

Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика

- ▣ Это раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Сколькоими способами можно выбрать...



Направо пойдешь, - коня
потеряешь
Налево пойдешь, - голову
сложишь, прямо
пойдешь...

Задачи, требующие
перебора
различных
вариантов
решения или
поиска их числа
называются
комбинаторным
и

Правило сложения

Если два действия взаимно исключают друг друга, и одно из них можно выполнить ***K*** способами, а другое ***P*** способами, то оба действия можно выполнить ***K + P*** числом способов.

Чтобы использовать закон сложения:

1. Нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;
2. Нужно выяснить количество элементов в каждой группе;
3. Нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов.

Задача на применение закона сложения

Яна решила выбрать обед в столовой колледжа. Так как у нее немного денег, то она может выбрать только одно блюдо.

В меню столовой 3 вида холодных закусок, 7 вариантов первых блюд и 9 вариантов вторых. Сколькими способами она может выбрать **ОДНО БЛЮДО?**

Решение

1. Каковы группы?

- **3 группы: холодные закуски, первые и вторые блюда**

2. Сколько элементов в группах?

Закуску можно выбрать **3 способами**;

Первое блюдо выбрать **7 способами**;

Второе блюдо можно выбрать **9 способами**.

3. Убедимся, что в группах нет одинаковых элементов.

4. **Применим закон сложения: $3+7+9=19$**

Ответ: Одно блюдо можно выбрать 19 способами.

Правило произведения

Если одну часть действия можно выполнить K способами, а другую $-P$ способами, то все действие можно выполнить $K \cdot P$ числом способов

Закон умножения используется, чтобы вычислить число упорядоченных комбинаций - **размещений**

Задача на применение правила произведения

Лена и Артем зашли в кафе.

На витрине лежит 25 вариантов десертов.

Ребята из них выбирают 2 десерта.

Выясните, сколькими различными способами может выбрать 2 десерта?

Решение

1. Сначала ребята могут выбрать любой из всех 25 десертов.
2. Когда первый выбор сделан, для следующего остаётся $25 - 1 = 24$ вариантов выбора десерта.
3. По закону умножения:
Если элемент A можно выбрать k способами и затем второй элемент B можно выбрать t различными способами, пару элементов A и B можно выбрать $k \cdot t$ способами.

1-й десерт выбирают 25 способами

2-й десерт выбираем 24 способами

Используем правило произведения

2 десерта выбираем $25 \cdot 24 = 600$ (способами).

Ответ

Ребята могут выбрать десерт 600 различными способами.

Факториал

- ▣ **В задачах по комбинаторике часто встречается понятие факториала.**
- ▣ **$n!$** («эн факториал») – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) \dots 3 * 2 * 1$$

Например: $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

$4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$, то есть

$5! = 5 * 4!$

$0! = 1$

Перестановки (без повторений)

Расположение различных n элементов в определенном порядке называется перестановкой без повторений из n элементов.

$$P_n = n!$$

- ▣ Перестановки — это специальный случай размещений, когда выборка так же велика, как данное множество.
- ▣ **Важно!** В заданиях на перестановки, не важно назвать сами перестановки, а важно назвать их число.

Задача на перестановки

Хор колледжа для Рождественского концерта приготовил 4 народных песен. В концертной программе один раз нужно проиграть каждую песню. Сколько можно составить концертных программ, если порядок песен важен?

Решение

□ Так как количество элементов во множестве неизменно и порядок элементов важен, можно сделать вывод, что нужно вычислить число перестановок

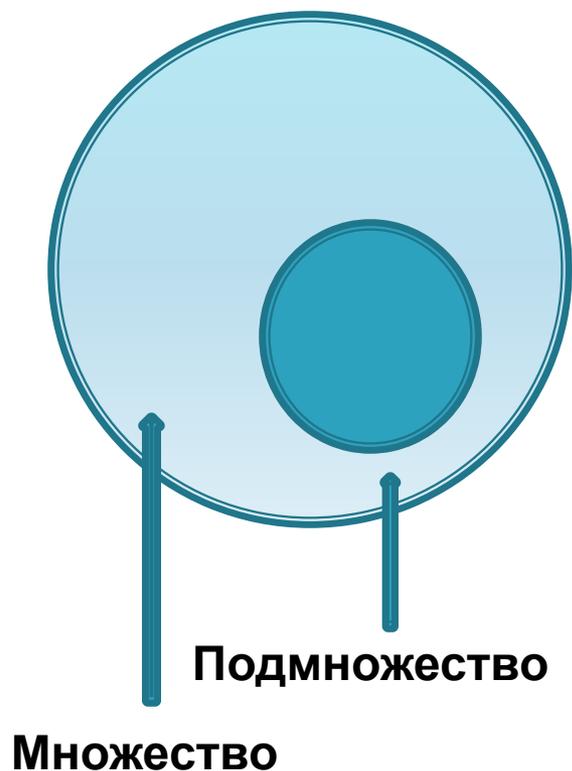
$$P_n = n!$$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ:

Можно составить **24 различных концертных программы.**

Множества и подмножества



- **Конечным множеством** называется множество, содержащее конечное число элементов.
- **Пустое множество** — это множество, не содержащее ни одного элемента.
- **Подмножеством** данного множества называется множество, все элементы которого принадлежат данному множеству.

Выборки

- ▣ **Выборками** называются подмножества какого-либо множества.
- ▣ **Упорядоченными выборками** называются выборки, в которых важен порядок элементов.
- ▣ Если в выборке поменяют местами два элемента и получится другая выборка, то данная выборка является упорядоченной.
- ▣ **Неупорядоченными выборками** называются выборки, в которых не важен порядок элементов.

Пример

Неупорядоченные выборки:

- Из 10 претендентов на место повара в кафе нужно выбрать 2 поваров. (Меняя местами поваров, пара останется той же.)
- Гена из 8 книг выбирает для чтения 3 книги. (Меняя местами книги, не изменится выбранная литература.)

Упорядоченные выборки:

- Из 10 претендентов для работы в кафе нужно выбрать шеф-повара и повара по приготовлению холодных блюд.

Меняя местами 2 претендентов, изменятся их должности.

- Гена из 8 книг выбирает для чтения 3 книги и составляет список их прочтения.

Меняя книги местами, получится другой список.

Размещения

(порядок имеет значение)

- Комбинации, в которых имеет значение порядок элементов, называются **размещениями**.
- В размещениях у каждого элемента своя **определённая роль**.
- **Размещения** — это упорядоченные наборы
- **Например:** пара учеников — староста класса и его помощник; пара цифр — десятки и единицы.

Размещения без повторения

$$A_n^m$$

Читается: A из n по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- ▣ n -показывает количество элементов данного множества
- ▣ m показывает количество элементов размещения (сколько элементов выбирается)

Задача на применение формулы размещения

**Для прохождения практики студентов
есть 14 столовых.**

**Вычислите, сколькими способами
можно устроить трёх человек,
чтобы они были в разных
столовых?**

Решение

Требуемая выборка — размещение, т.к. порядок элементов важен. Например, если первый человек будет работать в столовой **A**, второй — в столовой **B**, а третий — в столовой **C**,

Меняя местами людей, получатся новые ситуации — новые выборки.

Нужно вычислить, сколькими способами можно выбрать k элементов из n элементов, где $n=14$; $k=3$. Применяем формулу:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\begin{aligned} A_{14}^3 &= \frac{14!}{(14-3)!} = \frac{14!}{11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{\cancel{11!}} = \\ &= 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184 \end{aligned}$$

Сочетания

Сочетанием из n элементов по m элементов ($m \leq n$) называется выборка элементов m из данного неупорядоченного множества.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Отличие сочетаний от размещений:

В размещениях порядок выборки важен

В сочетаниях порядок выборки не важен

Задача на сочетания

На полке лежит **10** различных книг по кулинарии. Сколькими различными способами можно выбрать три книги для написания реферата ?

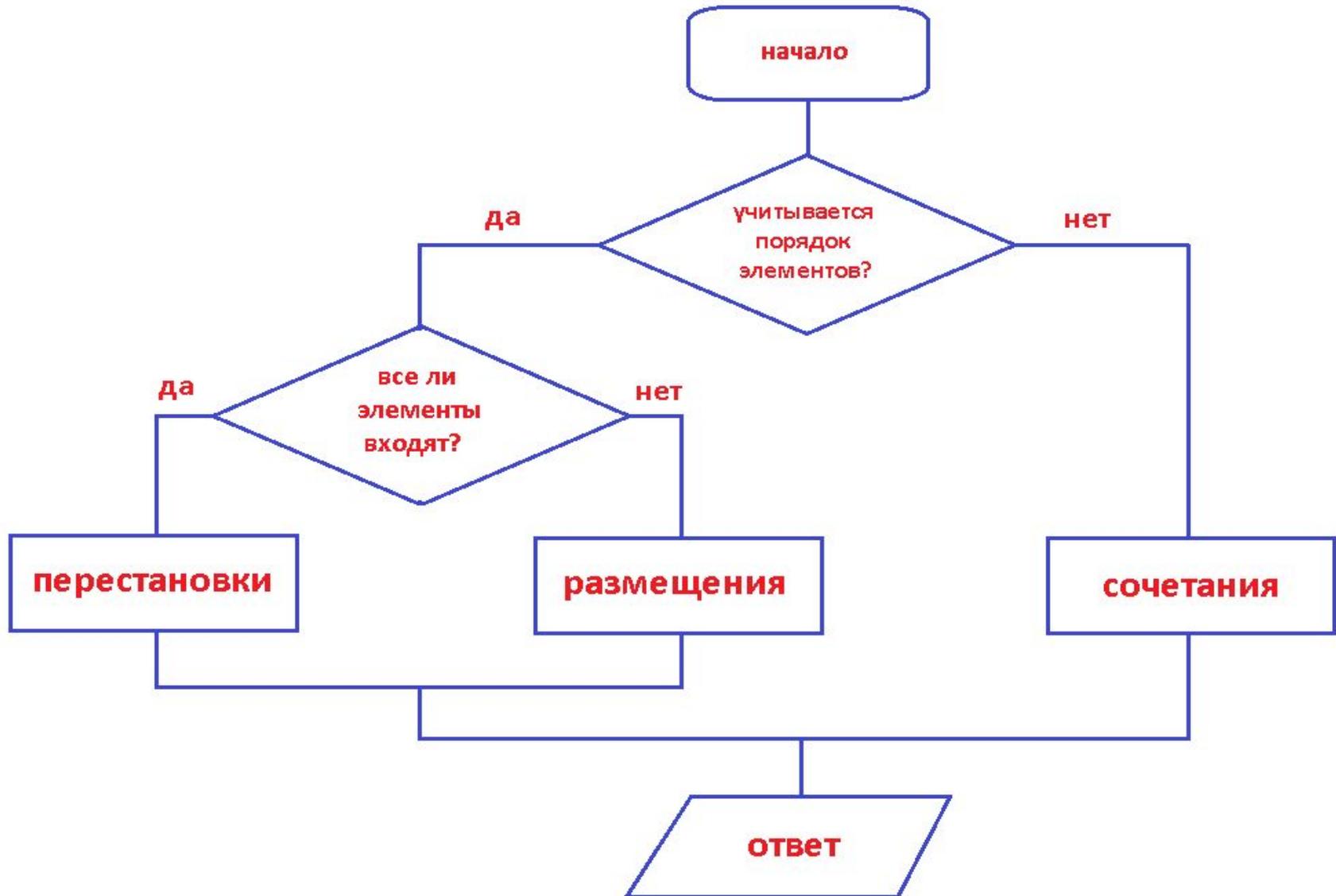
Решение

Требуемая выборка — сочетания.

Нужно вычислить, сколькими способами можно выбрать k элементов из n элементов, если порядок неважен.

$$\begin{aligned} C_{10}^3 &= \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{6 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{6 \cdot \cancel{7!}} = \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120 \end{aligned}$$

Схема решения комбинаторной



Вычислить:

$$\rightarrow 1. \frac{P_5}{P_7} = \frac{5!}{7!} = \frac{5!}{5! \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{42}.$$

$$\rightarrow 2. \frac{P_{12}}{P_5 \cdot P_7} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 792.$$

$$\rightarrow 3. C_9^3 : A_7^2 = \frac{9!}{3!(9-3)!} : \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{5!}{7!} = \frac{9! \cdot 5!}{3! \cdot 6! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 6 \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 3}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$