потенциальной энергией U в каждой точке потенциального поля. Также в этих точках определено значение силы F , действующей на тело. Очевидно, что между этими величинами должна существовать взаимосвязь.

Рассмотрим работу совершаемую силами поля F по перемещению тела на расстояние Δs .



Работа (A) — результат действия силы (F) и результат изменения энергии (U).

$$\Delta A = f_s \Delta s$$

⇔

$$\Delta A = -\Delta U$$

$$f_s \Delta s = -\Delta U$$

$$f_s = -\frac{\Delta U}{\Delta s}$$

Получим значение силы усредненное на участке Δs .

$$f_s = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} = -\frac{dU}{ds}$$

Значение силы в точке.

Можно разложить по компонентам (по проекциям):

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{dU}{dx} \\ f_y &= -\frac{dU}{dy} \\ f_z &= -\frac{dU}{dz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{f} = -\left(\frac{dU}{dx} \vec{i} + \frac{dU}{dy} \vec{j} + \frac{dU}{dz} \vec{k} \right)$$

Связь между силой и потенциальной энергией:

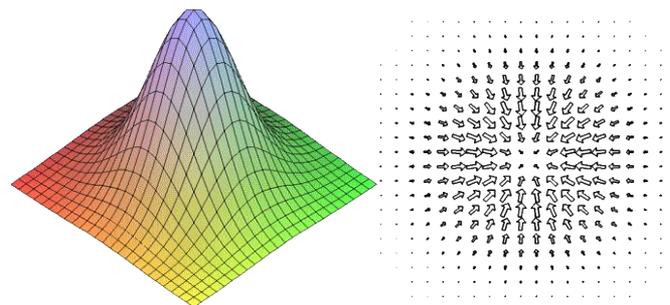
$$\vec{f} = -\text{grad}U$$

$$\vec{f} = -\nabla U$$

Такой оператор называется градиентом

$$\text{grad} = \left(\frac{d}{dx} \vec{i} + \frac{d}{dy} \vec{j} + \frac{d}{dz} \vec{k} \right)$$

Градиент - вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.



Условие равновесия.

В замкнутой системе полная энергия остается постоянной, поэтому кинетическая энергия может возрасти только за счет уменьшения потенциальной энергии.

В системе существует такое положение, которое соответствует нулевому действию силы (скомпенсированному).

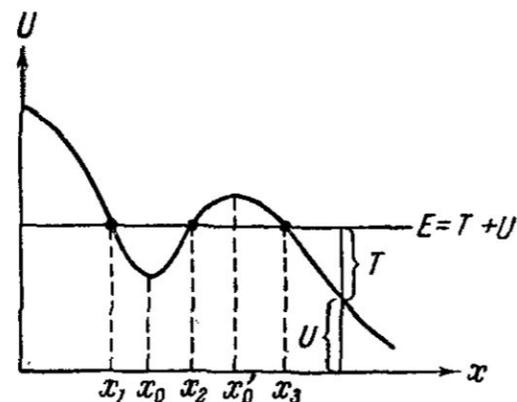
$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow f_x = 0$$

Отсутствие силы является условием равновесия (покоя).

Равенство нулю производной позволяет найти экстремумы функции U .

Положение с максимальным значением потенциальной энергии соответствует неустойчивому равновесию.

С минимальной – устойчивому.



Рассмотрим закон сохранения энергии и закон сохранения импульса на примере маятника Ньютона.

Маятник Ньютона - механическая система для демонстрации преобразования кинетической энергии в потенциальную и наоборот. (Изобретен в 1967 г.)

Закон сохранения импульса выполняется **при отсутствии** внешних сил.

Закон сохранения энергии выполняется **при действии** потенциальных сил.

$$\sum p = const$$

$$\sum E = \sum U = const$$

$$mv = mv'$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2}$$

