

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»
Кафедра программного обеспечения и администрирования
информационных систем

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

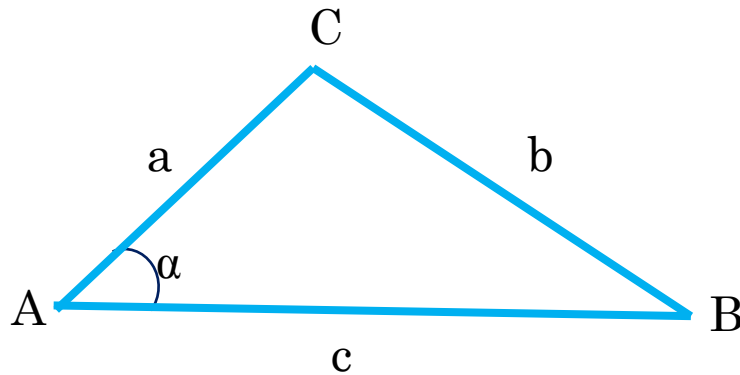


Автор:
Петряев Д.С.
Группа № 9
Руководитель:
Каширская И.И.

Воронеж
2018/2019 уч.г.

Для плоского треугольника, у которого стороны a , b , c и угол α , который противолежит стороне a , справедливо соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



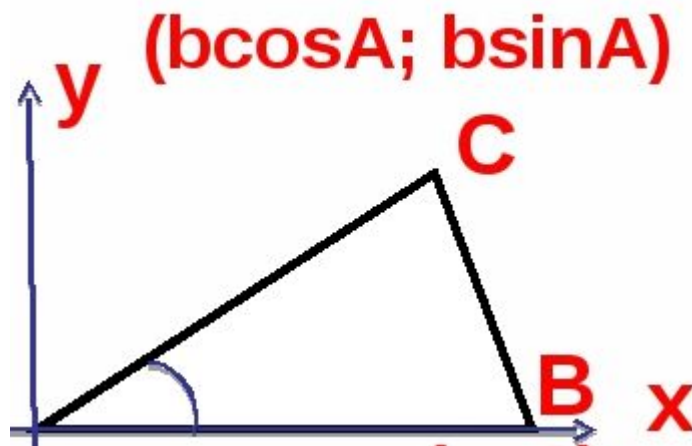
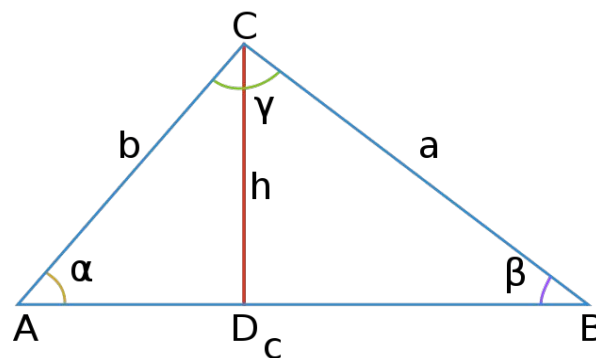
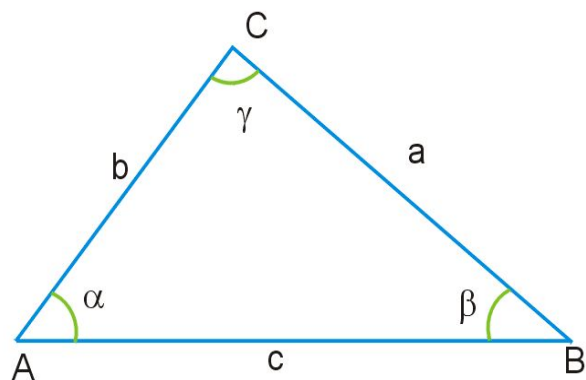
Теорема косинусов актуальна, если:

- мы знаем две стороны и угол между ними (нахождение стороны);
- мы знаем все три стороны (нахождение косинуса угла, медиан треугольника, определение вида треугольника по углам);

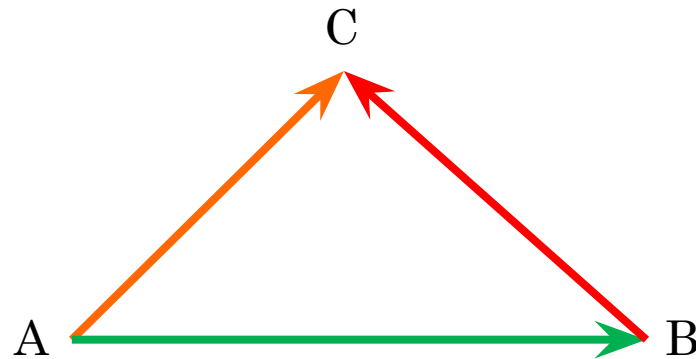
Цель: доказать верность утверждения $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$.

Методы:

1. выражение векторов через их сумму/разность;
2. дополнительные построения;
3. введение системы координат.



ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД:



$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Возведем это равенство скалярно в квадрат

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= (\overline{AC} - \overline{AB})^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB}\end{aligned}$$

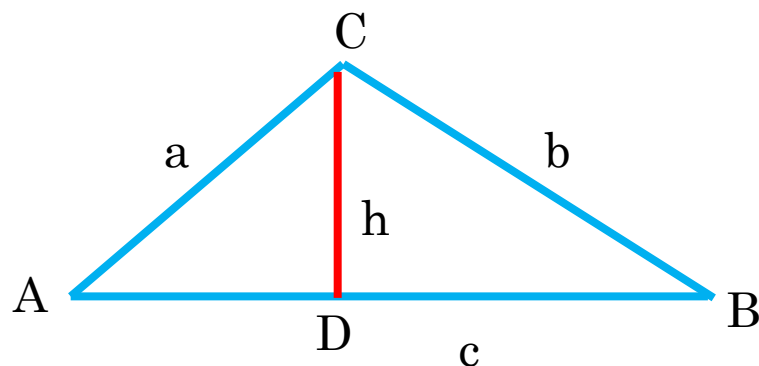
Используя определения скалярного произведения векторов имеем

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \alpha, \text{ где}$$

$AB = |\overline{AB}|$, $AC = |\overline{AC}|$, $BC = |\overline{BC}|$ - длины сторон $\triangle ABC$,
 $\angle A$ - угол между сторонами AB и AC .

Теорема доказана.

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ:



В $\triangle ABC$ из вершины C на сторону AB проведем высоту CD .

Значит:

$$AD = b \cos \alpha,$$

$$DB = c - b \cos \alpha$$

Записываем теорему Пифагора для 2-х прямоугольных треугольников ADC и BDC :

$$h^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2$$

$$h^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2$$

Приравниваем правые части уравнений

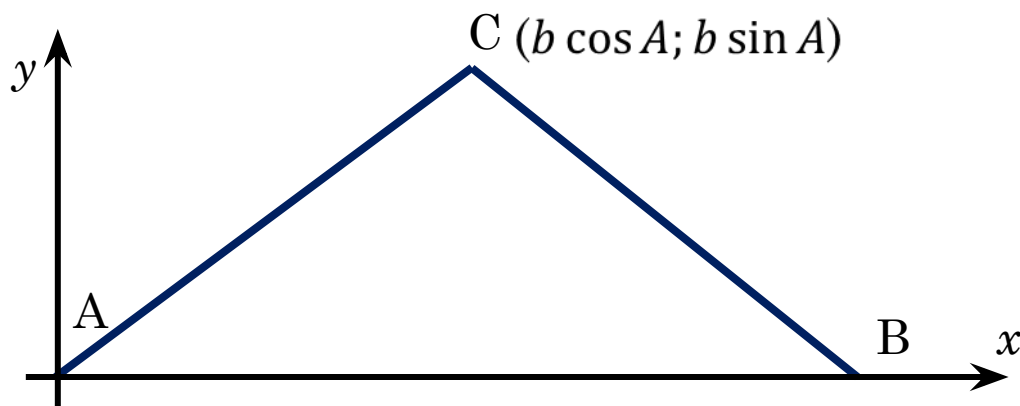
$$b^2 - (b \cos \alpha)^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Теорема доказана.

МЕТОД КООРДИНАТ:

Пусть в $\triangle ABC$ $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Введем систему координат с началом в точке A . Тогда $B(c;0)$, $C(b \cos A; b \sin A)$.



Найдем расстояние BC:

$$BC^2 = a^2 = (b \cos A - c)^2 + b^2 \sin^2 A = b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$$

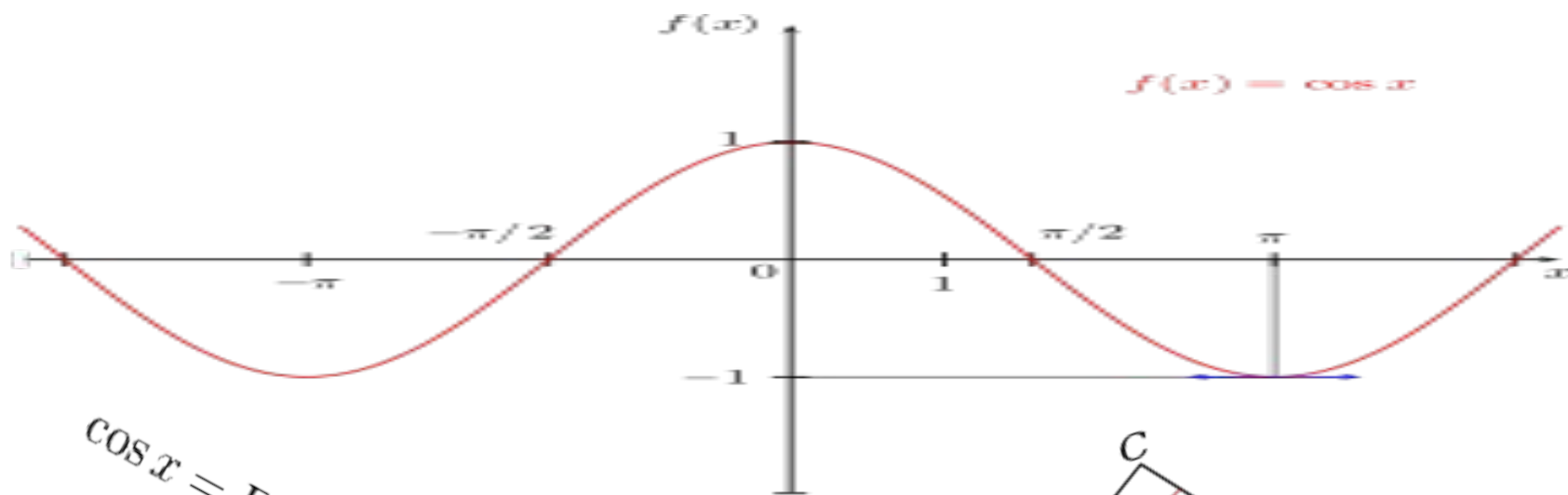
$$A - 2bc \cos A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Теорема доказана.

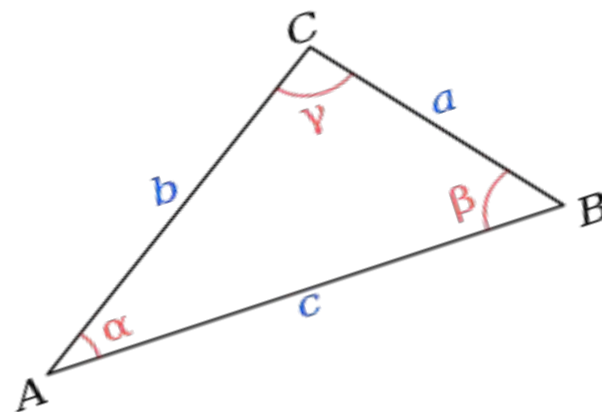


Таким образом сделаем выводы, что данную теорему можно доказать тремя различными способами:

1. методом выражения векторов через их сумму/разность;
2. методом введения системы координат;
3. методом дополнительных построений.



$$\cos x = \operatorname{Re}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. учебник по геометрии за 7-9 класс – авторы
Атанасян, Бутузов, Кадомцев, Позняк, Юдина .
(http://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/atanasyan_7-9kl.html);
2. **ru.wikipedia.org**
(<https://ru.wikipedia.org>)

