Теоретическое программирование

- Математические основы программирования;
- Теория схем программ;
- Семантическая теория программ;
- Теория параллельных вычислений;
- Прикладные задачи теоретического программирования.

Схемы программ

Программа – способ задания алгоритма.

Свойства программ:

- является конструктивным объектом;
- работает конечное время;
- характерны массовость и однозначность.

Схемы программ – математические модели программ.

Свойства схем программ:

- позволяют изучать свойства широких классов программ;
- сохраняют все свойства и особенности рассматриваемого класса программ;
- позволяют игнорировать несущественные свойства;
- изобразительно подобны программе.

Стандартные схемы программ

Класс стандартных схем включает:

- константы;
- простые переменные;
- выражения;
- операторы присваивания;
- условные операторы;
- метки;
- переходы на метки.

Класс стандартных схем характеризуется:

- базисом класса;
- структурой схем.

Базис B класса стандартных схем состоит:

- 4 счетных множества символов;
- множество операторов.

Множества символов:

1. Переменные:
   $X=\{x_1, x_2 \ldots x_n; y, y_1 y_2 \ldots; z, z_1, z_2 \ldots\};$
2. Функциональные символы:
   $F=\{f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)} \ldots; g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)} \ldots; h^{(0)}, h^{(1)}, h^{(2)} \ldots\};$
3. Предикатные символы:
   $P=\{p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)} \ldots; q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)} \ldots;\};$
4. Специальные символы:
   старт, стоп, (,), := и т. д.

Множество операторов:

1) начальный оператор:
   старт(x_1, x_2...x_k);
2) заключительный оператор:
   стоп (t_1, t_2...t_n);
3) оператор присваивания:
   $x:=t$;
4) условный оператор (тест);
5) оператор петли.

Программа:

```
void main(void)
{ int x, y;
  cin>>x;
  y=1;
  while (x>0)
  { y=x*y;
    x--;
  }
  cout<<y;
}
```

Схема программы:

0: старт (x) на 1,

1: y: = a на 2,

2: если p(x) то 5 иначе 3,

3: y: = g (x,y) на 4,

4: x: = h (x) на 2,

5: стоп (y).

старт (x),

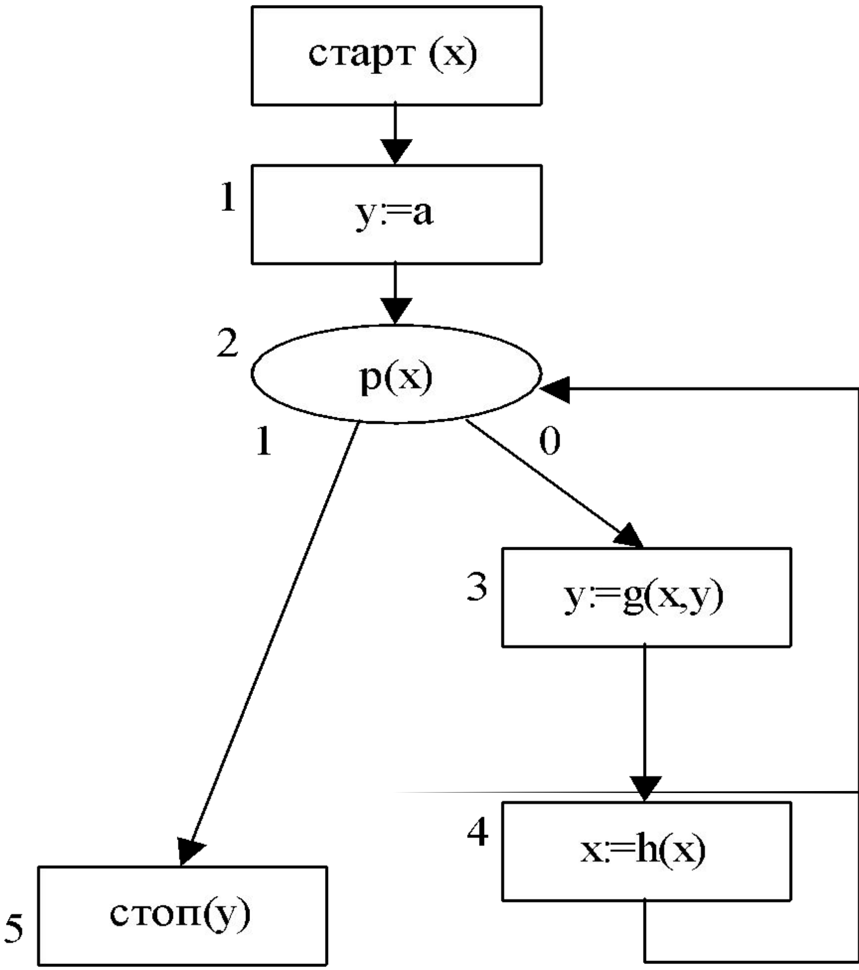
y: = a,

2: если p(x) то 5 иначе 3,

3: y: = g (x,y),

x: = h (x) на 2,

5: стоп (y).



Интерпретация:

область интерпретации D - множество целых неотрицательных чисел;

I(x)=4; I(y)=0; I(a)=1;

I(g)=G, где G(d1,d2)= d1*d2;

I(h)=H, где H(d)= d-1;

I(p)=P, где P - предикат

$$P(d)=\begin{cases} 0, \text{ если } d>0 \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Конфигурация		U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}
Метка		0	1	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3
Значения	X	4	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1
	Y	0	1	1	4	4	4	12	12	12	24	24	24	24

Рекурсивные схемы

$$FACT(x) = \begin{cases} 1, \text{если x} = 0, \\ x * FACT(x-1), \text{если x} > 0. \end{cases}$$

FACT(x),

FACT(x)=если x=0 то 1 иначе x*FACT(x-1).

FACT(4)=если 4=0 то 1 иначе 4*FACT(4-1)=
=4*FACT(3)=4*(если 3=0 то 1 иначе 3*FACT(3-1))=
=4*3*FACT(2)=12*(если 2=0 то 1 иначе 2*FACT(2-1))=
=12*2*FACT(1)=24*(если 1=0 то 1 иначе 1*FACT(1-1))=
=24*1*FACT(0)=24*(если 0=0 то 1 иначе 0*FACT(0-1))=24

Базис РС включает:

- 4 счетных множества символов:
  - Переменные;
  - Функциональные символы;
  - Предикатные символы;
  - Специальные символы.
- Множество логических выражений.
- Множество термов.

Множество функциональных символов:

1. Множество базовых функциональных символов ($f^{(1)}$, $g^{(2)}$);
2. Множество определяемых функциональных символов ($F^{(1)}$, $G^{(2)}$).

Термы:

1. Простые термы

- Базовые термы;
- Вызовы ($F^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$).

2. Условные термы:

если π то t_1 иначе t_2.

Пример:

- базовые термы - f(x, g(x, y)); h(h(a));
- вызовы - F(x); H(H(a)); F(H(x), f(x,y));
- условный терм
если p(x, y) **то** h(h(a)) **иначе** F(x).

Рекурсивное уравнение:

$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)=t(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Рекурсивная схема: (t, M)

Рекурсивная программа: (R_S, I)

Примеры РС:

1) R_{S1}: F(x),

F(x)=**если** p(x) **то** a **иначе** g(x, F(h(x))).

2) R_{S2}: A(x, y),

A(x, y)=**если** p(x) **то** f(x) **иначе** B(x, y),

B(x, y)=**если** p(y) **то** A(g(x), a) **иначе** C(x, y);

C(x, y)=A(g(x), A(x, g(y))).

3) R_{S3}: F(x),

F(x)=**если** p(x) **то** x **иначе** f(F(g(x)), F(h(x))).

Протокол выполнения рекурсивной программы

R_{S1}: F(x),

F(x)=**если** p(x) **то** a **иначе** g(x, F(h(x))).

I(x)=4; I(a)=1;

I(g)=G, где G(d1,d2)= d1*d2;

I(h)=H, где H(d)= d-1;

I(p)=P, где P (d)=1, если d=0, иначе P (d)=0.

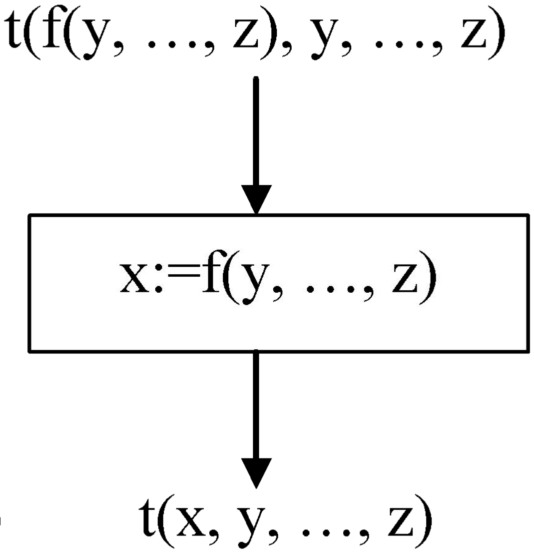
№ п/п	Значение терма для ***(R_S, I)***
1	F(4)
2	4*F(3)
3	4*(3*F(2))
4	4*(3*(2*F(1)))
5	4*(3*(2*(1*F(0))))
6	4*(3*(2*(1*1)))=24

Трансляция схем программ

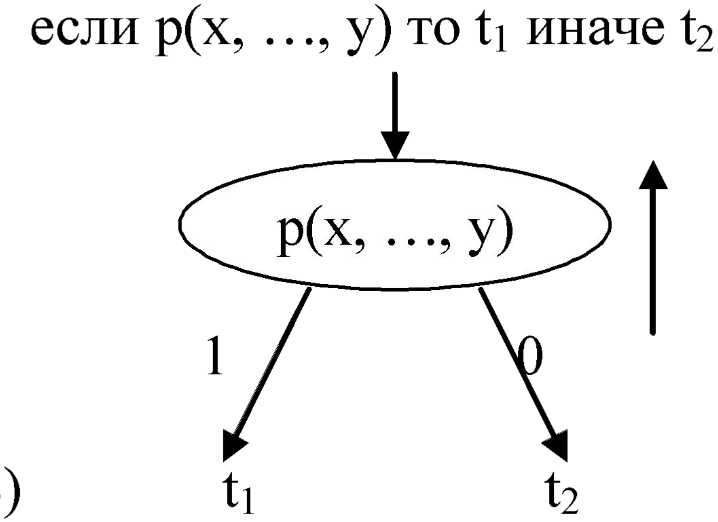
Теорема Маккарти: Класс стандартных схем транслируем в класс рекурсивных схем.

Алгоритм трансляции:

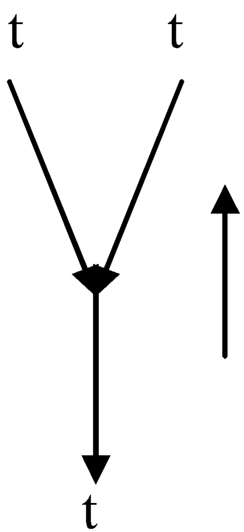
1. Точки сечения
   $i \Leftrightarrow F_i(x, y, \ldots, z)$;
   старт $\Leftrightarrow F_1(x, y, \ldots, z)$;
   стоп(x) $\Leftrightarrow x$;
2. Граф рассекается по точкам сечения;
3. Для каждого фрагмента строится рекурсивное уравнение:
   $F_i(x, y, \ldots, z)=\ldots$



A)



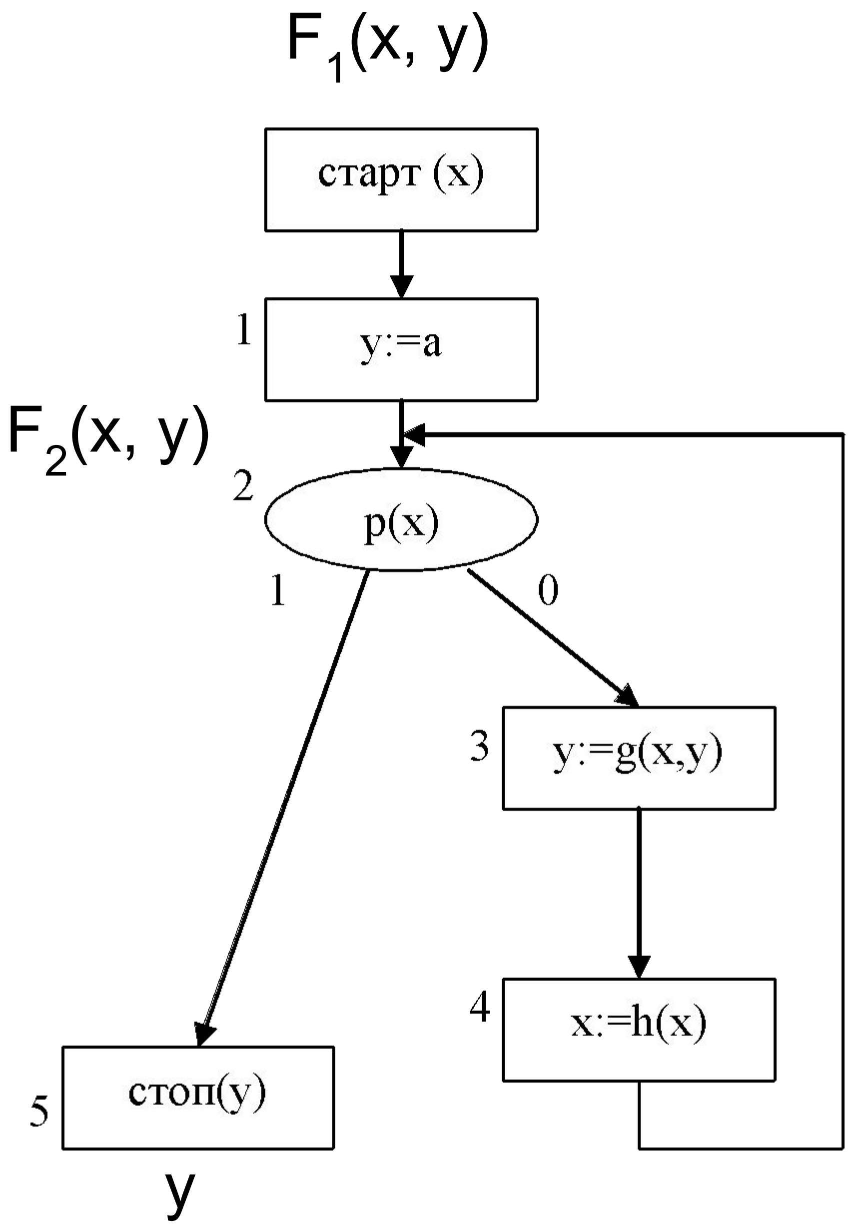
B)



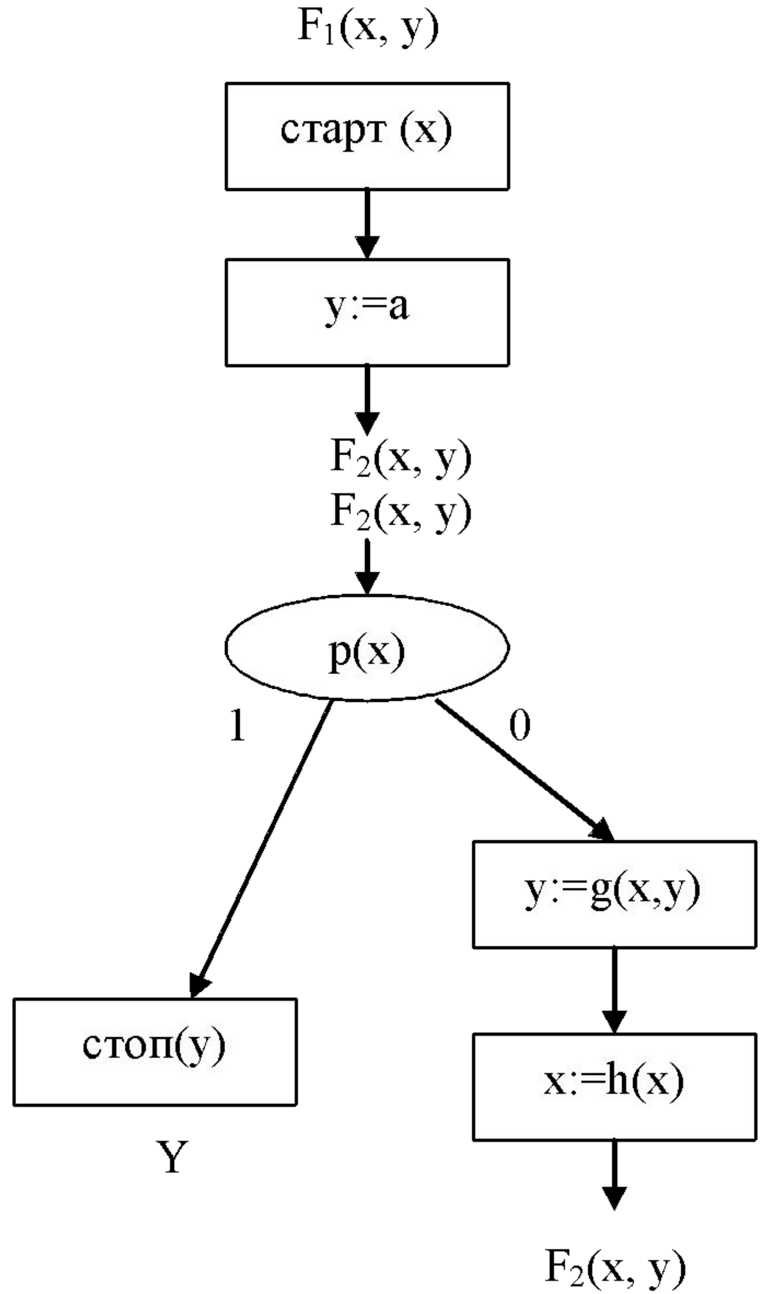
C)

$$F_i(x, y, \ldots, z) = t(x, y, \ldots, z);$$

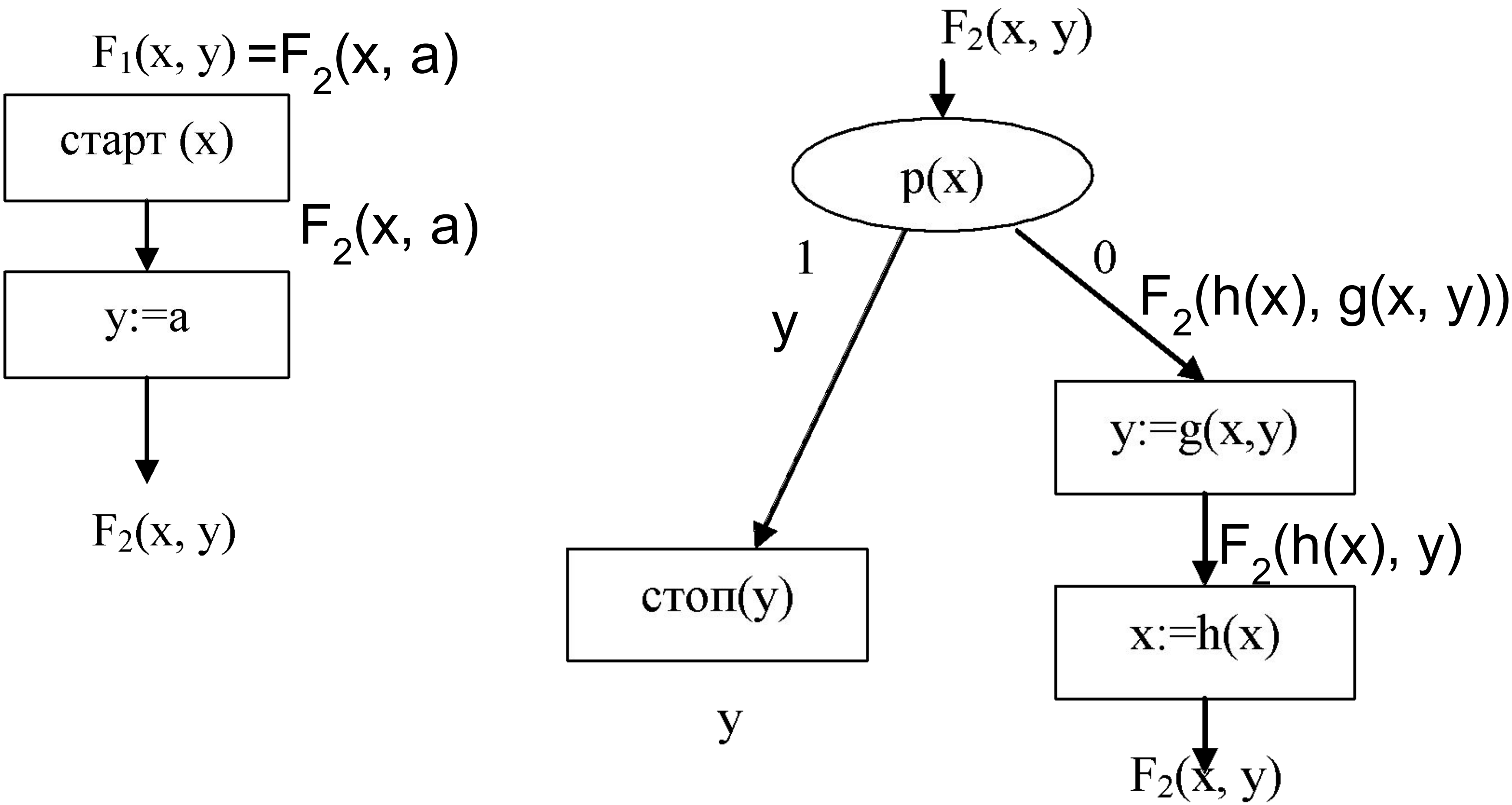
Пример 1:



$F_1(x, y)$
старт (x)
1
y:=a
$F_2(x, y)$
2
p(x)
1
0
3
y:=g(x,y)
4
x:=h(x)
5
стоп(y)
y



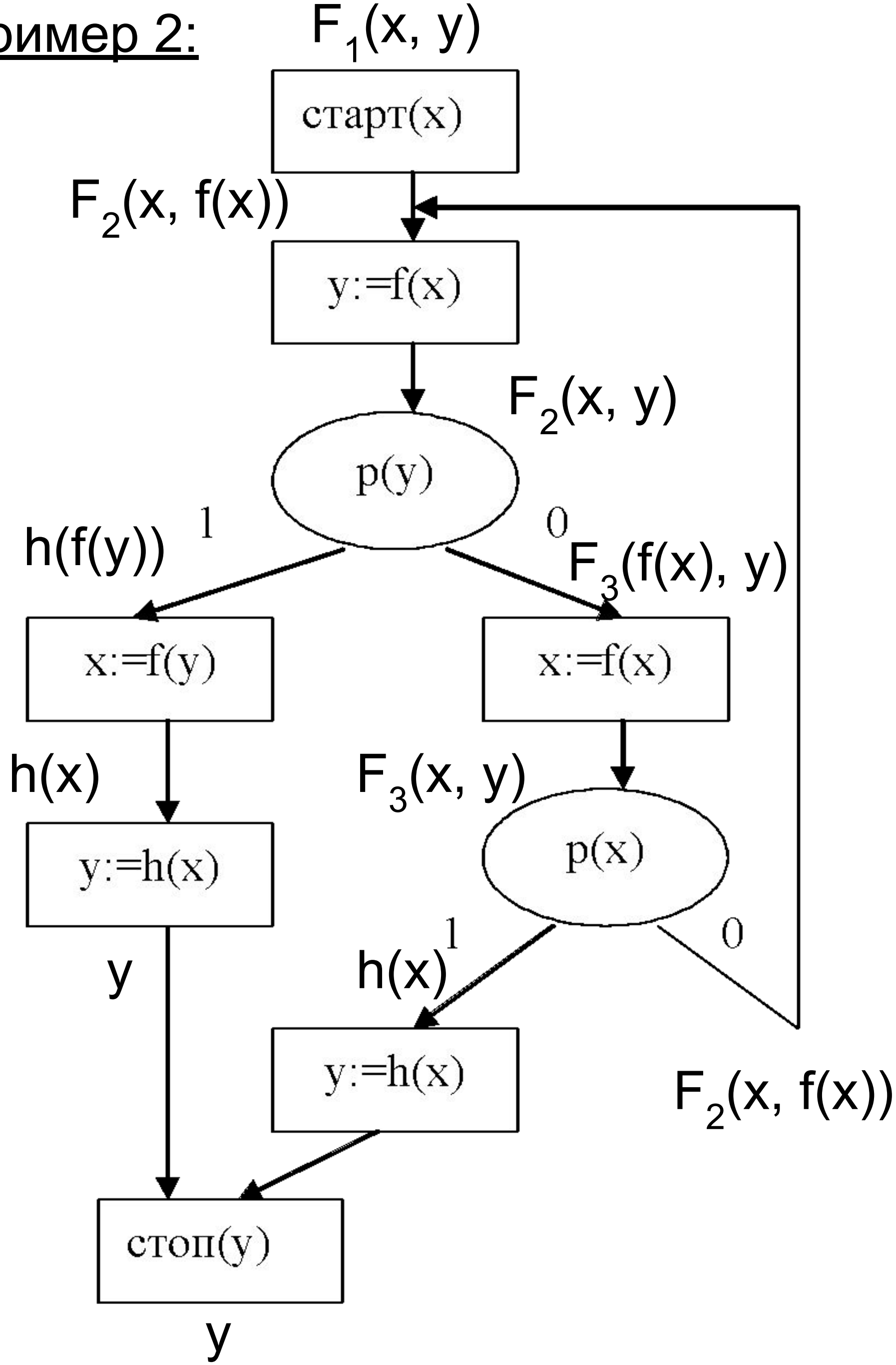
$F_1(x, y)$
старт (x)
y:=a
$F_2(x, y)$
$F_2(x, y)$
p(x)
1
0
y:=g(x,y)
стоп(y)
Y
x:=h(x)
$F_2(x, y)$



$F_1(x, y) = F_2(x, a)$,

$F_2(x, y)$ = если $P(x)$ то y иначе $F_2(h(x), g(x,y))$

Пример 2:



$F_1(x, y) = F_2(x, f(x))$,

$F_2(x, y) =$ если $p(y)$ то $h(f(y))$
иначе $F_3(f(x), y)$,

$F_3(x, y) =$ если $p(x)$ то $h(x)$
иначе $F_2(x, f(x))$.

Линейные унарные рекурсивные схемы

F(x),
F(x) = если p(x) то f(x) иначе F(F(g(x))).

F(a),
F(x) = если p(x) то x иначе G(x),
G(x) = если q(x) то f(F(f(x))) иначе g(F(g(x))).

Теорема (Патерсон-Хьюит). Класс линейных унарных рекурсивных схем транслируем в класс стандартных схем.

Схемы с процедурами

- Главная схема
  $x=F^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$
- Множество схем процедур.

Главная схема	Множество схем процедур
(старт(x), 1: z:=x, 2: u:=a, 3: x:=F(x, z, u), 4: u:=b, 5: z:=F(z, x, u) 6: стоп(z))	F(y, v, w)=(старт, 1: если p(y) то 2 иначе 4, 2: y:=h(y), 3: v:=G(v, w), 4: если q(w) то 5 иначе 6, 5: y:=v, 6: стоп(y)) G(t, r)=(старт, 1: если q(r) то 2 иначе 3, 2: t:=r, 3: стоп(t))

Трансляция рекурсивных схем в схемы с процедурами

- (**старт** $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$,
  1: $y:=t\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,
  2: **стоп** (y)).
- $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ = если $p(x_i, \ldots, x_n)$ то t_{i1} иначе t_{i0}

  $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ = (старт,
  1: если $p(x_{i1}, \ldots, x_{il})$ то 2 иначе k,
  2: $S(v, t_{i1})$ на m,
  k: $S(v, t_{i0})$,
  m: стоп (v)).

$S(v, t)$:
а) если $t=x$, то $S(v, t) \Rightarrow v:=x$;
б) если $t=\phi^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$, то

$$S(v, t) = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, v:=\phi^{(n)}(z_1, \ldots, z_n),$$

$$\sigma_i = \begin{cases} z_i:=x, \text{ если } t_i \text{ – переменная } x, \\ S(z_i, t_i) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Рекурсивная схема:

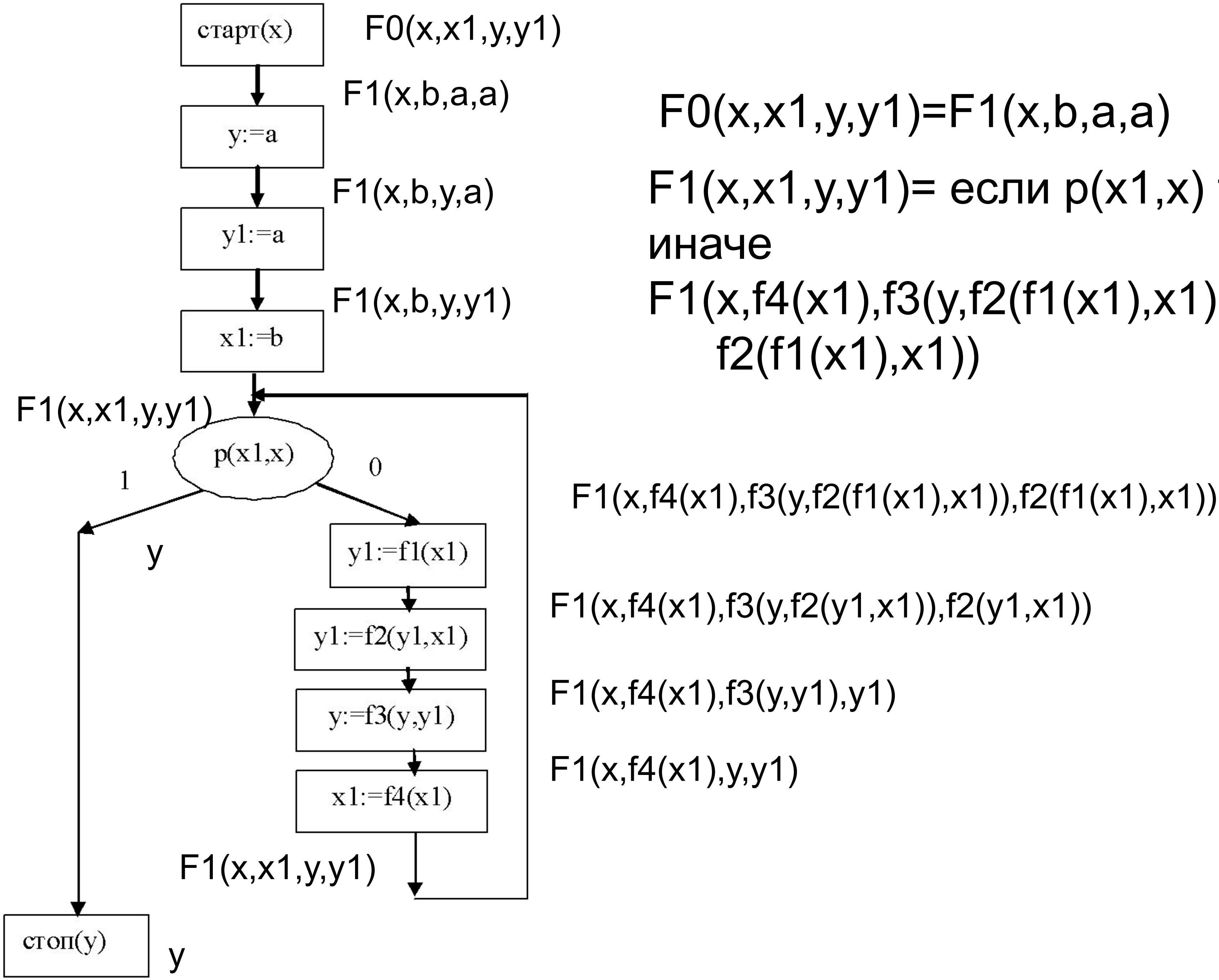
S: F(x),

F(x)=**если** p(x) **то** x **иначе** f(F(g(x)), F(h(x)))

Схема с процедурами:

S: (старт (x),
1: y:=F(x),
2: стоп(y))

F(x) = (старт,
1: если p(x) то 2 иначе 3,
2: v:=x на 8,
3: z:=g(x),
4: z:=F(z),
5: u:=h(x),
6: u:=F(u),
7: v:=f(z, u),
8: стоп(v)).



F0(x,x1,y,y1)=F1(x,b,a,a)

F1(x,x1,y,y1)= если p(x1,x) то y иначе
F1(x,f4(x1),f3(y,f2(f1(x1),x1)),
f2(f1(x1),x1))

F0(x,x1,y,y1)=F1(x,b,a,a)

F1(x,x1,y,y1)= если p(x1,x) то y
иначе F1(x,f4(x1),f3(y,f2(f1(x1),x1)),f2(f1(x1),x1))

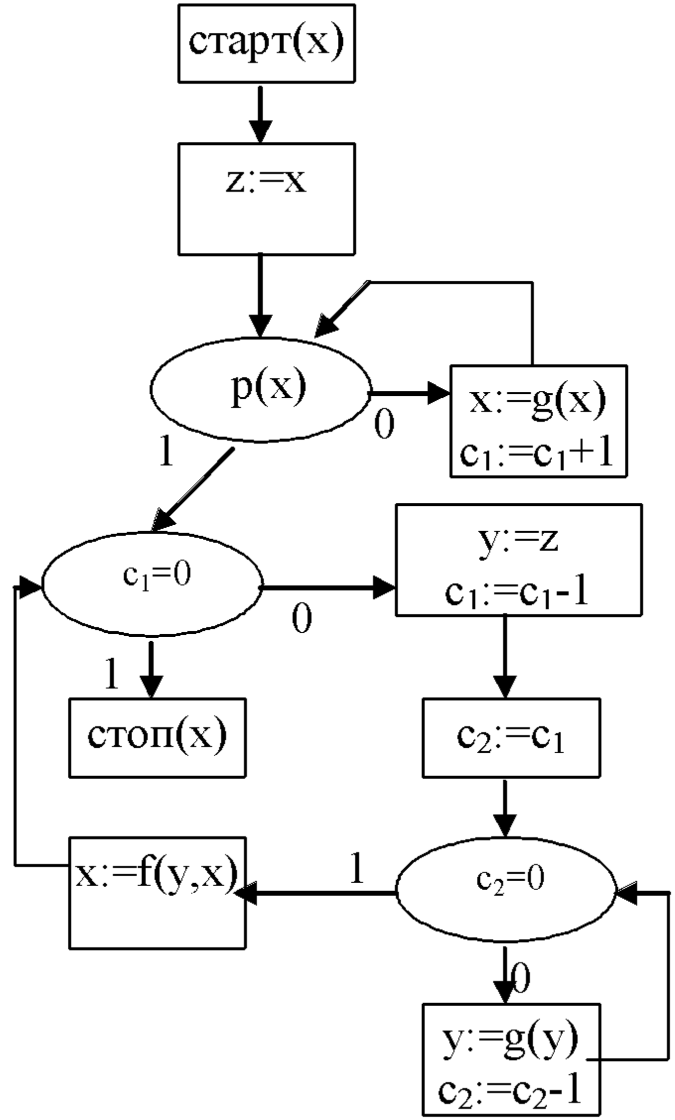
S: (старт (x),
1: x1:=b;
2: y:=a;
3: y1:=a;
4: y:=F1(x,x1,y,y1);
5: стоп (y))

F1(x,x1,y,y1)=(старт,
1: если p(x1,x) то 7 иначе 2
2: y1:=f1(x1);
3: y1:=f2(y1,x1);
4: y:=f3(y,y1);
5: x1:=f4(x1);
6: v:=F1(x,x1,y,y1) на 8;
7: v:=y;
8: стоп (v))

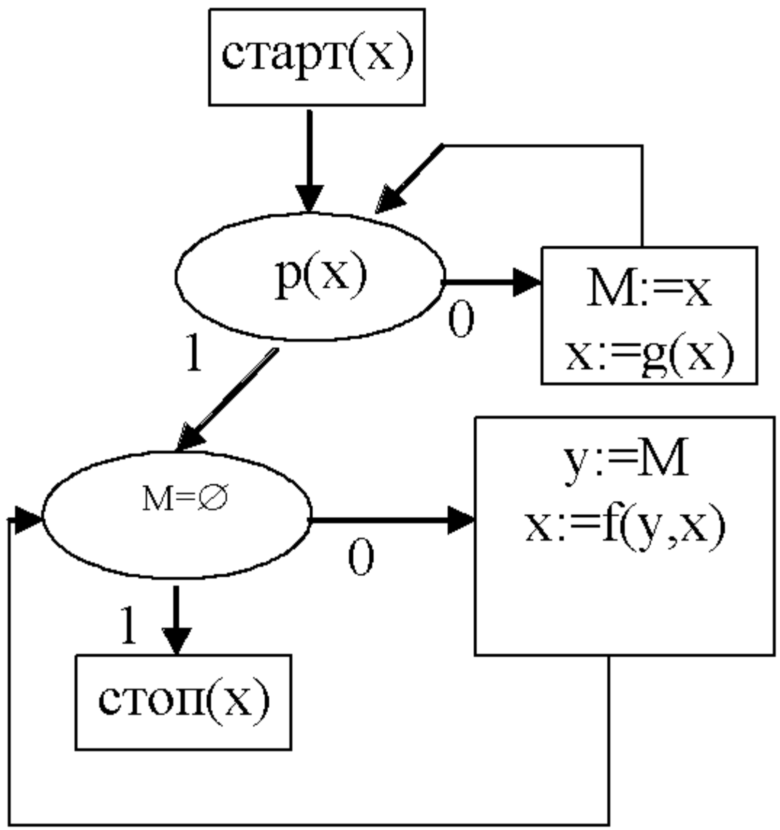
Обогащенные схемы

- класс счетчиковых схем; интерпретированные операторы: c:=c+1; c:=c-1; c=0; c1:=c2;

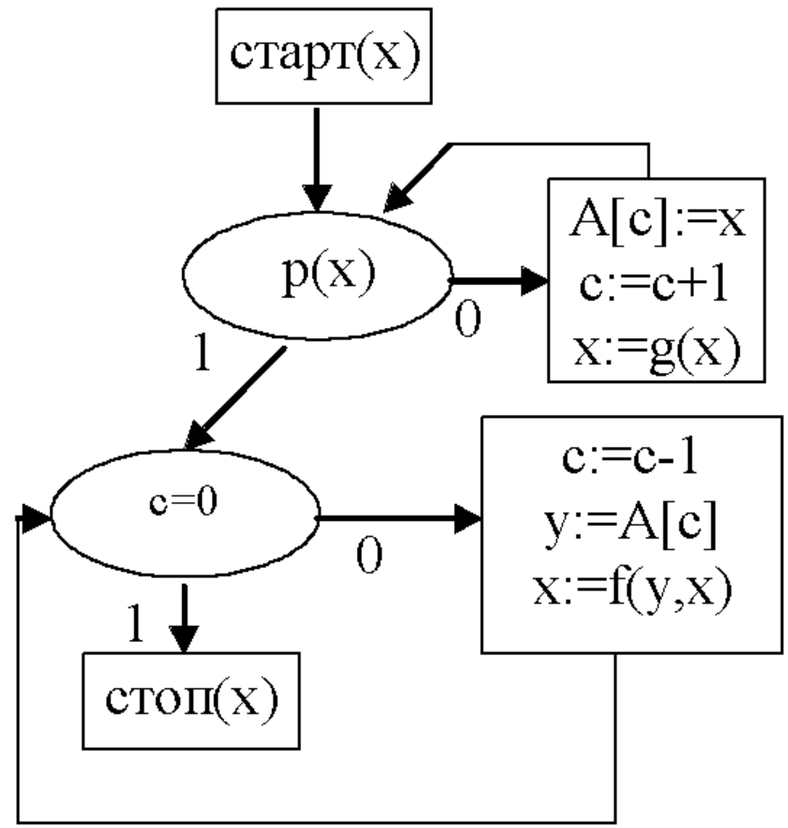
F(x),
F(x)= если p(x) то x
иначе f(x, F(g(x)))



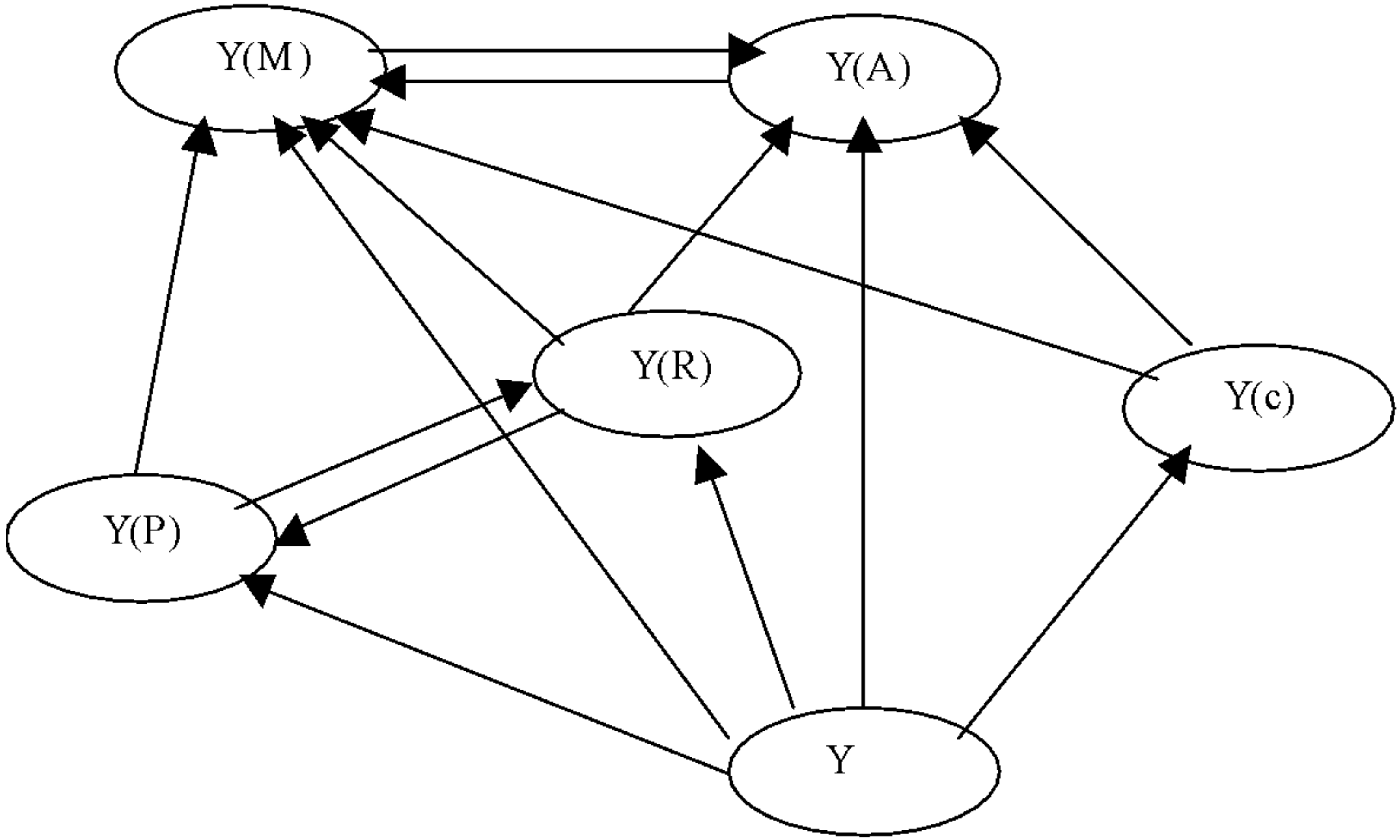
- класс магазинных схем; интерпретированные операторы: M:=x; x:=M; M=∅;



- класс схем с массивами; интерпретированные операторы: A[c]:=x; x:=A[c].



Трансляция обогащенных схем:



Y — стандартные схемы; Y(M) — магазинные схемы;
Y(R) — рекурсивные схемы; Y(A) — схемы с массивами;
Y(c) — счетчиковые схемы; Y(P) — схемы с процедурами.

Структурированные схемы

$(o_0, o_1, \ldots, o_n)$
Специальные символы: **если, то, иначе, пока, цикл, конец**.

Три типа схемных операторов:

- простой оператор;
- условный оператор:
  если π **то** σ1 **иначе** σ0 **конец**.
- оператор цикла:
  пока π **цикл** σ **конец**
  до π **цикл** σ **конец**.

Стандартная схема программы	Структурированная схема программы

старт(x),
1: y := f(x),
2: если p(y) то 7 иначе 3,
3: y := f(y),
4: если p(y) то 5 иначе 7,
5: если p(x) то 6 иначе 7,
6: x := h(x) на 5,
7: стоп(x, y).
	старт(x),
	y := f(x),
	если p(y) то иначе
	        y := f(y),
	        если p(x) то
	        пока p(x)
	цикл x := h(x) конец
	иначе конец конец,
	стоп(x, y).