Производная функции

- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции

Определение производной

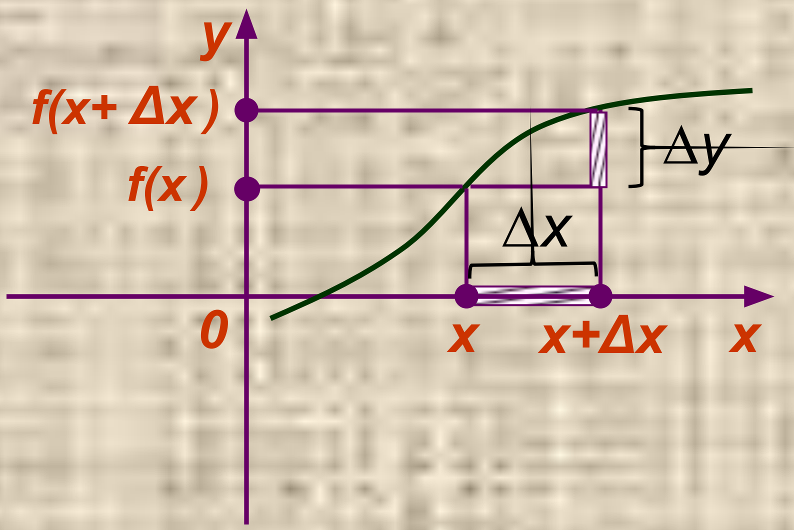
Пусть функция **y = f(x)** определена в некотором интервале **(a; b)**.

Аргументу **x** придадим некоторое приращение Δx:

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции **y = f(x)** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

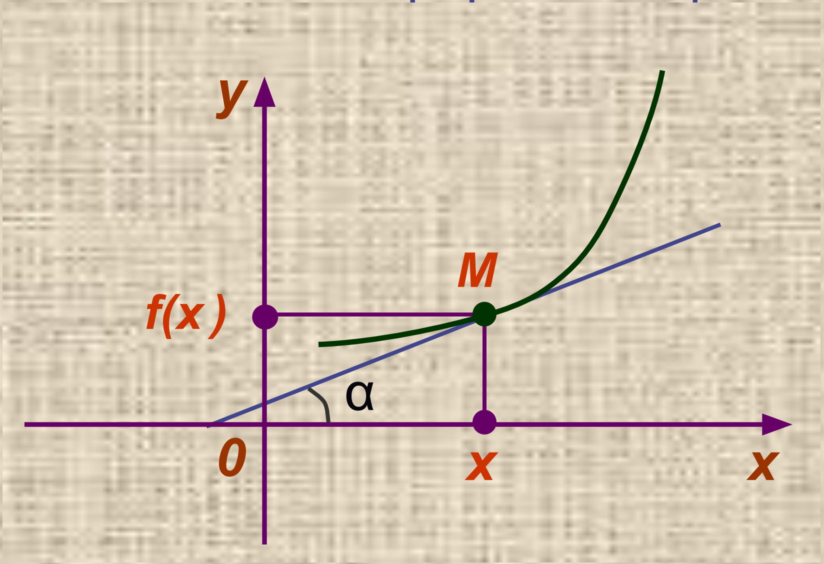
Значение производно функции ***y = f(x)*** в точке X_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\Big|_{x_0}$$

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой – либо физический процесс, то ***f '(x)*** есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой ***L*** две точки ***M*** и ***M₁***:



Через точки ***M*** и M_1 проведем секущую и обозначим через ***φ*** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке ***M***, а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k \;= y'$$

Производная ***f '(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания ***M*** имеет координаты ***(x_0; y_0)***, угловой коэффициент касательной есть ***k = f '(x_0)***.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной

Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** к кривой.

$$f'(x_0)$$

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция *f(x)* дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция *y = f(x)* дифференцируема в некоторой точке *x*, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

$$\left[\text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0\right]$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

Функция *y = f(x)* – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

Производные основных элементарных функций

1 Степенная функция: $y = x^n \quad n \in Z$

Придадим аргументу x приращение Δx, тогда функция получит приращение:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Формула ***бинома Ньютона:***

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

K – факториал

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$$

Производные основных элементарных функций

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= (\cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n) - \cancel{x^n}$$

Тогда: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) =$$

$$= nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

Производные основных элементарных функций

2 Логарифмическая функция: $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x} \quad при\ \Delta x \to 0}$$

Аналогично выводятся правила дифференцирования других основных элементарных функций.

Правила дифференцирования

Пусть ***u(x)*** , ***v(x)*** и ***w(x)*** – дифференцируемые в некотором интервале ***(a; b)*** функции, ***C*** – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$

Производная сложной функции

Пусть ***y = f(u)*** и ***u = φ(x)*** , тогда ***y = f(φ(x))*** – сложная функция с промежуточным аргументом ***u*** и независимым аргументом ***x.***

Теорема

Если функция ***u = φ(x)*** имеет производную u'_x в точке ***x*** а функция ***y = f(u)*** имеет производную y'_u в соответствующей точке ***u*** , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

Пример

Вычислить производную функции $y=\dfrac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}$

$$y'=\left(\frac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}\right)'$$

$$=\frac{(1+\sin x)'\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot(x^3\cdot\ln x)'}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\frac{(1'+(\sin x)')\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot((x^3)'\cdot\ln x+x^3(\ln x)')}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\boxed{\frac{\cos x\cdot x^3\cdot\ln x-(1+\sin x)\cdot(3x^2\cdot\ln x+x^2)}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$