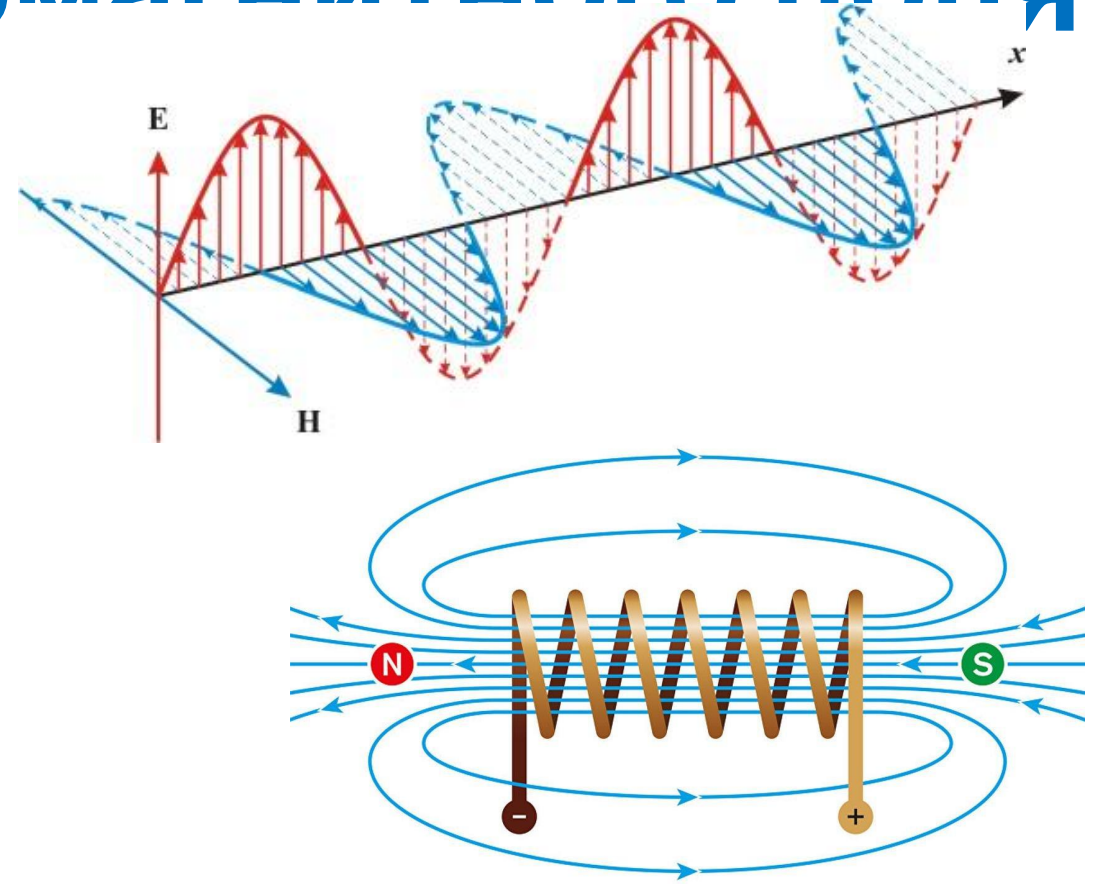


# Теоретические основы электротехники

## Теория электромагнитного поля



# Магнитное поле постоянных токов

Из полной системы уравнений электромагнитного поля используем уравнения, относящиеся к магнитному полю:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Магнитное поле не является потенциальным  $\oint \vec{H} d\vec{l} = i \neq 0$  и называется вихревым полем.

Постоянные токи могут существовать только внутри проводящей среды в виде токов проводимости  $\vec{J}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}$

В системе проводников с постоянными электрическими токами **магнитное поле является вихревым только внутри этих проводников.**

**Вне проводников** плотность токов равна нулю

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

Это означает, что **вне проводников с постоянными токами магнитное поле является безвихревым, т.е. потенциальным**

# Скалярный магнитный потенциал

**Разность магнитных потенциалов** между двумя точками определяется как линейный интеграл от вектора напряженности магнитного поля между этими точками и **измеряется в амперах**:

$$U_{ma} - U_{mb} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{H} = - \text{grad } U_m$  - в дифференциальной форме связь между скалярным магнитным потенциалом и напряженностью магнитного поля

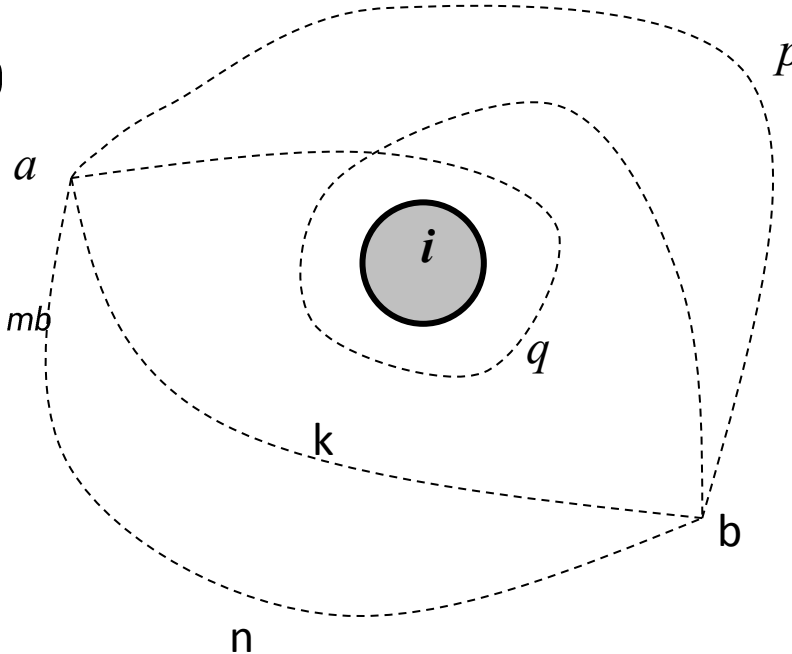
$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x} \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y} \quad H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z} \quad H_l = -\frac{\partial U_m}{\partial l} = H \cos \alpha \quad H = -\frac{\partial U_m}{\partial n}$$

Уравнение поверхности **равного магнитного потенциала** определяется из условия, что на ней в любой точке  $\cos \alpha = 0$ . Это означает, что линии напряженности магнитного поля перпендикулярны поверхности равного магнитного потенциала. Уравнение такой поверхности имеет вид  $U_m(x, y, z) = \text{const}$ .

# Многозначность функции магнитного потенциала

$$1. \oint_{akbna} \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad \int_{akb} \vec{H} d\vec{l} + \int_{bna} \vec{H} d\vec{l} = 0$$

$$\int_{akb} \vec{H} d\vec{l} = \int_{anb} \vec{H} d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H} d\vec{l} = U_{ma} - U_{mb}$$



$$2. \oint_{akbpa} \vec{H} d\vec{l} = -i$$

$$\int_{apb} \vec{H} d\vec{l} = \int_{akb} \vec{H} d\vec{l} + i = U_{ma} - U_{mb} + i$$

$$3. \oint_{akbqa} \vec{H} d\vec{l} = -2i$$

$$\int_{aqb} \vec{H} d\vec{l} = \int_{akb} \vec{H} d\vec{l} + 2i = U_{ma} - U_{mb} + 2i$$

**1.** Разность магнитных скалярных потенциалов между точками **не зависит от пути интегрирования, если замкнутый контур, образованный этими двумя путями, не охватывает ток.**

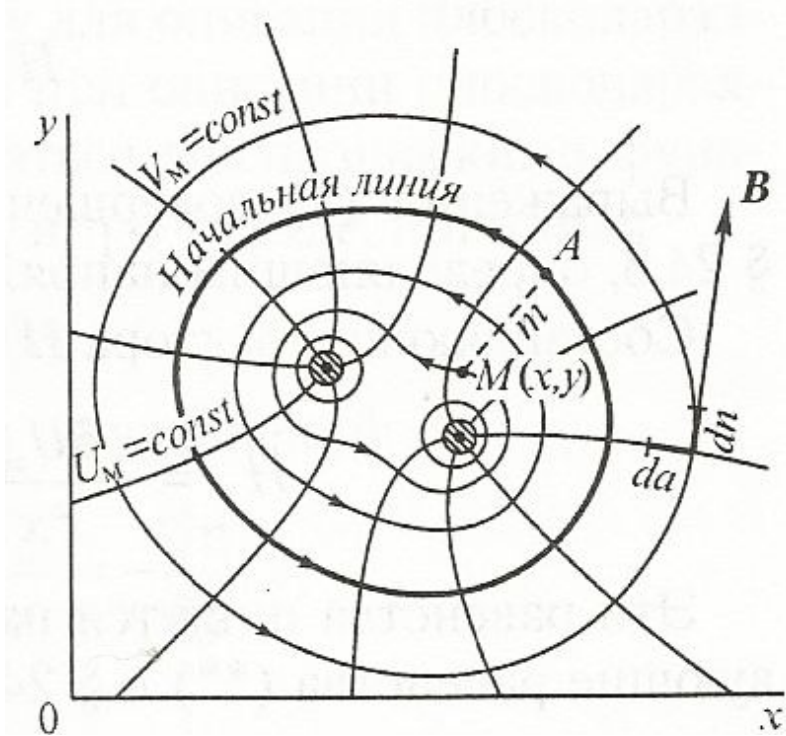
**2, 3.** Если же контур, образованный двумя различными путями, охватывает электрический ток, то разность магнитных потенциалов для двух различных путей интегрирования отличается на величину тока, охваченного контуром. В общем случае можно записать:

$$\int_{arb} \vec{H} d\vec{l} = U_{ma} - U_{mb} + m \cdot i$$

$m$ -любое целое положительное или отрицательное число

# Плоскопараллельное магнитное поле

Плоскопараллельное магнитное поле создается системой параллельных весьма длинных проводов с постоянными токами.



$$U_M(x, y) = const$$

$$V_M = \Psi_H / l$$

$$V_M(x, y) = const$$

$$H = -\frac{\partial U_m}{\partial n} = +\frac{\partial V_m}{\partial a}$$

# Комплексный потенциал магнитного поля.

$$W_m = V_m + jU_m \quad \text{- по аналогии с электростатическим полем}$$

Вне областей с током справедливо уравнение Лапласа:

$$\Delta U_m = 0; \quad \Delta V_m = 0.$$

Напряженность магнитного поля:

$$|H| = \left| \frac{dW_m}{dz} \right|$$

# Поле уединенного проводника с током

Запишем комплексный потенциал в виде:

$$W_m = V_m + jU_m = k \cdot \ln z + C_1 + jC_2 = k \cdot \ln r + C_1 + j(k\theta + C_2),$$

K- вещественная величина

$$V_m = k \cdot \ln r + C_1; \quad U_m = k\theta + C_2$$

Линии  $V_m = \text{const}$  представляют собой окружности ( $r = \text{const}$ ), а условие постоянства приращения функции потока между соседними линиями означает, что радиусы окружностей должны образовывать геометрическую прогрессию:

$$\Delta V_m = k \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = \text{const}$$

Линии  $U_m = \text{const}$  представляют собой лучи, исходящие из начала координат, совмещенного с осью проводника ( $\theta = \text{const}$ ), а условие постоянства приращения магнитного потенциала между соседними линиями означает, что приращение угла между соседними лучами одно и тоже:

$$\Delta U_m = k \cdot \Delta\theta = \text{const}$$

**Выбор значений постоянных  $C_1$  и  $C_2$  определяет положение начальных (нулевых) линий скалярного магнитного потенциала и функции потока.**

При обходе провода по замкнутому контуру против часовой стрелки ( $\Delta\theta = 2\pi$ ) приращение магнитного потенциала в соответствии с законом полного тока равно току в проводе со знаком минус, так как ток направлен от наблюдателя

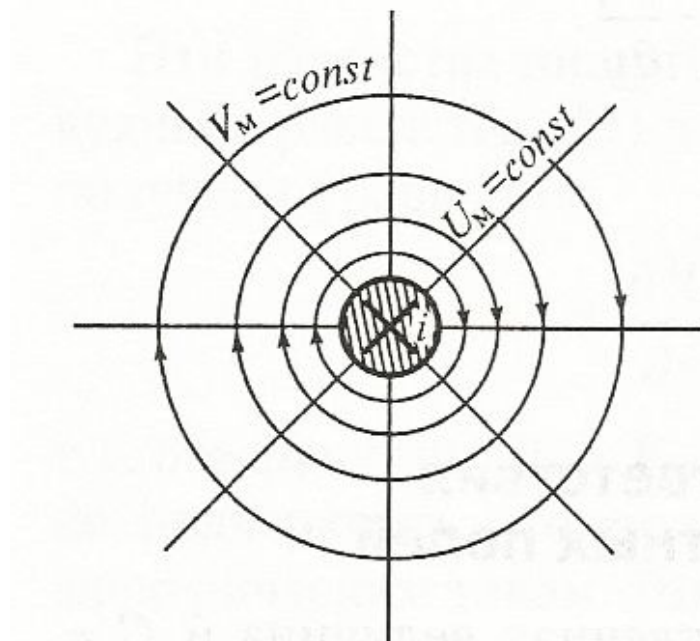
$$\Delta U_m = \oint H dl = -i = k \cdot \Delta\theta = k \cdot 2\pi; \quad k = -\frac{i}{2\pi}$$

$$V_m = -\frac{i}{2\pi} \cdot \ln r + C_1$$

$$U_m = -\frac{i}{2\pi} \theta + C_2$$



# Поле уединенного проводника с током



**Линии напряженности магнитного поля**, созданного током в круговом проводе, представляют собой окружности с центром на оси проводника, причем они существуют и внутри проводника с током.

**Линии равного магнитного потенциала** перпендикулярны силовым линиям напряженности и являются радиальными лучами вне проводника с током.

# Магнитное поле двух нитей с прямым и обратным током

Комплексный магнитный потенциал в этом случае на основе принципа наложения может быть записан в виде:

$$W_m = -\frac{i}{2\pi} \ln \frac{z-z_1}{z-z_2} + C_1 + jC_2 = +\frac{i}{2\pi} \ln \frac{z-z_2}{z-z_1} + C_1 + jC_2$$

$$V_m = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_1 \qquad U_m = \frac{i}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + C_2$$

Здесь  $z_1$  и  $z_2$  координаты расположения нитей с прямым и обратным током

# Магнитное поле двухпроводной линии передач постоянного тока

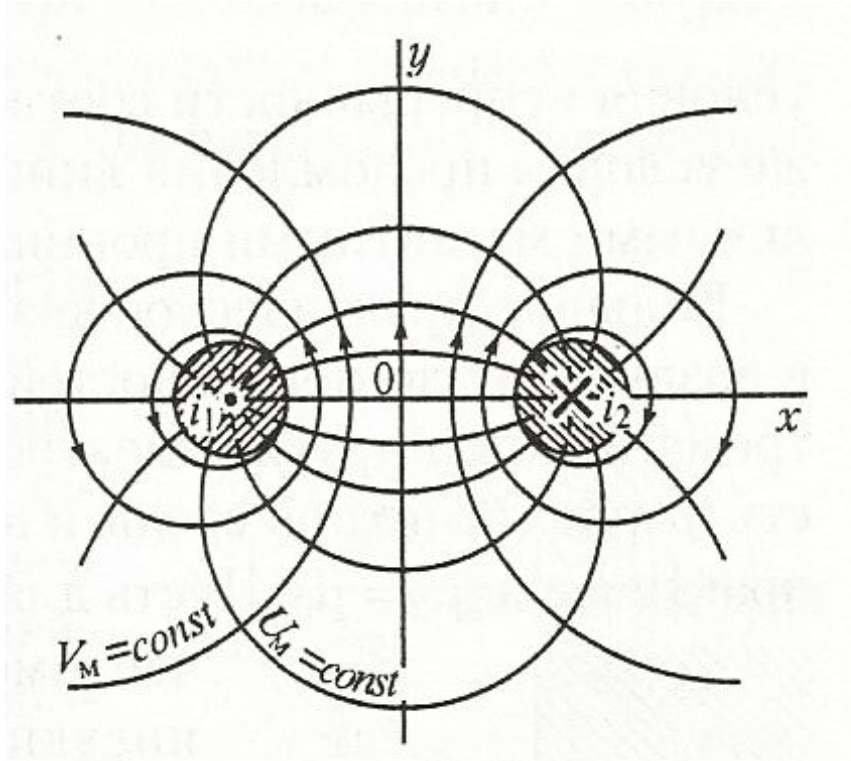
Для проводов, имеющих **конечные радиусы**, магнитное поле вне этих проводов такое же, как и поле токов, протекающих **по осям этих проводов**. Постоянные токи, протекающие в проводах, не индуцируют э.д.с. взаимоиндукции и не приводят к перераспределению токов в соседних проводах. Это означает, что магнитные оси проводов совпадают с геометрическими осями, т.е. токи проводов можно считать протекающим по геометрическим осям проводов.

Пусть магнитная проницаемость проводников с током равна магнитной проницаемости воздуха ( $\mu_{\text{пр}} = \mu_0$ ), а постоянные токи в проводниках равномерно распределены по сечению проводов. Тогда при исследовании магнитного поля вне проводников с токами можем утверждать, что оно соответствует электростатическому полю двух тонких заряженных нитей, которое мы уже умеем строить.

Необходимо лишь заменить линии равного потенциала электрического поля на линии напряженности магнитного поля ( $U, V_m$ ) и, наоборот, линии напряженности электрического поля на линии равного магнитного потенциала магнитного поля ( $V \square U_m$ ).

Границы проводников не совпадают с линиями напряженности магнитного поля (линиями функции потока). А это означает, что **линии равного магнитного потенциала не перпендикулярны поверхности проводников с токами**.

# Магнитное поле двухпроводной линии передач постоянного тока



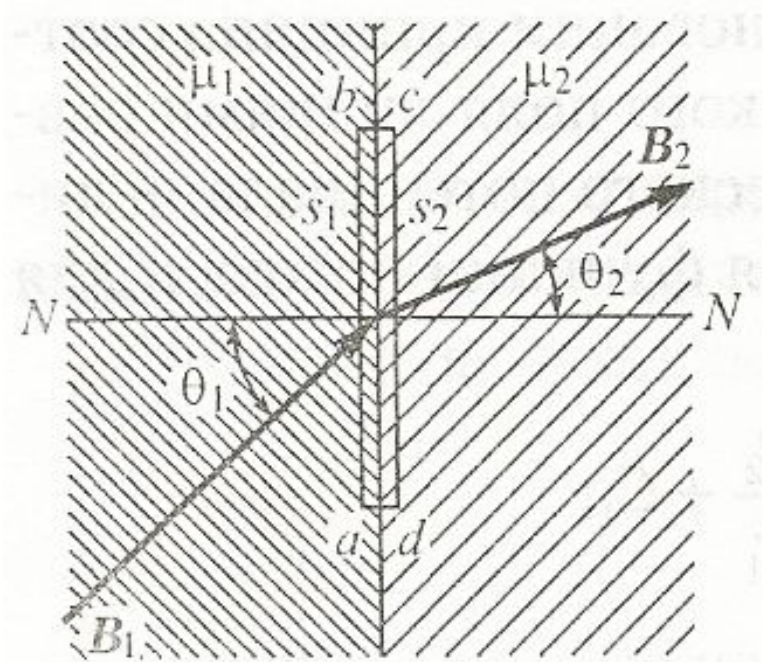
Внутри проводников электрическое и магнитное поля не соответствуют друг другу, так как внутри заряженных проводников отсутствует электростатическое поле ( $E = 0$ ), но в проводниках с током магнитное поле существует ( $H \neq 0$ ). При этом электрический потенциал всех точек внутри заряженного проводника одинаков ( $U = \text{const}$ ), а скалярный магнитный потенциал внутри проводников с постоянными токами не существует, так как внутри магнитное поле имеет вихревой характер.

Строить магнитное поле проводников с токами проще, чем электростатическое, так как не надо предварительно определять положение электрических осей, магнитные оси проводов совпадают с их геометрическими осями

## **Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей.**

Сравнивая выражения для комплексного потенциала электростатического поля в системе двух заряженных тонких проводников и комплексного потенциала магнитного поля двух тонких проводов вне этих проводов с постоянными токами, следует отметить их полное соответствие. Разница заключается лишь в том, что линии равного электрического потенциала электрического поля, являющиеся окружностями с центрами на оси абсцисс, в магнитном поле становятся линиями напряженности магнитного поля, и, наоборот, линии напряженности электрического поля, являющиеся окружностями с центрами на оси ординат, в магнитном поле становятся линиями равного магнитного потенциала.

# Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями



$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

# Граничные условия в магнитном поле у поверхности ферромагнетиков.

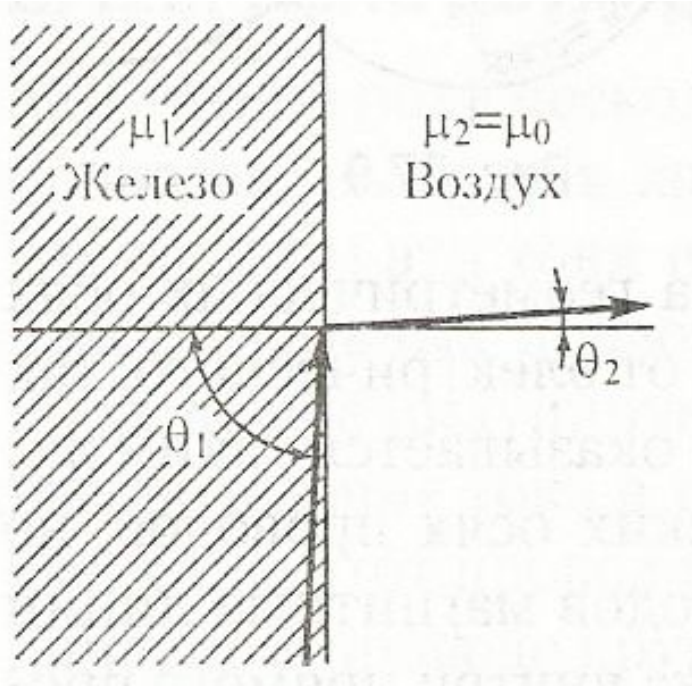
Магнитная проницаемость ферромагнетиков во много раз превышает магнитную проницаемость других сред ( $\mu_{Ferr} \gg \mu_0$ ).

Рассмотрим поле на границе **ферромагнетика** ( $\mu_1 = \mu_{Ferr} = 600\mu_0$ ) и воздуха ( $\mu_2 = \mu_0$ ), созданное проводниками с токами, расположенными в воздухе

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = 600$$

Пусть угол между нормалью и вектором индукции магнитного поля в ферромагнетике равен  $\theta_1 = 88^\circ$ . Тогда получаем  $\operatorname{tg} \theta_1 \approx 30$ ;  $\operatorname{tg} \theta_2 \approx 0,05$   $\theta_2 \approx 3^\circ$

# Граничные условия в магнитном поле у поверхности ферромагнетиков.



$$\operatorname{tg}\theta_1 \approx 30; \quad \operatorname{tg}\theta_2 \approx 0,05 \quad \theta_2 \approx 3^\circ.$$

Это означает, что в воздухе у поверхности ферромагнетика линии напряженности магнитного поля и магнитной индукции перпендикулярны поверхности ферромагнетика ( $H_{1\tau} = H_{2\tau} = 0$ )

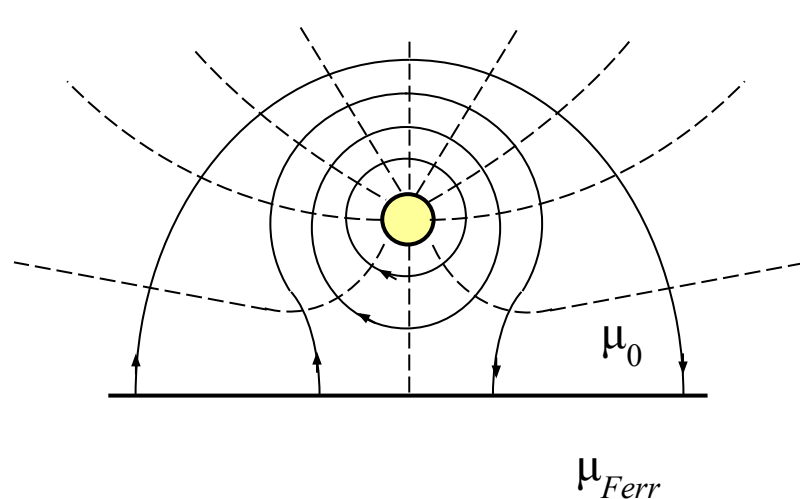
Поэтому поверхность ферромагнетика можем считать поверхностью равного магнитного потенциала. Нормальную составляющую вектора напряженности магнитного поля внутри ферромагнетика можно принять равной нулю, так как  $H_{1n} = H_{2n} / 600 \approx 0$ .

**Магнитное поле вектора  $H$  внутри ферромагнетика отсутствует.**



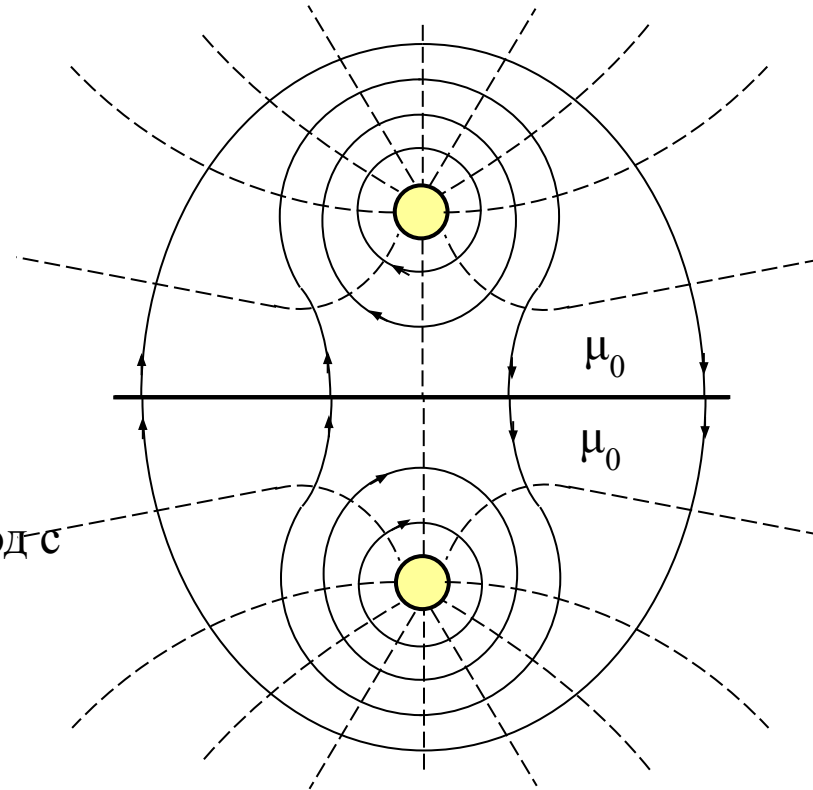
# Метод зеркальных изображений в магнитном поле.

Рассмотрим проводник с током, расположенный в воздухе параллельно плоской поверхности ферромагнетика



$$U_m = \text{const}$$

Линии индукции магнитного поля, охватывающие провод с током подходят перпендикулярно к поверхности ферромагнетика и замыкаются внутри него.



Заменим ферромагнитную среду, поверхность которой равнопотенциальна, воздухом с зеркально расположенным проводником с постоянным током **такой же величины и направления**, как и ток в исходном проводе

Ввиду равенства токов, геометрии системы и граничных условий поле в верхней полуплоскости двух токов совпадает с полем в исходной системе. На этом основан **метод зеркальных изображений** в магнитном поле, позволяющий упростить анализ магнитных полей вблизи поверхностей ферромагнетиков.

# Графический метод построения картины плоскопараллельного магнитного поля.

## В области не занятой обмотками с током

При построении следует соблюдать правила, аналогичные тем, которые сформулированы в электростатическом поле:

- Линии напряженности магнитного поля должны быть перпендикулярны линиям равного магнитного потенциала в точках их пересечения.
- Линии напряженности должны быть перпендикулярны границам ферромагнетиков ( $\mu = \infty$ ).
- Ячейки картины поля должны быть подобны друг другу  $\frac{\Delta a}{\Delta n} = \text{const}$

что означает равенство приращений магнитного потенциала ( $\Delta U_m = \text{const}$ ) и функции магнитного потока ( $\Delta V_m = \text{const}$ ) между соседними линиями.



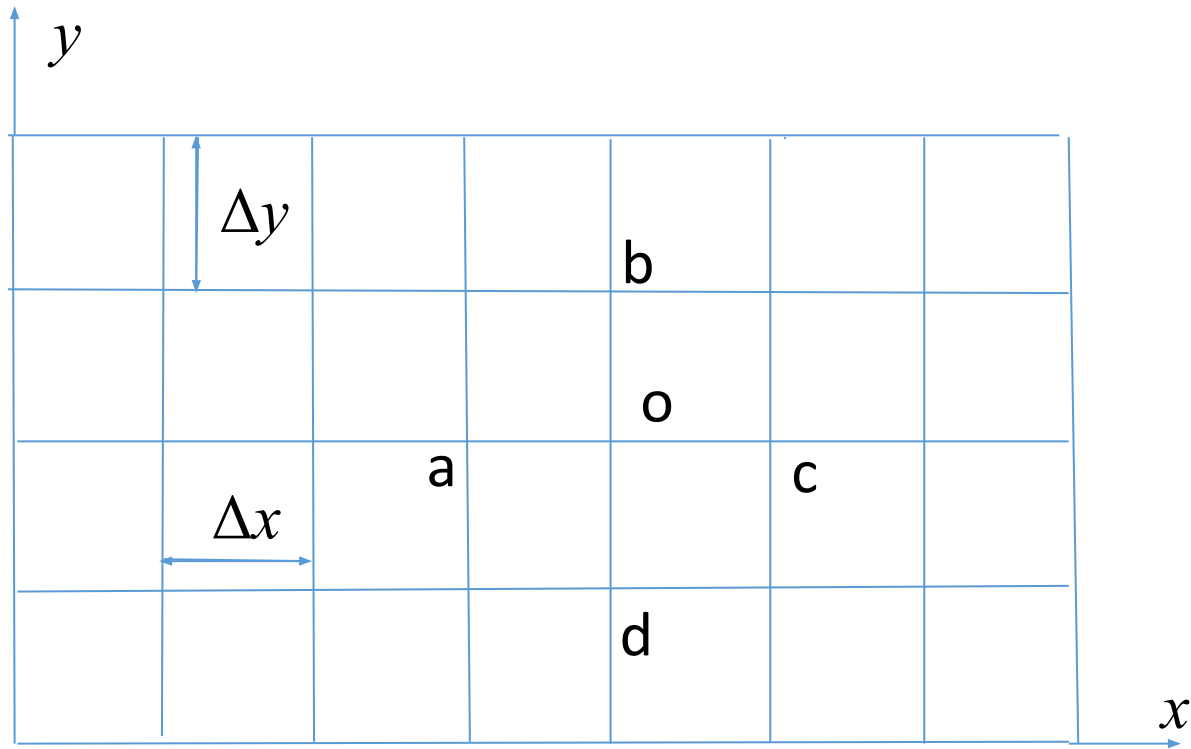
# Приближенные методы расчета и построения картины плоскопараллельного поля.

## Метод сеток.

Рассмотрим его применение на примере определения скалярного магнитного потенциала плоскопараллельного магнитного поля постоянных токов. Так как поле, описываемое скалярным магнитным потенциалом, существует только вне областей с токами, то во всех точках скалярный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\operatorname{divgrad}U_m = \Delta U_m = \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = 0$$

Разобьем исследуемую область с помощью линий, параллельных осям координат, на одинаковые ячейки, шириной  $\Delta x$  и высотой  $\Delta y$



Переходя к конечным приращениям, можем записать приближенное равенство:

$$\frac{\Delta^2 U_m}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 U_m}{\Delta y^2} \approx 0$$

Рассмотрев произвольный узел сетки ( $o$ ) и четыре примыкающие к нему узла ( $a, b, c, d$ ), можем записать через приращения потенциалов и координат выражения для первых производных, а затем и вторую производную по оси абсцисс:

$$\frac{\Delta U_{m(oa)}}{\Delta x} = \frac{U_{mo} - U_{ma}}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta U_{m(co)}}{\Delta x} = \frac{U_{mc} - U_{mo}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta^2 U_m}{\Delta x^2} = \frac{\frac{\Delta U_{m(co)}}{\Delta x} - \frac{\Delta U_{m(oa)}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{U_{mc} - U_{mo} - U_{mo} + U_{ma}}{\Delta x^2} = \frac{U_{mc} + U_{ma} - 2U_{mo}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\Delta^2 U_m}{\Delta y^2} = \frac{U_{mb} + U_{md} - 2U_{mo}}{\Delta y^2}$$

$$U_{ma} + U_{mb} + U_{mc} + U_{md} - 4U_{mo} = 0 \qquad U_{mo} = \frac{U_{ma} + U_{mb} + U_{mc} + U_{md}}{4}$$

Полученное соотношение означает, что для квадратной сетки магнитный потенциал любого узла сетки может быть приближенно принят равным среднему арифметическому магнитных потенциалов соседних с ним узлов сетки.

Записав аналогичные уравнения для всех узлов сетки, и используя значения потенциала на границах области, можно вычислить потенциалы всех узлов, если решить совместно полученную систему уравнений.

Однако вместо совместного решения большого количества уравнений удобнее воспользоваться итерационным методом. Для этого необходимо задаться начальными приближениями потенциалов во всех узлах сетки, а затем, проверяя соотношения для потенциалов поочередно во всех узлах, уточнить потенциалы всех узловых точек. Полученные в результате первой итерации значения потенциалов узлов вновь проверяются и уточняются с помощью полученных соотношений. Проводя последовательно несколько итераций, удастся получить значения потенциалов в узлах, которые сойдутся к величинам, совпадающим с результатами непосредственного решением системы уравнений для узлов сетки.

Итерационный процесс сходится быстрее, если удастся правильно задать начальные приближения для потенциалов узлов.