

Вероятность

$$(a + b)^0 =$$

$$1$$

$$(a + b)^1 =$$

$$a + b$$

$$(a + b)^2 =$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 =$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 =$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 =$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Треугольник Паскаля

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		1	5		10		10	5		1
	1	6	15		20		15	6		1
	1	7	21	35		35	21	7		1
1	8	28	56	70	56	28	8		1	
.....										

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют «**эн факториал**»:
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$

По-английски одно из значений слова «factor» — «множитель». Так что «*эн факториал*» примерно переводится как «состоящий из n множителей». Приведем несколько первых значений для $n!$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320

Перестановки

- **Перестановки без повторений** — комбинаторные соединения, которые могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов.

$$P_n = n!$$

P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка.

Размещения



(по первой букве французского слова *arrangement* – размещение)

$$A_n^k$$

Размещение из n элементов по k .

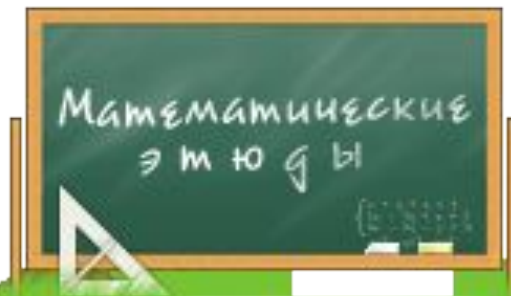
$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Сочетания

Число сочетаний из n элементов по k .

(по первой букве французского слова **Combination** – сочетание).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

Решение задач

$$1) (y-1)^4 =$$

$$2) (2x-3)^5 =$$

$$3) \frac{7!-5!}{5!} =$$

$$4) \frac{97!}{96!} + \frac{35!}{34!} =$$

$$5) \frac{4! \cdot 8!}{6! \cdot 7!} =$$

$$6) \frac{(n+3)!}{(n+1)!} =$$

Решение задач

$$7) \frac{A_7^4}{P_5} =$$

$$8) \left(\frac{C_{10}^7}{3} + \frac{C_6^2}{6} \right) \cdot \frac{P_4}{A_5^4} =$$

$$9) \frac{1}{P_{x-5}} = \frac{56}{P_{x-3}}$$

$$10) C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 =$$

достоверное событие
случайное событие
невозможное событие
несовместные события
равновозможные события

К какому типу событий (достоверному, невозможному, случайному) относится следующее событие:

- 1) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении сталь находится в жидком состоянии;
- 2) наугад вынутая из кошелька монета оказалась пятирублевой;
- 3) наугад названное натуральное число больше нуля?

Классическое определение вероятности

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого опыта следует:

- 1) найти число N всех возможных исходов данного опыта;*
- 2) найти количество $N(A)$ тех исходов опыта, в которых наступает событие A ;*
- 3) найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A .*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Задача 1. Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании игральной кости?

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

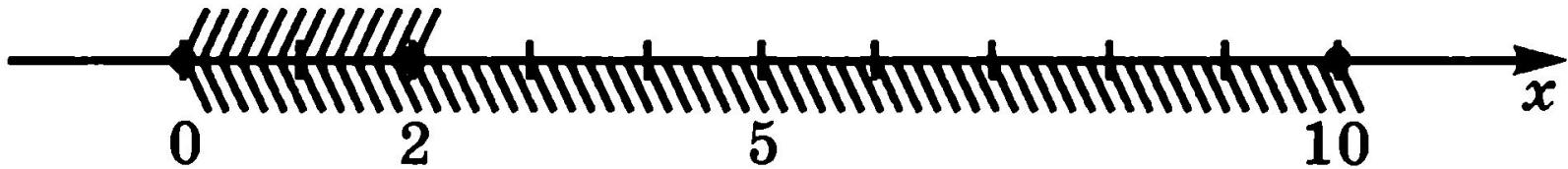
Задача 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

Задача 3.

Допустим, вы забыли последнюю цифру номера телефона друга и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что вы ее верно набрали?

Пример 4. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 5| \leq 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 1| \leq 1$?



0,2.

5. В коробке находится 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) черный; 2) белый; 3) красный; 4) черный или белый; 5) черный или красный; 6) красный или белый; 7) черный, или белый, или красный; 8) зеленый?
6. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на всех трех костях выпало одинаковое количество очков; 2) сумма очков на всех костях равна 4; 3) сумма очков на всех костях равна 5?
7. В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2) только один выигрышный; 3) выигрышного билета не оказалось?

Вероятность противоположного события

Событие \bar{A} называется событием, противоположным событию A , если оно происходит, когда не происходит событие A .

Что является событием, противоположным событию:

- 1) сегодня первый урок — физика;**
- 2) экзамен сдан на «отлично»;**
- 3) на игральной кости выпало меньше 5 очков;**
- 4) хотя бы одна пуля при трех выстрелах попала в цель?**

Вероятность противоположного события

Теорема 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Задача 1. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Задача 2. В роте из 100 солдат двое имеют высшее образование. Какова вероятность того, что в случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{98}^{30}}{C_{100}^{30}} = \frac{\frac{98!}{30! 68!}}{\frac{100!}{30! 70!}} = \frac{98! 70!}{68! 100!} = \frac{69 \cdot 70}{99 \cdot 100} = \frac{161}{330}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{161}{330} = \frac{169}{330} \approx 0,512.$$

Случайные события и их вероятности

Определение. Суммой событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда происходит или событие A , или событие B . Обозначение: $A + B$.

Произведением событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда одновременно происходят и событие A , и событие B . Обозначение: AB .

Независимые события

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B , следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B .

Независимые события

Задача 1. Найти вероятность того, что при первом бросании игральной кости появятся 6 очков, а при втором — нечетное число очков.

$$P(AB) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Вероятность попадания в мишень равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов?

Вероятность того, что батарейка бракованная равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

$$1 - 0,06 = 0,94$$

$$0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$$

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

$$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048$$

Сложение вероятностей

Суммой событий A и B называют событие $A + B$, состоящее в появлении либо только события A , либо только события B , либо и события A и события B одновременно.

Т е о р е м а . Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность, что эта карта либо туз, либо дама?

$$\frac{4}{36} + \frac{4}{36} =$$

Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,3. Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом, если оба стрелка независимо друг от друга выстрелили по ней?

*П1-попал первый, П2-попал второй,
М1-мимо первый, М2 – мимо второй*

П1и М1 или П1иП2 или М1иП2

$$P = 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,44$$

Теорема 2 (о вероятности суммы событий).

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность произведения этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. К концу дня в отдельно взятом автомате, кофе остается с вероятностью 0,8. Вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах, равна 0,62. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

$$P(\bar{A}) = 0,8 + 0,8 - 0,62 = 0,98$$

$$P(A) = 1 - 0,98 = 0,02$$

Вероятность и геометрия

Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X , которая целиком содержит фигуру A , то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A :

$$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C ?

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C ?

Решение.

Пусть a — длина стороны монитора.

Построим серединный перпендикуляр к отрезку OC .

вероятность выбора точки из $\triangle KCL$ равна $\frac{S_{KCL}}{S} = 0,125$.

По условию нам следует найти $1 - 0,125 = 0,875$.

Ответ: 0,875.

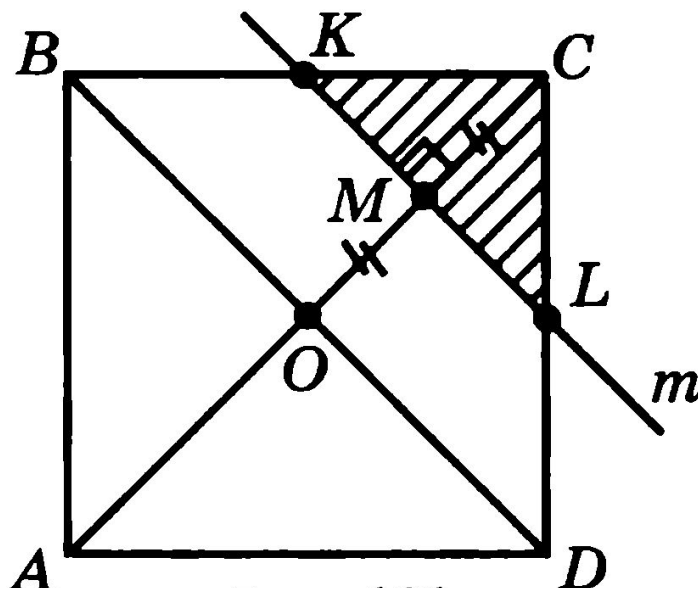


Схема Бернулли

Теорема 1 (теорема Бернулли). Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

023.10. Стрелок не очень меток: вероятность поражения мишени при одном выстреле оценивается в 40%. Оцените (в процентах) вероятности наступления следующих событий при пяти выстрелах этого стрелка:

- а) в мишень попадут ровно три пули;
- б) в мишень не попадет ровно одна пуля;
- в) мишень останется нетронутой;
- г) мишень будет поражена хотя бы раз.

$$n = 5, p = 0,4, q = 0,6, k =$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 \approx 0,23$$

$$P_5(1) =$$

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0,6^5 \approx 0,078$$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

Статистические методы обработки информации

Измерение. У 50 выпускников школы независимо попросили назвать любую цифру. Получили следующие данные:

2 1 3 3 5 5 3 8 1 7
1 5 7 5 3 8 0 4 7 3
3 9 6 9 1 6 9 1 2 3
9 8 7 0 5 1 3 1 3 9
6 2 3 5 9 2 5 1 5 7

Таблица распределения

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50

количество всех вариантов

объем измерения

Статистические методы обработки информации

Если кратность данной варианты разделить на объем измерения, то получится *частота варианты*.

$$\text{Частота варианты} = \frac{\text{кратность варианты}}{\text{объем измерения}}$$

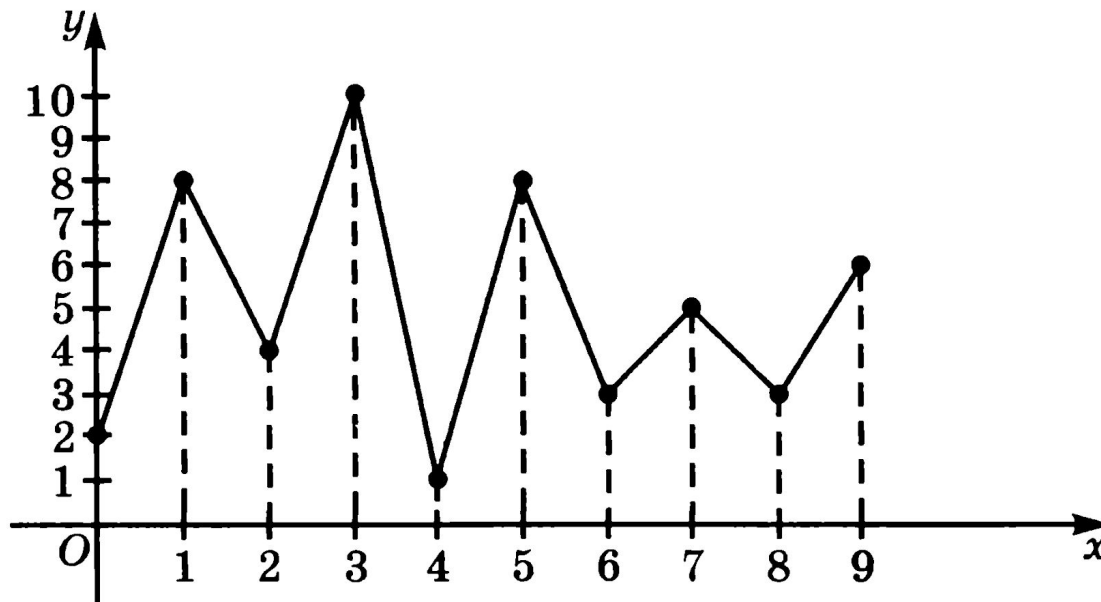
$$\text{Процентная частота варианты} = \frac{\text{кратность варианты}}{\text{объем измерения}} \cdot 100\%$$

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

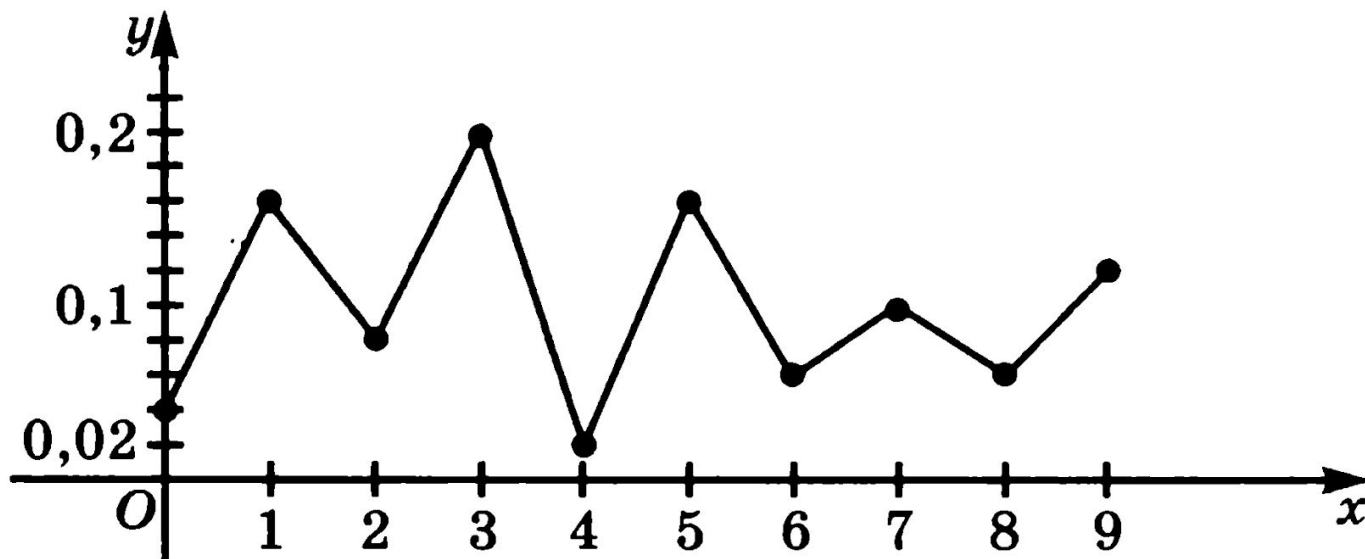
Многоугольник распределения кратностей



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

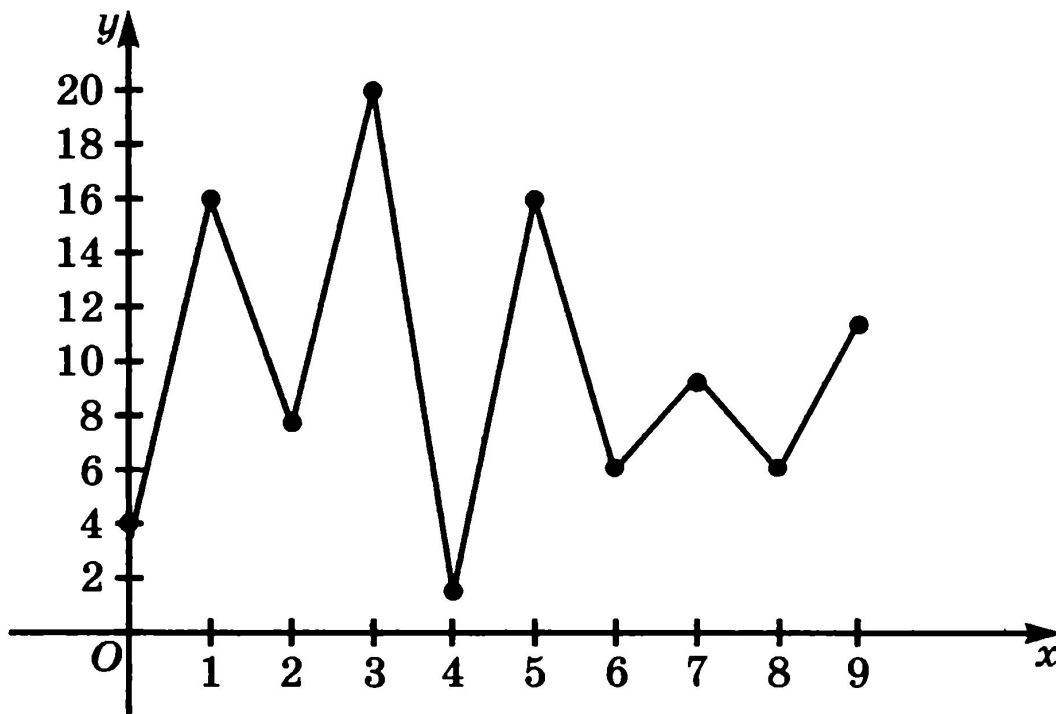
Многоугольник распределения частот



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

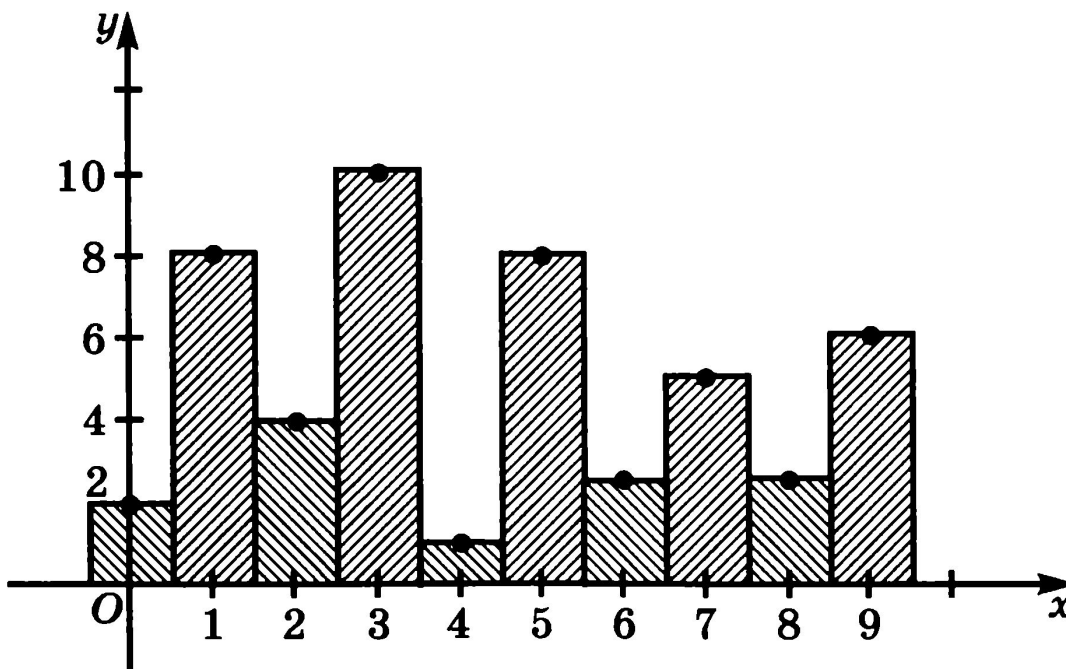
Многоугольник распределения процентных частот



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Гистограмма распределения кратностей



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

$x_n - x_1$ называют *размахом* измерения

Размах равен 9 ($9 = 9 - 0$).

Мода ряда данных — это

Мода равна 3

Медианой ряда

$$\frac{4 + 5}{2} = 4,5.$$

среднее значение

$$\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 6}{50} = 4,42.$$

Домашнее задание

сайт alexlarin.net var 117