ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»
Кафедра программного обеспечения и администрирования информационных систем

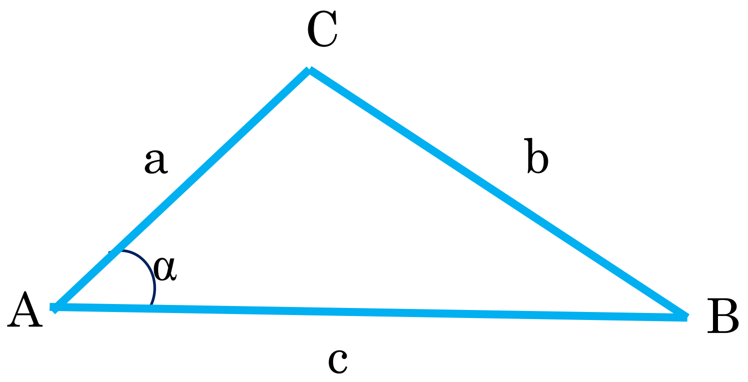
Теорема косинусов

Автор:
Петряев Д.С.
Группа № 9
Руководитель:
Каширская И.И.

Воронеж
2018/2019 уч.г.

Для плоского треугольника, у которого стороны a, b, c и угол α, который противолежит стороне a, справедливо соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \propto$$



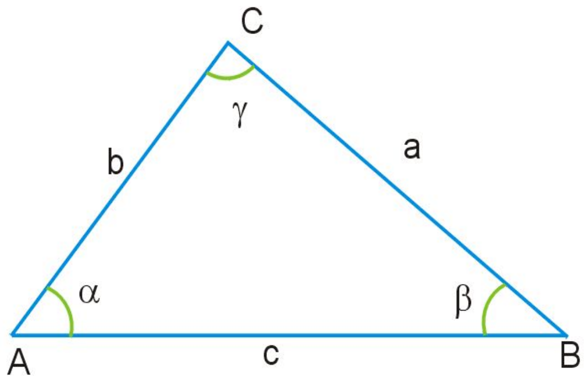
Теорема косинусов актуальна, если:

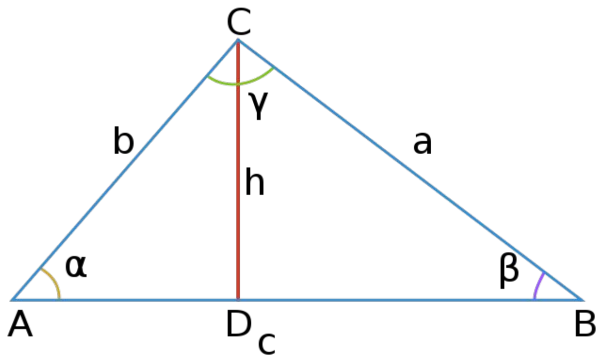
- мы знаем две стороны и угол между ними (нахождение стороны);
- мы знаем все три стороны (нахождение косинуса угла, медиан треугольника, определение вида треугольника по углам);

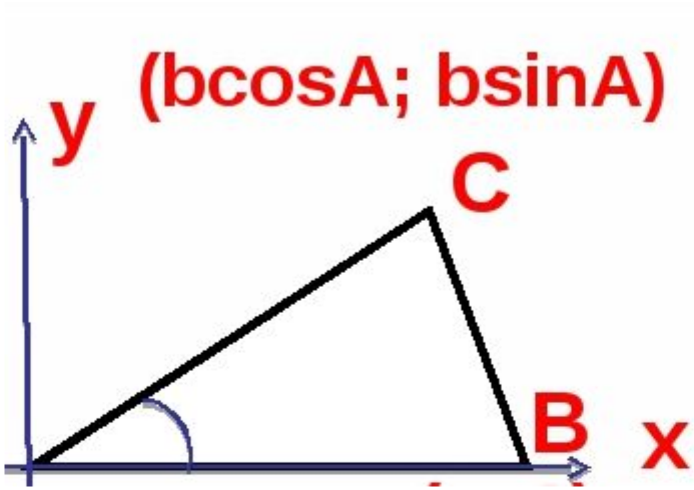
Цель:доказать верность утверждения $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \propto$.

Методы:

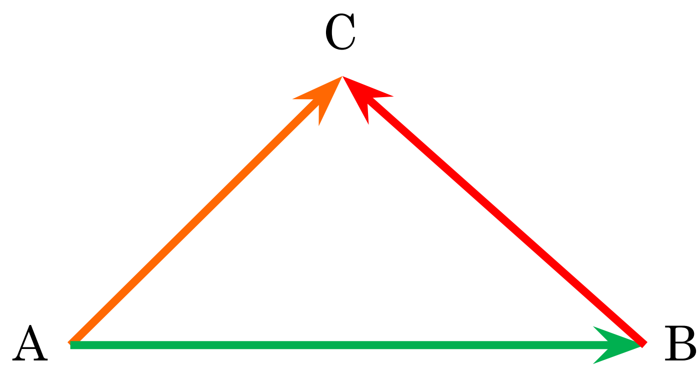
1. выражение векторов через их сумму/разность;
2. дополнительные построения;
3. введение системы координат.







Графический метод:



$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Возведем это равенство скалярно в квадрат

$$\overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

Используя определения скалярного произведения векторов имеем

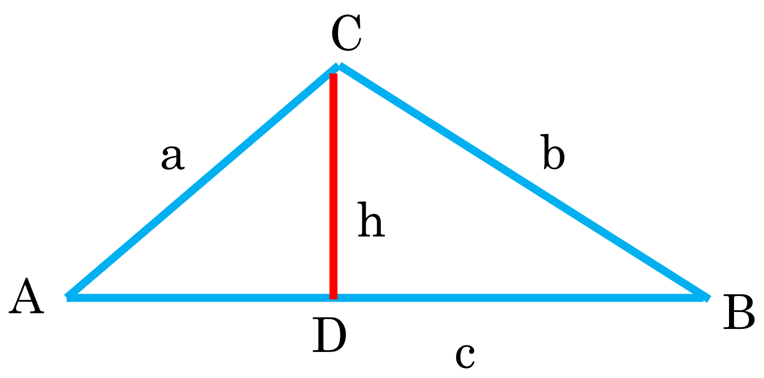
$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\alpha$, где

$AB = |\overline{AB}|$,$AC = |\overline{AC}|$, BC $= |\overline{BC}|$-длины сторон $\triangle$ABC,

$\angle$A-угол между сторонами AB и AC.

Теорема доказана.

Метод дополнительных построений:



В △ABC из вершины C на сторону AB проведем высоту CD.

Значит:

$$AD = b\cos\alpha \ ,$$

$$DB = c - b\cos\alpha$$

Записываем теорему Пифагора для 2-х прямоугольных треугольников ADC и BDC:

$$h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$$

$$h^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Приравниваем правые части уравнений

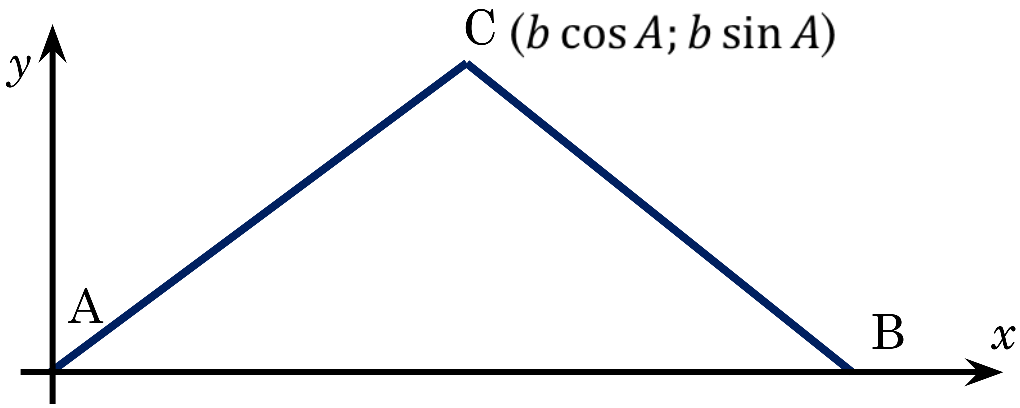
$$b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Теорема доказана.

Метод координат:

Пусть в $\triangle ABC$ AB=c, BC=a, AC=b. Введем систему координат с началом в точке A. Тогда B(c;0), C($b\cos A$; $b\sin A$).



Найдем расстояние BC:

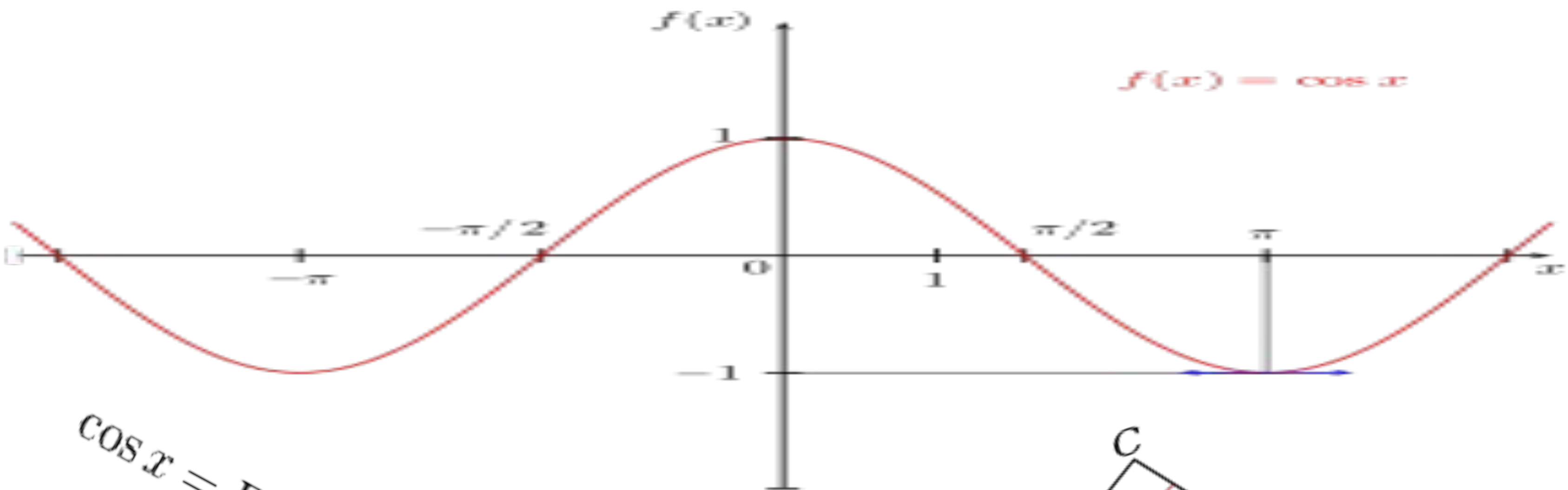
$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin A^2 = b^2\cos A^2 + b^2\sin A^2$$

$$A - 2bc\cos A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\,.$$

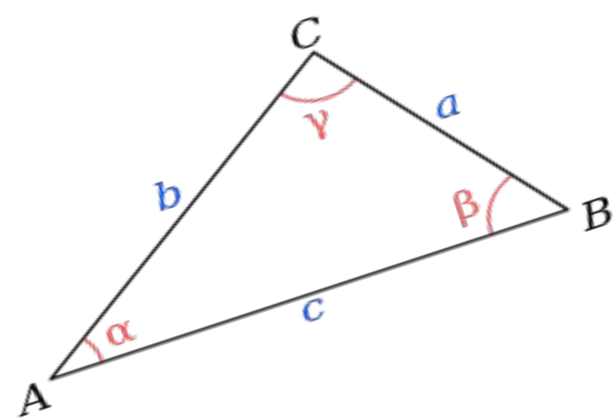
Теорема доказана.

Таким образом сделаем выводы, что данную теорему можно доказать тремя различными способами:

1. методом выражения векторов через их сумму/разность;
2. методом введения системы координат;
3. методом дополнительных построений.



$$\cos x = \mathrm{Re}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$



Список использованной литературы:

1. **учебник по геометрии за 7-9 класс –** авторы
   Атанасян**,** Бутузов, Кадомцев, Позняк, Юдина .
   (http://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/atanasyan_7-9kl.html);
2. **ru.wikipedia.org**
   (https://ru.wikipedia.org)