Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика

- Это раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Сколькими способами можно выбрать…

**Направо пойдешь, - коня потеряешь
Налево пойдешь, - голову сложишь, прямо пойдешь…**

Задачи, требующие перебора различных вариантов решения или поиска их числа называются ***комбинаторными***

Правило сложения

Если два действия взаимно исключают друг друга, и одно из них можно выполнить *К* способами, а другое *Р* способами, то оба действия можно выполнить *К +Р* числом способов.

Чтобы использовать закон сложения:

1. Нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;
2. Нужно выяснить количество элементов в каждой группе;
3. Нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов.

Задача на применение закона сложения

Яна решила выбрать обед в столовой колледжа. Так как у нее немного денег, то она может выбрать только одно блюдо.

В меню столовой 3 вида холодных закусок, 7 вариантов первых блюд и 9 вариантов вторых. Сколькими способами она может выбрать ОДНО БЛЮДО?

Решение

1. Каковы группы?

- **3 группы: холодные закуски, первые и вторые блюда**

2. Сколько элементов в группах?

Закуску можно выбрать **3 способами**;

Первое блюдо выбрать **7 способами**;

Второе блюдо можно выбрать **9 способами.**

3. Убедимся, что в группах нет одинаковых элементов.

4. **Применим закон сложения: 3+7+9=19**

Ответ: Одно блюдо можно выбрать 19 способами.

Правило произведения

Если одну часть действия можно выполнить *К способами*, а другую -*Р* способами, то все действие можно выполнить *К·Р* числом способов

Закон умножения используется, чтобы вычислить число **упорядоченных комбинаций - размещений**

Задача на применение правила произведения

Лена и Артем зашли в кафе.

На витрине лежит 25 вариантов десертов.

Ребята из них выбирают 2 десерта.

Выясните, сколькими различными способами может выбрать 2 десерта?

Решение

1. Сначала ребята могут выбрать любой из всех 25 десертов.

2. Когда первый выбор сделан, для следующего остаётся 25−1=24 вариантов выбора десерта.

3. По закону умножения:

Если элемент A можно выбрать k способами и затем второй элемент B можно выбрать m различными способами, пару элементов A и B можно выбрать $k \cdot m$ способами.

1-й десерт выбирают 25 способами

2 -й десерт выбираем 24 способами

Используем правило произведения

2 десерта выбираем $25 \cdot 24=600$ (способами).

Ответ

Ребята могут выбрать десерт 600 различными способами.

Факториал

- ***В задачах по комбинаторике часто встречается понятие факториала.***

- ***n!*** («эн факториал») – это произведение всех **натуральных** чисел от 1 до *n* включительно:

$$n! = n*(n-1)*(n-2)\ldots3*2*1$$

Например: $5! = 5*4*3*2*1 = 120$

$4! = 4*3*2*1 = 24$, ***то есть*** $5! = 5*4!$

$$0! = 1$$

Перестановки (без повторений)

Расположение различных ***n*** элементов в определенном порядке называется **перестановкой без повторений** из ***n*** элементов.

$$P_n = n!$$

- **Перестановки — это специальный случай размещений, когда выборка так же велика, как данное множество.**
- ***Важно!*** В заданиях на перестановки, **не важно назвать сами перестановки, а важно назвать их число.**

Задача на перестановки

Хор колледжа для Рождественского концерта приготовил 4 народных песен. В концертной программе один раз нужно проиграть каждую песню. Сколько можно составить концертных программ, если порядок песен важен?

Решение

Так как количество элементов во множестве неизменно и порядок элементов важен, можно сделать вывод, что нужно вычислить число перестановок

$$Pn = n!$$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ:

Можно составить **24 различных концертных программы.**

Множества и подмножества

- **Конечным множеством** называется множество, содержащее конечное число элементов.
- **Пустое множество** — это множество, не содержащее ни одного элемента.
- **Подмножеством** данного множества называется множество, все элементы которого принадлежат данному множеству.

Выборки

- **Выборками** называются подмножества какого-либо множества.
- **Упорядоченными выборками** называются выборки, в которых важен порядок элементов.
- Если в выборке поменяют местами два элемента и получится другая выборка, то данная выборка является упорядоченной.
- **Неупорядоченными выборками** называются выборки, в которых не важен порядок элементов.

Пример

Неупорядоченные выборки:

- Из 10 претендентов на место повара в кафе нужно выбрать 2 поваров. (Меняя местами поваров, пара останется той же.
- Гена из 8 книг выбирает для чтения 3 книги.(Меняя местами книги, не изменится выбранная литература.)

Упорядоченные выборки:

- Из 10 претендентов для работы в кафе нужно выбрать шеф-повара и повара по приготовлению холодных блюд.

  Меняя местами 2 претендентов, изменятся их должности.

- Гена из 8 книг выбирает для чтения 3 книги и составляет список их прочтения.

  Меняя книги местами, получится другой список.

Размещения
(порядок имеет значение)

- Комбинации, в которых имеет значение порядок элементов, называются **размещениями.**
- В размещениях **у каждого элемента своя определённая роль.**
- **Размещения — это упорядоченные наборы**
- ***Например:*** пара учеников — староста класса и его помощник; пара цифр — десятки и единицы.

Размещения без повторения

$$A_n^m$$

Читается: ***A*** из ***n*** по ***m***

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- ***n***-показывает количество элементов данного множества
- ***m*** показывает количество элементов размещения (сколько элементов выбирается)

Задача на применение формулы размещения

Для прохождения практики студентов есть14 столовых.

Вычислите, сколькими способами можно устроить трёх человек, чтобы они были в разных столовых?

Решение

Требуемая выборка — размещение, т.к. порядок элементов важен.

Например, если первый человек будет работать в столовой **A**, второй — в столовой **B**, а третий — в столовой **C**,

Меняя местами людей, получатся новые ситуации — новые выборки.

Нужно вычислить, сколькими способами можно выбрать *k* элементов из *n* элементов, где n=14; k=3 Применяем формулу:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!} = \frac{14!}{11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12\ \cancel{11!}}{\cancel{11!}} =$$

$$=14 \cdot 13 \cdot 12=2184$$

Сочетания

Сочетанием из *n* элементов по *m* элементов ($m \leq n$) называется выборка элементов *m* из данного неупорядоченного множества.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Отличие сочетаний от размещений:

В <u>размещениях</u> порядок выборки <u>важен</u>

В <u>сочетаниях</u> порядок выборки <u>не важен</u>

Задача на сочетания

На полке лежит 10 различных книг по кулинарии. Сколькими различными способами можно выбрать три книги для написания реферата ?

Решение

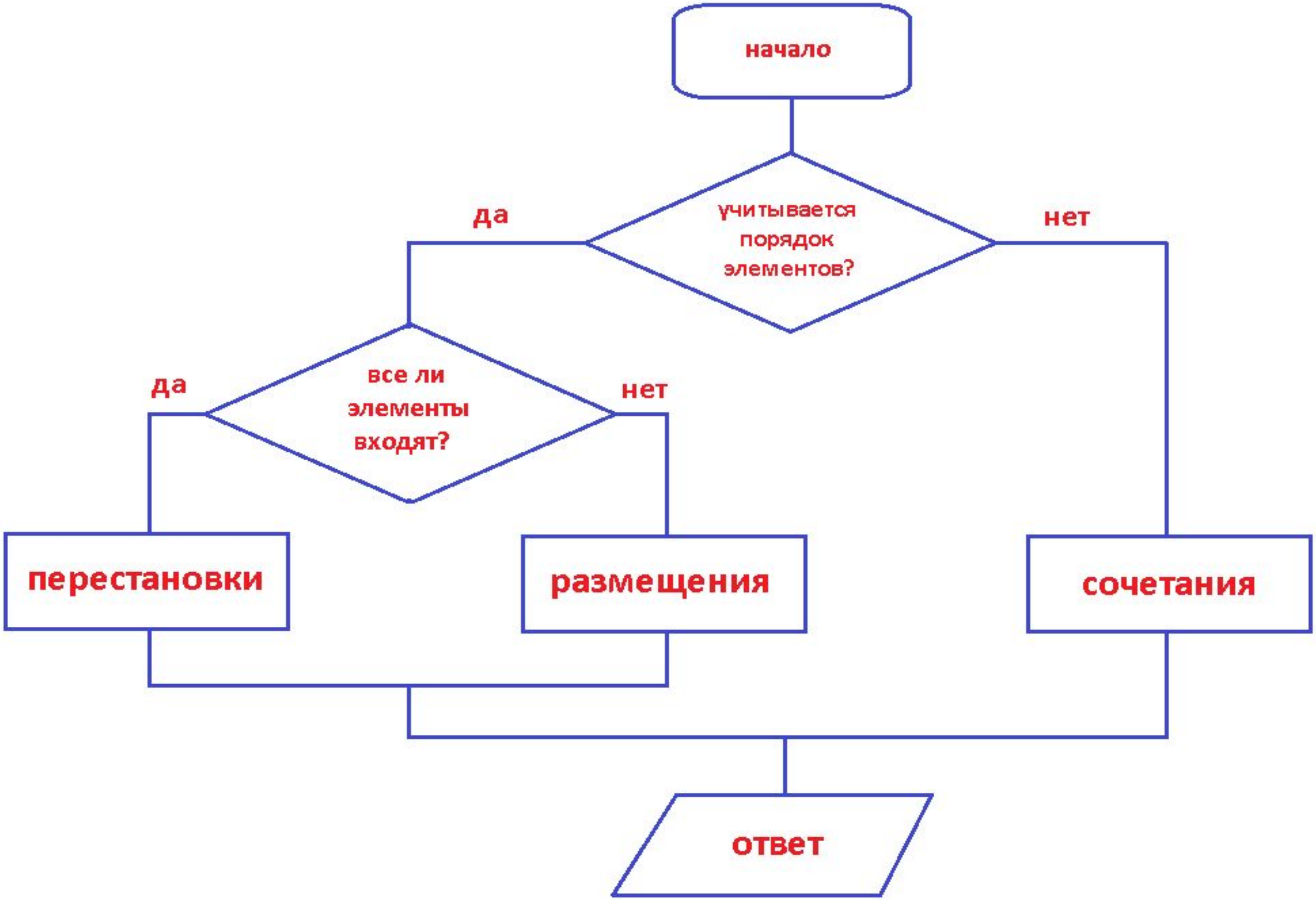
Требуемая выборка — сочетания.

Нужно вычислить, сколькими способами можно выбрать *k* элементов из *n* элементов, если порядок неважен.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3\cdot2\cdot1\cdot7!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{6\cdot7!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cancel{7!}}{6\cdot\cancel{7!}} =$$

$$= \frac{10\cdot9\cdot8}{6} = 120$$

Схема решения комбинаторной



Вычислить:

- 1. $\frac{P_5}{P_7} = \frac{5!}{7!} = \frac{5!}{5!\cdot6\cdot7} = \frac{1}{6\cdot7} = \frac{1}{42}$.

- 2. $\frac{P_{12}}{P_5\cdot P_7} = \frac{12!}{5!\cdot7!} = \frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7!} = \frac{8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{2\cdot3\cdot4\cdot5} = 4\cdot3\cdot2\cdot11\cdot3 = 792$.

- 3. $C_9^3 : A_7^2 = \frac{9!}{3!(9-3)!} : \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{9!}{3!\cdot6!}\cdot\frac{5!}{7!} = \frac{9!\cdot5!}{3!\cdot6!\cdot7!} = \frac{7!\cdot8\cdot9\cdot5!}{1\cdot2\cdot3\cdot5!\cdot6\cdot7!} = \frac{8\cdot9}{2\cdot3\cdot6} = \frac{4\cdot3}{6} = \frac{12}{6} = 2$.