

02.02.21.

Тема:

Определение производной. Физический смысл производной. Приращение аргумента и приращение функции. Производная степенной функции.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://iu.ru/video-lessons/7981a604-de36-40db-a5a3-ab78e640f119>

<https://youtu.be/6N6c-sKRLew>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Производная

На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он движется равнозамедленно с ускорением $1,6 \text{ м/с}^2$?

Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s = 80$, $a = 1,6$, поэтому $80 = 0,8t^2$, откуда $t = 10$ с. По формуле $v = at$ находим мгновенную скорость $v = 1,6 \cdot 10 = 16$, т. е. $v = 16 \text{ м/с}$. ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач.

Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения.

При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени.

Рассмотрим, как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения.

Пусть материальная точка M движется вдоль оси Ox , где O — положение материальной точки в момент времени $t = 0$. Если в момент времени t координата материальной точки равна s , где $s = s(t)$, то функцию $s(t)$ называют законом движения точки M .

При неравномерном движении материальная точка за равные по длительности промежутки времени может совершать перемещения, разные не только по величине, но и по направлению. Средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от t до $t + h$ определяется формулой

$$v_{\text{cp}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то v_{cp} при фиксированном t будет меняться при изменении h , и чем меньше h , тем лучше v_{cp} будет характеризовать движение точки в момент t . Скоростью точки в момент t (мгновенной скоростью) называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h \rightarrow 0$, т. е. скорость v в момент t определяется равенством

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Таким образом, скорость движения в момент t — предел отношения приращения координаты $\Delta s = s(t+h) - s(t)$ за промежуток времени от t до $t+h$ к приращению времени h , когда $h \rightarrow 0$, если этот предел существует.

Отношение $\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h \rightarrow 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x+h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Задача

Найти производную функции $f(x) = x^2$.

► Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \rightarrow 0$, то $2x + h \rightarrow 2x$, поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◀

Задача

Найти производную функции $f(x) = C$, где C — заданное число.

► $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0$. Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \rightarrow 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е. $(C)' = 0$. ◀

Задача

Найти производную линейной функции

$$f(x) = kx + b.$$

► $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k(x+h) + b - (kx + b)}{h} = \frac{kh}{h} = k$.

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \rightarrow 0$ также равен k . Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◀

Применяя формулу

$$(kx + b)' = k,$$

например, получаем

$$(3x + 7)' = 3, \quad (-2x + 1)' = -2, \quad (5x)' = 5, \quad (x)' = 1.$$

Производная степенной функции

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$,

$$(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$$

ЗадачаВычислить $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\blacktriangleright f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'(9) = -\frac{1}{2} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}. \quad \triangleleft$$

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx + b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x - 1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x - 1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}. \quad (2)$$

По формуле (2) при $k = 3$, $b = -1$, $p = 7$ имеем

$$((3x - 1)^7)' = 21(3x - 1)^6.$$

ЗадачаВычислить $f'(-3)$, если $f(x) = \sqrt{4 - 7x}$.

$$\blacktriangleright \text{Запишем данную функцию так: } f(x) = (-7x + 4)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{По формуле (2) находим } f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x + 4)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{При } x = -3 \text{ получаем } f'(-3) = -\frac{7}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} = -0,7. \quad \triangleleft$$

Практическая часть.

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6 ; 2) x^7 ; 3) x^{11} ; 4) x^{13} .

788 1) x^{-2} ; 2) x^{-3} ; 3) x^{-4} ; 4) x^{-7} .

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x - 3)^2$; 2) $(5x + 2)^{-3}$; 3) $(1 - 2x)^{-6}$;

4) $(2 - 5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x + 7}$; 2) $\sqrt[4]{7 - 3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.