Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 10

Агаев Рафиг Пашаевич
(доктор физико-математических наук)

План лекции 10

- Симметричные и эрмитовы матрицы
- Линейная форма
- Билинейная форма
- Квадратичная форма
- Критерий Сильвестра
- Примеры
- Домашняя задача

Важно знать следующие обозначения

Для вектора

$$x = \begin{bmatrix} 3+i4 \\ -2-i5 \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4, \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 3-i4 \\ -2+i5 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix};$$

x^* – сопряженный к x.

$$x^* = \bar{x}^T = [3-i4, -2+i5, 2 \ \ 1-i\,].$$

Поэтому x^*x - всегда положительно число для $x \neq 0$ и равно квадрату модуля x.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 1 \\ 1-i3 & 2-i3 & 8 \\ 3 & 3+7i & 3+i4 \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i3 & 3 \\ 2-i & 2-i3 & 3+7i \\ 1 & 8 & 3+i4 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 1 \\ 1+i3 & 2+i3 & 8 \\ 3 & 3-7i & 3-i4 \end{bmatrix}; A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+i3 & 3 \\ 2+i & 2+i3 & 3-7i \\ 1 & 8 & 3+i4 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)^* = B^*A^*; \quad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B};$$

О спектре симметричных матриц

- **Напомним** **Теорему о спектре** действительных (вещественных) симметр. матриц.

Теорема 1.

1) Собственные значения вещественной симметричной матрицы вещественны.
2) Собственные векторы симметричной вещественной матрицы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. 1) Пусть матрица действительная и симметричная, т.е. $A = A^T$.
Рассмотрим

$$Ax = \lambda x \implies x^* A x = \lambda x^* x. \qquad (1)$$

Пусть x – нормированный собственный вектор, т.е. $x^* x$=1.

Напомним, что x^* получается из x транспонированием и заменой координат на сопряженное число.

Из (1) получим:

$$x^* A x = \lambda \implies (x^* A x)^* = (\lambda)^* = \bar{\lambda} \implies \lambda = \bar{\lambda}.$$

Но, $\lambda = \bar{\lambda}$ возможно только тогда, когда λ – вещественное число.

…

2) Докажем, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Пусть λ и μ различные собст. знач., x, y -соответствующие собст. векторы матрицы A:

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y.$$

Заметим, что $y^T A = \mu y^T$ и

$$y^T Ax = \lambda y^T x = \mu y^T x. \qquad (1)$$

В силу $\lambda \neq \mu$ и из (1) следует, что $y^T x = 0$.

Теорема доказана полностью.

Самосопряженные лин. преобразования

- **Определение 1.** Линейное преобразование A в действительном Евклидовом L пространстве называется самосопряженным, если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ имеет место

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y}).$$

Пример 1. Линейное преобразование $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ является самосопряженным. Действительно, для $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ y_2)^{\mathrm{T}}$ верно:

$A\mathbf{x} = (-x_1 + 4x_2, 4x_1 + 5x_2)^T$. $\quad A\mathbf{y} = (-y_1 + 4y_2, \ \ 4y_1 + 5y_2)^T$.

Очевидно, $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_1 + 5x_2y_2 = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$.

Теорема 2. Каждое линейное преобразование в действительном Евклидовом L пространстве является самосопряженным тогда и только тогда, когда для любого ортогонального базиса в L матрица лин. преобразования симметрична.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - ортогональный базис в L. Предположим, что матрица лин. преобразования симметрична. Покажем, что преобр. - самосопряженное

Самосопряженные лин. преобразования

- Рассмотрим два вектора:

$\mathbf{x} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n; \qquad \mathbf{y} = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n.$

Пусть $\mathbf{z} = A\mathbf{x} = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$, A – матрица лин. преобразования. Тогда

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k.$$

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\, y_i. \qquad (1)$$

Пусть $\mathbf{u} = A\mathbf{y} = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$. Тогда

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k,$$

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k x_i\,. \qquad (2)$$

Заметим, что из симметричности матрицы, т.е. из $a_{ik} = a_{ki}$, (1) и (2) получим $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$, т.е. самосопряженность лин. преобразования.

Самосопряженные лин. преобразования

- Докажем обратное утверждение. Пусть оператор A самосопряженный, те. $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Положим $\mathbf{x}, = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_\mathbf{k}$.

Согласно условию теоремы $e_1, \dots, e_n$ - ортогональный базис.

Мы уже знаем, что $A\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$ - к-й столбец матрицы преобразования. вектор $A\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$ выражается как $a_{1k}e_1 + \cdots + a_{nk}e_n$. Тогда $(\mathbf{e}_\mathbf{i}, A\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ik}}$ и $(A\mathbf{e}_\mathbf{i}, \mathbf{e}_\mathbf{k}) = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ki}}$.

Таким образом $(\mathbf{e}_\mathbf{i}, A\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}) = (A\mathbf{e}_\mathbf{i}, \mathbf{e}_\mathbf{k})$ и $a_{ik} = a_{ki}$.

Теорема доказана.

Лемма 1. Каждая самосопряженное лин. преобразование **A** в действительном Евклидовом пространстве имеет одномерное инвариантное подпространство .

Утверждение леммы следует из действительности с.з. симметричных матриц. Тогда подпространство собственных векторов вместе с нулевым вектором является инвариантным относительно матрицы A.

Слайд 1

• **Лемма 2.** Пусть самосопряженный оператор A в n-мерном Евклидовом пространстве имеет собственный вектор $\mathbf{e}$. Тогда подпространство L_e, ортогональное вектору e, имеет размерность (n-1) и инвариантен относительно преобразования A.

Доказательство. Из того, что для любого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{L}_{\mathbf{e}}$ $(\mathbf{e}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$,

$(A\mathbf{x}, \mathbf{e}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\mathbf{e}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = \mathbf{0}$ следует $A\mathbf{x} \in \boldsymbol{L}_{\mathbf{e}}$.

Теорема 4. Для любого самосопряженного преобразования A существует ортонормальный базис, в котором соответствующая матрица имеет диагональный вид.

Доказательство теоремы следует из многократного применения леммы 2 и того факта, что $\boldsymbol{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \lambda\mathbf{e}_{\mathrm{i}}$ для каждого вектора $\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}$ из инвариантного подпространства.

Слайд 1

Определение 2. Линейное преобразование A в n-мерном Евклидовом пространстве L называют ортогональным, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ верно

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{1}$$

Заметка. Если в (1) положить $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, то получим

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

т.е. ортогональное преобразование сохраняет длину вектора.

Пример 1. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Ортогональные операторы. Ортогональные матрицы

- Пусть $e_1, \dots, e_n$ - ортогональный базис в L. Тогда

$$(A\mathbf{e_i}, A\boldsymbol{e_k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \qquad (2)$$

Из (2) получается, что для матрицы A ортогонального преобразования верно

$$AA^T = A^T A = I. \qquad (3)$$

Из (3) получим:

$$\det(AA^T) = (\det(A))^2 = 1 \Longrightarrow \det A = \pm 1.$$

$$A^T = A^{-1}.$$

Линейная форма

Говорят, что в пространстве L задана линейная форма (линейный функционал), если каждому вектору x поставлено в соответствие число $f(x)$, так, что выполнены условия:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Если в n-мерном пространстве задан базис $e_1, \dots, e_n$, то для любого

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

$$f(x) = f(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \dots + \xi_n f(e_n).$$

В n-мерном пространстве с заданным базисом линейная функция может быть представлена в виде

$$f(x) = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n,$$

$a_i = f(e_i)$ – постоянные, зависящие лишь от выбора базиса.

Пример. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Тогда $f(x) = \det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 3 & 4 \\ x_3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

дает линейную форму.

Билинейная форма

- **Определение 4.** Говорят, что $A(x;y)$ есть билинейная функция (билинейная форма) от векторов x и y, если

1) при фиксированном y $A(x;y)$ есть линейная функция от x;

1) при фиксированном x $A(x;y)$ есть линейная функция от y.

Иными словами:

$A(x_1 + x_2; y) = A(x_1; y) + A(x_2; y)$;

$A(x; y_1 + y_2) = A(x; y_1) + A(x; y_2)$.

Пример 1. Рассмотрим n–мерное пространство L. Пусть $x, y \in L$. Тогда следующая форма будет билинейной.

$$\begin{aligned} A(x;\ y) = {} & a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\ & + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\eta_n, \end{aligned}$$

Определение 5. Билинейная форма называется симметрической, если для любых векторов $x, y \in L$ верно

$$A(x;y) = A(y;x).$$

В примере 1 выше билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда матрица $\boldsymbol{A}$ симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Слайд 1

- Теорема 4. Если в n-мерном пространстве L задан базис $e_1, \dots, e_n$, тогда след. утверждения эквивалентны для B: $L \times L \to R$:

1) B – билинейная форма;

2) для всех векторов $\text{x}, \text{y} \in L$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^T A y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Отметим, что $B\left(e_i, e_j\right) = a_{ij}$.

Пример. Следующая функция является билинейной формой:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 3 \end{pmatrix}$$

Билинейная форма

- При заданном базисе $e_1, \dots, e_n$ всякая билинейная форма $A(x; y)$ в n-мерном пространстве может быть записана в виде

$$A(x; y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \,,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – координаты векторов в данном базисе, а $a_{ik} = A(e_i, e_k)$.

$\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ – матрица билинейной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пример 1. Рассмотрим бил. форму при базисе

$e_1 = (1,1,1)$; $e_2 = (1, 1, -1), e_3 = (1, -1, -1)$

$$A(x; y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3.$$

Найдем $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ – матрицу билинейной формы в заданном базисе e_1, e_2, e_3.

$a_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 6;$

$a_{12} = a_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 0;$

$a_{13} = a_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -4;$

$a_{23} = a_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2;$

$a_{22} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6;$

$a_{33} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6.$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса

- Теорема 1. Если A и B две матрицы одной и той же билинейной формы **A(x,y)** соответственно в базисах $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$, то $B = C^T AC$, где C – матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$.

Пример 2. Рассмотрим бил. форму:

$\mathbf{A}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$.

В естественном базисе (каноническом) матрица выглядит так:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Введем новый базис: $e'_1 = (1, -2, 1)$; $e'_2 = (1, 1, -1), e'_3 = (1, -1, -1)$.
Очевидно, что матрица перехода от канонического базиса к новому имеет вид $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда в новом базисе $B = C^T A\, C =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 2 \\ -6 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

- Пример 3. Вычислим матрицу бил. форму из примера 2 «в ручную»

$$\mathbf{A}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Пусть исходный базис - канонический

$e_1' = (1,-2,1);\quad e_2' = (1,1,-1), e_3' = (1,-1,-1)$ - новый базис.

Найдем $A = (a_{ik})$ – матрицу билинейной формы в новом базисе.

$b_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot(-2) + 3\cdot 1\cdot 1 = 12;$

$b_{12} = a_{21} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) = -6;$

$b_{13} = a_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot(-1) = 2;$

$b_{23} = a_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 2;$

$b_{22} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6.$

$b_{33} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6.$

Действительно,

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 2 \\ -6 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Квадратичные формы

- Определение 4. Пусть $A(x;y)$ - симметричная билинейная форма. Тогда функцию $A(x;x)$ называют квадратичной формой.

Всякая квадратичная форма $A(x;x)$ при заданном базисе выражается формулой

$$A(x;x) = \sum_{i,k=1} a_{ik} x_i x_k,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$.

Определение 5. Квадратичная форма $A(x;x)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любого вектора $x \neq 0$ $A(x;x) > 0$ $(A(x;x) < 0)$.

В этом случае матрицу кв. формы также называют положительно определенной (отрицательно определенной),

Определение 6. Квадратичная форма $A(x;x)$ называется неотрицательно определенной (неположительно определенной), если для любого вектора $x \neq 0$ $A(x;x) \geq 0$ $(A(x;x) \leq 0)$.

В этом случае матрицу кв. формы также называют положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной),

Квадратичные формы

- **Пример 1.** $A(x;x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Очевидно, что эта форма всегда положительная.

Теорема 1. Пусть в n-мерном пространстве задана произвольная квадратичная форма $A(x;x)$. Тогда существует базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, в котором эта квадратичная форма имеет вид

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2,$$

где $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Начиная с некоторого номера все коэффициенты $\boldsymbol{\lambda_i}$ быть нулевыми.

Пример

- **Пример 2.** Квадратичной форме

$$A(x;x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

соответствует матрица (обратите внимание, как строится матрица) A с собств. значениями $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 6$; $\lambda_3 = 9$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для собт. знач. ортонормированные собст. вект. такие:

$$\begin{aligned} e'_1 &= (\ \ 2/3, \quad 2/3, \quad -1/3), \\ e'_2 &= (-1/3, \quad 2/3, \quad 2/3), \\ e'_3 &= (\ \ 2/3, \quad -1/3, \quad 2/3), \end{aligned}$$

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U^{\mathsf{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $U^T A U = \mathrm{Diag}(3,\ 6,\ 9) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$

Закон инерции для квадратичной формы

Говорят, что кв. форма в некотором базисе имеет **канонический вид,** если в этом базисе ее матрица диагональная:

$$Q(x;x)=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 .$$

Итак, пусть $Q(x,x)$ - канонический вид данной формы, где $m \le n$.

Пусть

i_+ – число положительных коэффициентов λ_i;

i_- – число отрицательных коэффициентов λ_i;

i_0 – число нулевых коэффициентов λ_i;

r – индекс кв. формы – сумма ненулевых коэффициентов (это же $i_+ + i_-$).

Определение 3. (Инерция квадратичной формы). Числа i_+, i_-, i_0 называют **инвариантами** или же **индексами** квадратичной формы. Тройку чисел $(i_+,\ i_-, i_0)$ называют **инерцией** квадратичной формы.

$i_+ - i_-$ называют сигнатурой квадратичной формы.

Критерий определенности кв. формы.

Теорема 2. (Критерий Сильвестра).

1. Кв. форма положительно определено тогда и только тогда, когда все ведущие главные миноры матрицы A положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0;$$

2. Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знак ведущих главных миноров чередуется:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Доказательство теоремы приведено в книге [Alesk_Piont].

Слайд 1

- **Теорема 3.** (Закон инерции квадратичной формы). Если квадратичная форма приведена двумя различными способами (в двух различных базисах) к сумме квадратов, тогда число положительных коэффициентов i_+ , так же как число отрицательных i_- , в обоих случаях одно и то же.

Теорема 2'. 1. Кв. форма неотрицательно определена тогда и только тогда, когда все ведущие главные миноры матрицы A неотрицательны:

$$\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0;$$

2. Квадратичная форма неположительно определена тогда и только тогда, когда знак ведущих главных миноров нечетного порядка неположительно, а все главные миноры четного порядка неотрицательны:

$\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0.$

Слайд 1

- **Некоторые выводы!**

В основе теории квадратичных форм лежит следующая интересная теорема о спектральном разложении эрмитовых (для вещественных матриц - симметричных) матриц.

Теорема 4. Матрица A эрмитова в том и только в том случае, когда существует унитарная матрица U и вещественная диагональная матрица D такие, что справедливо равенство $A = UDU^*$. Кроме того, для вещественных симметричных матриц A верно $A = PDP^T$, где P – ортогональная матрица, т.е. $PP^T = I$ (I − единичная матрица).

Диагональные элементы D – собственные значения матрицы A.

Слайд 1

Теорема 914. Пусть A – симметричная матрица. Тогда A является:

1) положительно определенной;
2) отрицательно определенной;
3) неотрицательно определенной (она же положительно полуопределенной);
4) неположительно определенной (она же отрицательно полуопределенной)

тогда и только тогда, когда соответственно выполняются

1)’ все ее собственные значения положительны;

2)’ все ее собственные значения отрицательны;

3)’ все ее собственные значения неотрицательны;

4)’ все ее собственные значения неположительны;

Пример

Пример. [Alesk_Piont]

Example 9.13. Find all values of α such that the quadratic form $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + 2\alpha x_1 x_3 - x_3^2$ is positive or negative definite.

First, we construct the matrix of the quadratic form by the same way as in Example 9.12. We obtain

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Next, let us calculate the principal minors: $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$ and $\Delta_3 = \det A = \ \ 2\alpha^2 - 1$. To check if A is positive definite we have to check the conditions $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ which are never hold simultaneously. Now, the matrix is negative definite if and only if three inequalities $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ hold. These equalities are equivalent to the condition $\alpha^2 < 1/2$. So, A is never positive definite and is negative definite for $\alpha^2 < 1/2$.

Домашняя задача

Alesk_Piont

14. (a) Construct the matrix of the bilinear form $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, 2\mathbf{y}) - 4x_1y_2$, where $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ and $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ are two vectors in $\mathbb{R}^2$, in the basis $\{\mathbf{u} = (0, -1), \mathbf{v} = (1, 2)\}$.
    (b) Find the correspondent quadratic form and construct its matrix in the same basis $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
15. Find the values of a, b and c such that the quadratic form $q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_1x_2 + bx_2^2 + cx_3^2$ is positive or negative definite.
16. Let E and E' be two bases in $\mathbb{R}^n$ and let C be the basis transformation matrix from E to E'. Suppose that A and A' be the matrices of the same quadratic form in these two bases. Show that

$$A' = C^T AC.$$

Демидович

4.180*. Вычислить A^m, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Домашняя задача

Демидович

Для данной матрицы A найти диагональную матрицу D и унитарную (ортогональную) матрицу U такие, что $A = UDU^{-1}$:

4.190. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

В пространстве $\mathbf{R}^n$ задана билинейная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B}'$, если:

4.205. $n = 4$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4$,

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

Домашняя задача

Демидович

Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

4.215. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3.$

4.216. $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$

Какие из этих кв. форм являются положит. или отриц. определенными

4.222. $9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3.$

4.223. $2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4.$

4.224. $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+8x_4^2+8x_2x_4.$

Домашняя задача

Лобанов_Бурмистрова

16. Найдите какой-нибудь новый базис e_1', e_2', e_3' в $\mathbb{R}^3$, относительно которого линейная форма $\varphi(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ будет иметь формулу $\varphi(x) = x_1'$.

15. Квадратичная форма $Q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$ задана в базисе e_1, e_2. Запишите эту квадратичную форму в базисе $e_1' = e_1 + 3e_2$, $e_2' = -e_1 - 2e_2$.

4. Проверьте, определяет ли формула $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ y_1 & x_2 & y_3 \end{pmatrix}$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ билинейную форму, и в случае положительного ответа найдите ее матрицу.

11. Найдите матрицу линейного функционала, который каждой строке чисел из $\mathbb{R}^3$ ставит в соответствие сумму этих чисел.

12. Могут ли формулы $(x_1^2 - 4x_2^2)$ и $(4x_1^2 + x_2^2)$ быть формулами одной и той же квадратичной формы для разных базисов?

Метод Лагранжа приведение квадратичной формы к канонической форме

- **Метод Лагранжа**. В некотором базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ Рассмотрим квадратичную форму

$$A(x,x) = x^T \boldsymbol{A} x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,. \qquad (1)$$

Согласно этому методу базисные векторы преобразовываются так, чтобы в формуле (1) пропадали произведение координат с различными индексами. Так как каждому преобразованию базиса отвечает определенное преобразование координат и обратно, то можно писать формулы преобразование координат.

1) Для проведения формы $A(x,x)$ к сумме квадратов нужно, чтобы хоть один из коэффициентов a_{kk} был отличен от нуля.

1-а) Пусть $A(x,x)$ не содержит не одного квадрата переменного. Тогда она содержит хотя бы одно произведение , например, $2a_{12}x_1x_2$. Заменим координаты x_1, x_2 по формулам

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1 - y_2$$

не изменяя остальных переменных. При этом преобразованный член

Метод Лагранжа

- $2a_{12}x_1x_2$ перейдет в $2a_{12}(y_1^2 - y_2^2)$. Теперь будем считать, что уже в формуле (1) $a_{11} \neq 0$. Далее, выделим в квадратичной форме члены, содержащие x_1

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата, т.е. запишем ее в виде

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 \ldots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - B. \qquad (2)$$

После подстановки выражения (2) в (1) наша квадратичная формы

примет вид

$$A(x,x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \cdots,$$

где не выписанные члены содержат только переменную $x_2, \ldots, x_n$, т.е. другая квадратичная форма, не содержащая x_1.

2) Положим

$$\begin{cases} y_1 = \left(x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) \\ y_2 = x_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = x_n. \end{cases}$$

Метод Лагранжа

- Тогда квадратичная форма примет вид

$$A(x,x) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}y_iy_j\,. \qquad (3)$$

Выражение $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}y_iy_j$ аналогично правой части формулы (1), с той только разницей, что оно не содержит первой координаты.

Предположим, что $a_{22} \neq 0$. Если это не так, то этого можно добиться простым преобразованием (см. пункт 1-а)). Тогда можно произвести новое, аналогичное первому, переменных по формулам

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = a'_{22}\left(y_2 + \cdots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}y_n\right) \\ z_3 = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = y_n. \end{cases}$$

В новых переменных форма примет вид

$$A(x,x) = a_{11}z_1^2 + a'_{22}z_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} a_{ij}z_iz_j\,. \qquad (4)$$

Метод Лагранжа

- Продолжая этот процесс, после конечного числа шагов придем к переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, в которых форма примет вид

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \cdots + \lambda_m \xi_m^2.$$

причем $m \leq n$.

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

- **Пример 1. (по методу Лагранжа).** Привести квадратичную форму к каноническому виду.

$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2.$

1) В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей.

2) По переменной x_1 выделяем полный квадрат:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Получим $q = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$

Проводим замену $y_1 = x_1 + x_2 - x_3;$ $y_2 = x_3$; $y_3 = x_2$ и получаем

$q(y) = y_1^2 + y_2y_3.$

3) В квадратичной форме y_2y_3 (Да! Она - тоже квадратичная форма) нет «ведущих переменных». Поэтому проводим замену

$y_1 = z_1;$ $y_2 = z_2 - z_3;$ $y_3 = z_2 + z_3$ получаем

новую квадратичную форму:

$$q'(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + (z_2 - z_3)(z_2 + z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Квадратичные формы

Пример 2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов.

Пусть в трехмерном пространстве с некоторым базисом f_1, f_2, f_3 задана

$$q = A(x,x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2.$$

Положим

$$\eta_1 = x_2; \quad \eta_2 = x_1; \quad \eta_3 = x_3.$$

Тогда получим:

$$q = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 = -(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2.$$

Далее положив

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = x_3$$

мы получим новое выражение

$$A(x,x) = -y_1^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2.$$

Наконец, преобразованием $y_2^2 + 4y_2y_3 = (y_2 + 2y_2)^2 - 4y_3^2$ и заменой

$$z_1 = y_1; \quad z_2 = y_2 + 2y_3; \quad z_3 = y_3$$

дают квадратичную форму в полном квадрате:

$$A(x,x) = -z_1^2 + z_2^2 - 12z_3^2.$$

Метод Лагранжа

- **Еще один** **Пример 3**. Квадратичную форму

$$q(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

привести к каноническому виду

Проводим замену $y_1 = x_3$; $y_2 = x_2$; $y_3 = x_1$ и получаем

$$q = y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2y_3. \qquad (1)$$

Выполняем преобразование $y_1^2 + 2y_1y_2 = (y_1 + y_2)^2 - y_2^2$ и из (1) получаем $q = (y_1 + y_2)^2 - y_2^2 + 2y_2y_3$.

После следующей замены

$$z_1 = y_1 + y_2; \quad z_2 = y_2; \quad z_3 = y_3$$

имеем:

$$q = z_1^2 - z_2^2 + 2z_2z_3.$$

Выполняем преобразование $z_2^2 - 2z_2z_3 = (z_2 - z_3)^2 - z_3^2$ и получаем $q = z_1^2 - (z_2 - z_3)^2 + z_3^2$.

После замены $t_1 = z_1$; $t_2 = (z_2 - z_3)$; $t = z_3$

имеем

$$q = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2.$$