

Тема 2.3.

Дифференциальные уравнения и их
применение в медицинской практике

**Понятие о
дифференциальном
уравнении**

Основные вопросы:

- **Дифференциальные уравнения.
Основные понятия и определения.
Виды дифференциальных
уравнений.**
- **Дифференциальные уравнения 1-го
порядка.**

Мудрецы говорили, что *законы нашей вселенной написаны на математическом языке*. Конечно, в алгебре есть много примеров различных уравнений, но это, большей частью, учебные примеры, неприменимые на практике.

По-настоящему интересная математика начинается, когда мы хотим описать процессы, протекающие в реальной жизни. Но как отразить фактор времени, которому подчиняются реальные процессы – демографические показатели?

Вспомним одно важное определение из курса математики, касающееся производной функции. Производная является скоростью изменения функции, следовательно, она может помочь нам отразить фактор времени в уравнении.

То есть, мы составляем уравнение с функцией, которая описывает интересующий нас показатель и добавляем в уравнение производную этой функции. Это и есть ***дифференциальное уравнение***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ



Дифференциальным уравнением

называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

$$F(x, y, y') = 0,$$

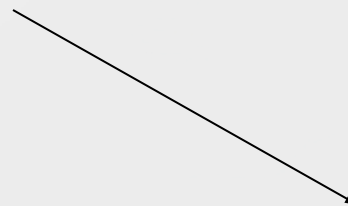
Неизвестную функцию обычно обозначают $y(x)$ или просто y , а ее производные — y' , y'' и т. д.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на обыкновенные (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и уравнения с частными производными (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных. Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются **дифференциальными уравнениями.**

$$F(x, y, y') = 0$$

$$y' + y + 3x = 0$$



Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция и её первая производная, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением I порядка**

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция, производные и производная n-го, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением n- порядка.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**



Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 - го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 - го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ



Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \phi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в **тождество**.

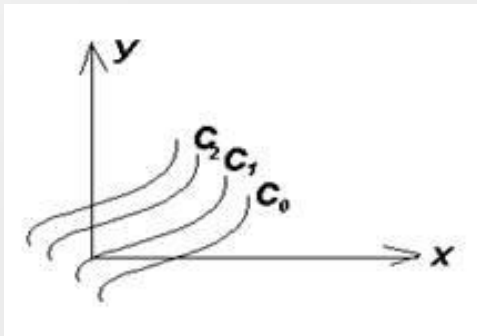


График решения дифференциального уравнения называют **интегральной кривой дифференциального уравнения**.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ



Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)-французский математик) называется ***нахождение любого частного решения дифференциального уравнения*** вида $y = \phi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Алгоритм решения задачи Коши

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.
2. Подставить в полученную функцию начальные значения x и y , и найти значение C .
3. Подставить в общее решение ДУ найденное значение C .





ПРИМЕР. Найти общее и частное решение

дифференциального уравнения

$$xy' + y = 0$$

РЕШЕНИЕ: Общее решение дифференциального уравнения

ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow xdy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$$y = \frac{C}{x} \text{ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.}$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем *частное решение* при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

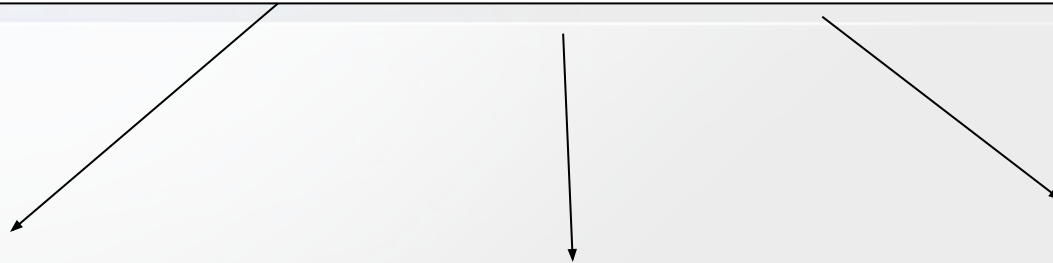


Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ – её производная.

Дифференциальное уравнение I порядка



Обыкновенные диф.
уравнения

$$y' = f(x)$$

диф. уравнения с
разделяющимися
переменными

$$y' = f(x)g(y)$$

Линейные диф.
уравнения

I порядка

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ



$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Уравнение вида
называется

***дифференциальным уравнение 1-го
порядка с разделенными переменными.***

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделенными переменными.

1. Выражение с переменной y оставить в одной части равенства, а выражение с переменной x перенести в другую часть с противоположным знаком, получим:

$$g(y)dy = -f(x)dx$$

2. Проинтегрировать обе части равенства, то есть:

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx$$

3. Найти полученные интегралы.

ПРИМЕР.



Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{1}{x}dx - 5y^2dy = 0$.

Решение. Уравнение является дифференциальным с разделенными переменными: $f(x) = \frac{1}{x}$,
 $g(y) = -5y^2$.

Выполним первый шаг алгоритма: $5y^2dy = \frac{1}{x}dx$ (после переноса выражений умножили обе части на (-1)).

Выполним второй шаг алгоритма: $\int 5y^2dy = \int \frac{1}{x}dx$

Решим интеграл $\int 5y^2dy = 5 \int y^2dy = 5 \frac{y^3}{3}$. Решим интеграл $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$.

Получим общее решение нашего уравнения $5 \frac{y^3}{3} = \ln|x| + c$; $y^3 = \frac{3}{5} \ln|x| + c$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ



Дифференциальное уравнение
 $y' = f(x)g(y)$ называется
уравнением с разделяющимися
переменными,
если его можно записать в виде

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными. Записываем уравнение в форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

затем делим на $g(y)$ и умножаем на dx :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Это уравнение - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1. Разделить переменные так, чтобы при dx стояла функция зависящая от x , а при dy функция зависящая от y , то есть

$$\frac{f(x)}{F(x)} dx + \frac{g(y)}{G(y)} dy = 0$$

2. Полученное уравнение имеет вид дифференциального с разделенными переменными, решаем его по алгоритму рассмотренному выше.



Пример:

$$y' = x \cdot (y - 1);$$



$$\frac{dy}{(y-1)} = x \cdot (y-1); \quad \frac{dy}{(y-1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int x \cdot dx; \quad \ln |y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Выразим y из последнего выражения как функцию x , получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Пример



Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

Пример



Дифференциальное
уравнение

с

разделяющимися

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$f(x) \cdot g(y)$

Решение



1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение



3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x + 1| + \ln|C| = \ln|C(x + 1)|$$

$$y = C(x + 1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2 + 1) \quad \longrightarrow \quad C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x + 1)$$

Проверка



Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Применение дифференциальных уравнений для решения задач

Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке.

Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

Обозначим через m количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения t .

Тогда $dm/dt = -km$,

где k -постоянная скорости растворения. Минус в уравнении означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.



Закон размножения бактерий с течением времени

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент.

Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющих в данный момент, через x .

Тогда $dx/dt=kx$,

где k – коэффициент пропорциональности.

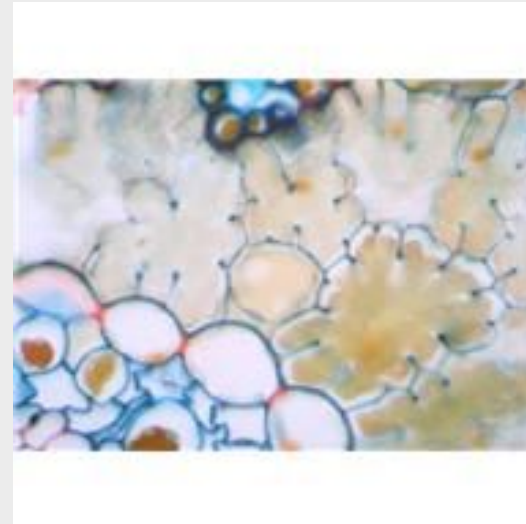
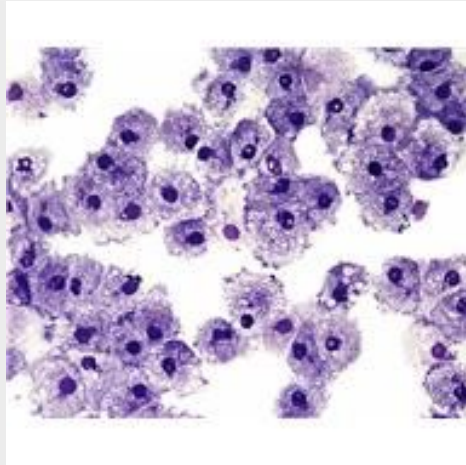


Закон роста клеток с течением времени

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к её объёму сохраняется постоянным, скорость роста клетки dl/dt пропорциональна длине клетки l в данный момент:

$$dl/dt = (\alpha - \beta) l$$

где α , β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.



Закон разрушения клеток в звуковом поле

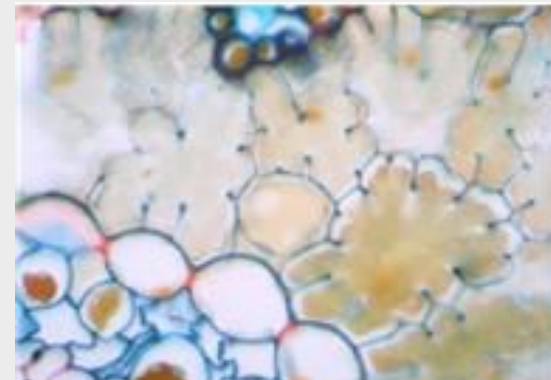
Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов.

Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле.

Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остаётся неразрушенным, можно записать:

$$dN/dt = - RN$$

где N – концентрация клеток; t – время; R - постоянная



Внутривенное введение глюкозы

При внутривенном введении глюкозы с помощью капельницы скорость поступления глюкозы в кровь постоянна и равна C .

В крови глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс:

$$dx/dt = c - \alpha x, \text{ где}$$

x -количество глюкозы в крови в текущий момент времени;

c -скорость поступления глюкозы в кровь;

α -положительная постоянная



Теория эпидемий

В теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер, процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.

Пусть в начальный момент $t=0$, a – число зараженных, b – число незараженных особей, $x(t)$, $y(t)$ – соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени t . В любой момент времени t для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство

$$x+y=a+b \quad (1)$$

Уравнение зомби-апокалипсиса

$$(bN)(S/N)Z = bSZ,$$

где N — общее число населения,

S — число людей, восприимчивых к атакам зомби,

Z — общее число самих зомби

b — вероятность заражения вирусом.



Теория эпидемий

При этих условиях нужно установить закон изменения числа незаражённых особей с течением времени, т.е. найти $y=f(x)$.

Так как инфекция передаётся при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями.

Для промежутка времени dt $dy=-\beta xy$,

откуда $dy/dt= -\beta xy$, где β – коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение x из равенства (1), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$dy/dt= -\beta y (a+b-y)$$



Пример: Составьте дифференциальное уравнение и найдите частные решения. Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое

Решение:

Уравнение описывающее этот процесс:

$$\frac{dm}{dt} = -km \quad , \quad \text{где} \quad \frac{dm}{dt} \quad - \quad \text{скорость выведения вещества из организма,}$$

m - концентрация лекарственного препарата в крови в данный момент времени; k - коэффициент пропорциональности

Решение:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -k \int_0^t dt$$

где m_0 -концентрация вещества в крови в начальный момент времени $t=0$, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t .

$$\ln m \Big|_{m_0}^m = -kt \Big|_0^t, \ln m - \ln m_0 = -kt \quad , \ln \frac{m}{m_0} = -kt$$

Решение:

Потенцируя, получим:

$$m = m_0 e^{-kt}$$

По условию задачи $m_0 = 0,2$ мг/л,
 $m = m_0/2$ мг/л, $t = 23$ ч.

Подставляем и находим:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-k \cdot 23}, \quad \frac{1}{2} = e^{-k \cdot 23}, \quad \ln 0,5 = \ln e^{-k \cdot 23}$$
$$, \ln 0,5 = -23k, \quad k = \frac{\ln 0,5}{-23} = \frac{-0,693}{-23} = 0,03$$

Зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, описывается следующим законом:

$$m = m_0 e^{-0,03t}$$

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\frac{dm}{m} = -k dt$$

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -k \int_0^t dt$$

где m_0 – концентрация вещества в крови в начальный момент времени $t=0$, m – текущая концентрация вещества в крови в момент времени t .

$$\ln m \Big|_{m_0}^m = -kt \Big|_0^t, \quad \ln m - \ln m_0 = -kt, \quad \ln \frac{m}{m_0} = -kt$$

Домашнее задание:

- Колесов В.В. Математика для медицинских колледжей: учебное пособие/В.В.Колесов, М.Н. Романов. – Ростов н/Д: Феникс, 2015 – 316 с.: ил.- (среднее медицинское образование). Гл.12, §12.1-12.3.
- Используя материал презентации *Занятие 7_Понятие Дифуравнений*, выполните из **РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ**, ТЕМА 2.3, Занятие 7. Понятие о дифференциальном уравнении

Спасибо за внимание

