ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Тема 2.3.
Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

Понятие о дифференциальном уравнении

Основные вопросы:

- Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения. Виды дифференциальных уравнений.
- Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Мудрецы говорили, что *законы нашей вселенной написаны на математическом языке.* Конечно, в алгебре есть много примеров различных уравнений, но это, большей частью, учебные примеры, неприменимые на практике.

По-настоящему интересная математика начинается, когда мы хотим описать процессы, протекающие в реальной жизни. Но как отразить фактор времени, которому подчиняются реальные процессы –демографические показатели?

Вспомним одно важное определение из курса математики, касающееся производной функции. Производная является скоростью изменения функции, следовательно, она может помочь нам отразить фактор времени в уравнении.

То есть, мы составляем уравнение с функцией, которая описывает интересующий нас показатель и добавляем в уравнение производную этой функции. Это и есть ***дифференциальное уравнение***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

$$F(x, y, y') = 0,$$

Неизвестную функцию обычно обозначают $y(x)$ или просто y, а ее производные — y', y'' и т. д.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на ***обыкновенные*** (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и ***уравнения с частными производными*** (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных. Существуют также ***стохастические дифференциальные уравнения*** (СДУ), включающие случайные процессы.

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются ***дифференциальными уравнениями***.

$$\mathbf{F(x,y,y') = 0} \qquad y'+y+3x=0$$

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция и её первая производная, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением I порядка**

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция, производные и производная n-го, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением n- порядка.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения***

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - ***обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка***. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - ***обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \phi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в ***тождество***.

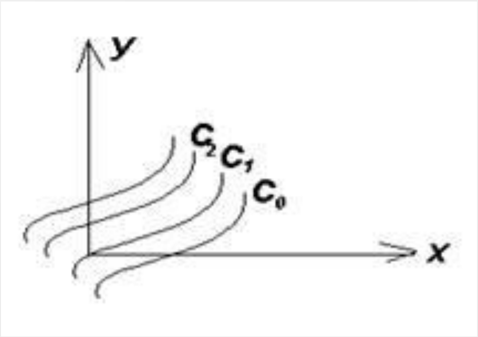


График решения дифференциального уравнения называют ***интегральной кривой дифференциального уравнения***.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной ***C***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется ***нахождение любого частного решения дифференциального*** уравнения вида $\mathbf{y = \phi(x, C_0)}$, удовлетворяющего начальным условиям $\mathbf{y(x_0) = y_0}$.

Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Алгоритм решения задачи Коши

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.
2. Подставить в полученную функцию начальные значения **x** и **y**, и найти значение **C**.
3. Подставить в общее решение ДУ найденное значение C.

ПРИМЕР. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$

РЕШЕНИЕ: ***<u>Общее решение дифференциального уравнения</u>*** ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow xdy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - ***<u>это общее решение исходного дифференциального уравнения</u>***.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем *частное решение* при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ – её производная.

Дифференциальное уравнение I порядка

Обыкновенные диф. уравнения
$y' = f(x)$

диф.уравнения с разделяющимися переменными
$y' = f(x)g(y)$

Линейные диф. уравнения I порядка
$y' + p(x)y = f(x)$

Далее рассмотрим подробнее ***типы уравнений первого порядка*** и методы их решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнение вида

$$\boxed{f(x)dx+g(y)dy=0}$$

называется ***дифференциальным уравнение 1-го порядка с <u>разделенными переменными</u>***.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделенными переменными.

1. Выражение с переменной y оставить в одной части равенства, а выражение с переменной x перенести в другую часть с противоположным знаком, получим:

$$g(y)dy=-f(x)dx$$

2. Проинтегрировать обе части равенства, то есть:

$$\int g(y)dy=-\int f(x)dx$$

3. Найти полученные интегралы.

ПРИМЕР.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{1}{x}dx - 5y^2dy = 0$.

Решение. Уравнение является дифференциальным с разделенными переменными: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = -5y^2$.

Выполним первый шаг алгоритма: $\underline{5y^2dy = \frac{1}{x}dx}$ (после переноса выражений умножили обе части на (-1)).

Выполним второй шаг алгоритма: $\underline{\int 5y^2dy = \int \frac{1}{x}dx}$

Решим интеграл $\int 5y^2dy = 5\int y^2dy = 5\frac{y^3}{3}$. Решим интеграл $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$.

Получим общее решение нашего уравнения $5\frac{y^3}{3} = \ln|x| + c$; $\boxed{y^3 = \frac{3}{5}\ln|x| + c}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Дифференциальное уравнение $y' = f(x)g(y)$ называется **<u>уравнением с разделяющимися переменными</u>**, если его можно записать в виде

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными. Записываем уравнение в форме: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

затем делим на ***g(y)*** и умножаем на ***dx***:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Это уравнение - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1. Разделить переменные так, чтобы при dx стояла функция зависящая от x, а при dy функция зависящая от y, то есть

$$\frac{f(x)}{F(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0$$

2. Полученное уравнение имеет вид дифференциального с разделенными переменными, решаем его по алгоритму рассмотренному выше.

Пример:

$$y' = x \cdot (y-1);$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y-1); \quad \frac{dy}{(y-1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int x \cdot dx; \quad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Выразим y из последнего выражения как функцию x, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Пример

Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

[redacted]

Пример

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$$f(x) \cdot g(y)$$

Решение

1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение

3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$$

$$y = C(x+1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2+1) \Rightarrow C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка

Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка. $$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Применение дифференциальных уравнений для решения задач

Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке.
Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.
Обозначим через **m** количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения **t**.

Тогда *dm/dt= -км,*

где **k**-постоянная скорости растворения. Минус в уравнении означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

Закон размножения бактерий с течением времени

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент.
Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.
Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через **x**.

Тогда $dx/dt=kx$,

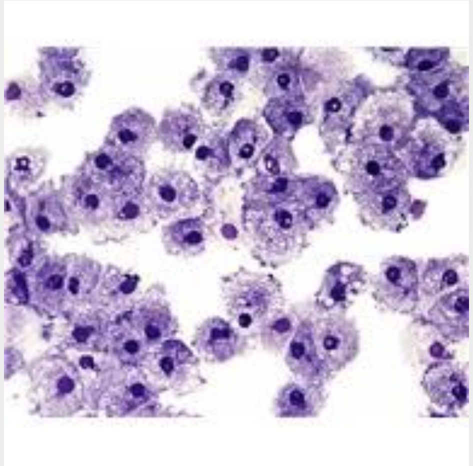
где **k** – коэффициент пропорциональности.

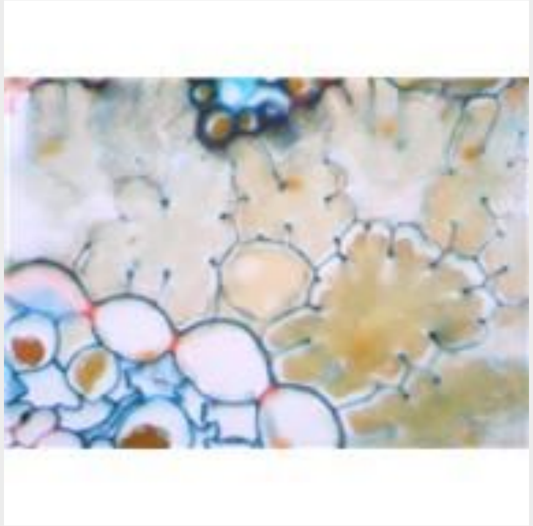
Закон роста клеток с течением времени

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к её объёму сохраняется постоянным, скорость роста клетки ***dl/dt*** пропорциональна длине клетки **l** в данный момент:

$$dl/dt = (\alpha - \beta)\, l$$

где α, β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.





Закон разрушения клеток в звуковом поле

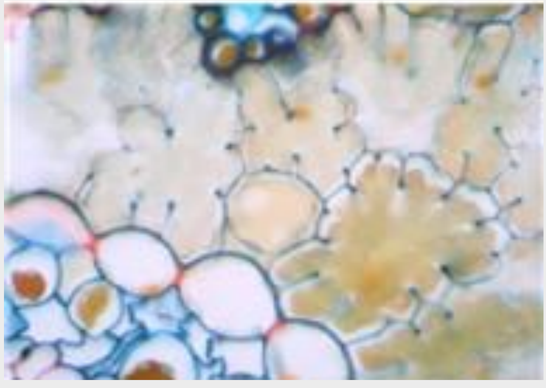
Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов.

Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле.

Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остаётся неразрушенным, можно записать:

$$dN/dt = - RN$$

где **N** – концентрация клеток; **t** –время; **R** - постоянная



Внутривенное введение глюкозы

При внутривенном введении глюкозы с помощью капельницы скорость поступления глюкозы в кровь постоянна и равна **С.**

В крови глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс:

$\mathbf{dx/dt=c-\alpha x}$, где

x-количество глюкозы в крови в текущий момент времени;

c-скорость поступления глюкозы в кровь;

α-положительная постоянная

Теория эпидемий

В теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер, процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.

Пусть в начальный момент **t=0**, **a** – число зараженных**,** **b** – число незараженных особей, **x(t)**, **y(t)** – соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени **t**. В любой момент времени **t** для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство

$$x+y=a+b \quad (1)$$

Уравнение зомби-апокалипсиса

(bN)(S/N)Z = bSZ,

где N — общее число населения,

S — число людей, восприимчивых к атакам зомби,

Z — общее число самих зомби

b — вероятность заражения вирусом.

Теория эпидемий

При этих условиях нужно установить закон изменения числа незаражённых особей с течением времени, т.е. найти **y=f(x)**.

Так как инфекция передаётся при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями.

Для промежутка времени **dt** **dy=-βxy**,

откуда **dy/dt= - βxy**, где **β** – коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение **x** из равенства (1), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$dy/dt = -\beta y\,(a+b-y)$$

Пример: Составьте дифференциальное уравнение и найдите частные решения. Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое

Решение:

Уравнение описывающее этот процесс:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

, где $\frac{dm}{dt}$ - скорость выведения вещества из организма,

m - концентрация лекарственного препарата в крови в данный момент времени; k - коэффициент пропорциональности

Решение:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -k \int_{0}^{t} dt$$

где m_0-концентрация вещества в крови в начальный момент времени t=0, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t.

$$\ln m \Big|_{m_0}^{m} = -kt \Big|_{0}^{t} \quad , \ln m - \ln m_0 = -kt \qquad , \ln \frac{m}{m_0} = -kt$$

Решение:

Потенцируя, получим:

$$m = m_0 e^{-kt}$$

По условию задачи m_0=0,2 мг/л, $m=m_0/2$ мг/л, t=23 ч.

Подставляем и находим:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -k\int_0^t dt$$

где m_0-концентрация вещества в крови в начальный момент времени t=0, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t.

$$\ln m \Big|_{m_0}^{m} = -kt\Big|_0^t \quad , \ln m - \ln m_0 = -kt \quad , \ln\frac{m}{m_0} = -kt$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-k23} \quad , \frac{1}{2} = e^{-k23} \quad , \ln 0{,}5 = \ln e^{-k23}$$

$$, \ln 0{,}5 = -23k \quad , k = \frac{\ln 0{,}5}{-23} = \frac{-0{,}693}{-23} = 0{,}03$$

Зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, описывается следующим законом:

$$\boxed{m = m_0 e^{-0{,}03t}}$$

Домашнее задание:

- Колесов В.В. Математика для медицинских колледжей: учебное пособие/В.В.Колесов, М.Н. Романов. – Ростов н/Д: Феникс, 2015 – 316 с.: ил.-(среднее медицинское образование). Гл.12, §12.1 -12.3.
- Используя материал презентации ***Занятие 7_Понятие Дифуравнений***, выполните из **РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ**, ТЕМА 2.3, Занятие 7. Понятие о дифференциальном уравнении

Спасибо за внимание