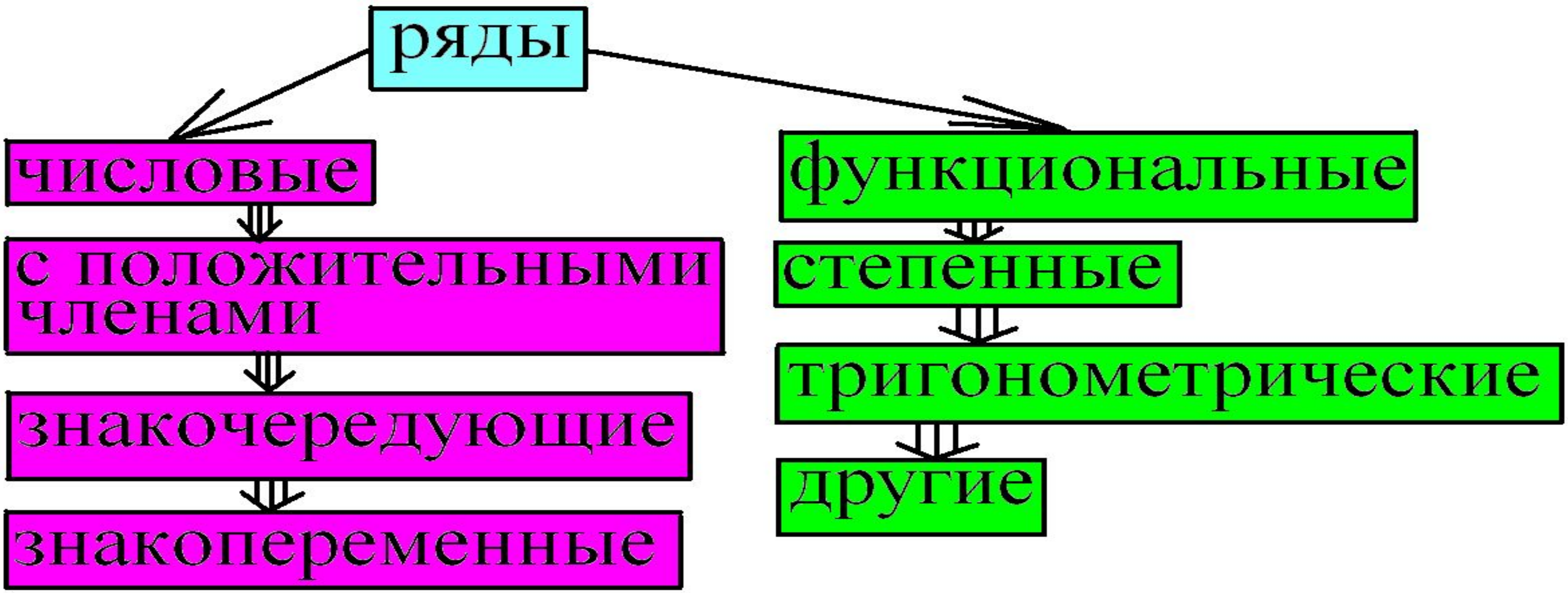
РЯДЫ

Новая математическая конструкция: сложение бесконечного числа слагаемых. Использует идею предела.

Много приложений, т.к. можно решить почти любую математическую задачу.



ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Из бесконечной последовательности чисел – членов ряда

$$u_1, u_2, ..., u_n, ...$$

Строится новая последовательность: **частичных сумм** ряда

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 \ ; \\
&S_2 = u_1 + u_2 \ ; \\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \ ; \\
&\cdots \\
&S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \ ; \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Определение. Если существует конечный предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то он называется суммой бесконечного числового ряда

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

и в этом случае говорят, что ряд **сходится.**

Определение. Если у частичных сумм предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

расходится.

Пример 1. Геометрическая прогрессия с

$$u_1 = a\ ,\ \ u_2 = qu_1 = aq\ ,\ \ u_3 = qu_2 = aq^2\ , \ldots,\ \ u_n = qu_{n-1} = aq^{n-1}$$

Сумма бесконечного числа членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

$$\begin{array}{lrl} & S_n & = \ a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^{n-1} \\ - & & \\ & qS_n & = \ aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \\ \hline \end{array}$$

$$(1-q)S_n \ = \ a - aq^n$$

Если $q \neq 1$, то

$$S_n = a\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\ ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{(1-\lim_{n\to\infty} q^n)}{(1-q)}$$

Если $|q| < 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **сходится**

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{(1-\lim_{n\to\infty} q^n)}{(1-q)} = a\frac{(1-0)}{(1-q)} = \frac{a}{1-q}$$

Если $|q| > 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **расходится**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Самостоятельно случай $q = \pm 1$.

Пример 2. Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ ; \quad u_n=\frac{1}{n}$$

расходится, т.к. у него

$$S_n \approx \ln n\ ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n=\infty$$

Простейшие свойства числовых рядов

1. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не изменяет характер сходимости: расходящийся ряд остается расходящимся, сходящийся – сходящимся, но сумма сходящегося ряда при этом меняется.

2. Необходимый признак сходимости рядов. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, то его общее слагаемое стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Обратное неверно: есть ряды, у которых $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, но они расходятся.

Например, **гармонический ряд расходится,** хотя

$$u_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Доказательство необходимого признака: $S_n = S_{n-1} + u_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + u_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \implies \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

3. (Следствие 2.) Если общее слагаемое ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

4. Сходящийся ряд можно почленно умножать на число:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot u_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad k \neq 0$$

5. Сходящиеся ряды можно почленно складывать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; ; \quad u_n > 0$$

Признаки сравнения

1. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \; ; \quad u_n > v_n > 0$$

т.е. первый ряд "больше" второго:
первый ряд **мажорирует** второй ряд.
Тогда:
если "больший" ряд сходится, то и "меньший" сходится;
если "меньший" ряд расходится, то и "больший" расходится.

Доказательство расходимости гармонического ряда.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots$$

данный гармонический ряд "больше" такого ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Последний ряд расходится, т.к. у него $u_n=\frac{1}{2}\not\to 0$.

2. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad u_n > 0 \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ , \quad v_n > 0$$

и пусть существует конечный, не равный нулю предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Для применения этого признака используют **эталонные** ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ , \quad p = \mathrm{const} > 0$$

При $0 < p \leq 1$ эталонные ряды **расходятся**.

При $p > 1$ эталонные ряды **сходятся**.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

В общем члене ряда оставляем только старшие слагаемые

$$\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n^2+1} : \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{(n^2+1)\cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$$

Следовательно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ведут себя одинаково, но второй ряд – гармонический, он расходится. Следовательно, исходный ряд тоже расходится.

Доказательство второго признака сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N : \quad \forall n > N$$

$$A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon$$

Пусть ряд, стоящий в числителе, расходится. Тогда

$$\frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon \implies u_n < (A+\varepsilon)v_n$$

"Меньший" ряд расходится,
поэтому "больший" ряд тоже расходится.

Самостоятельно доказать остальные случаи!!!

Признак Даламбера

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

"последующий делить на предыдущий"

$\ell < 1 \Rightarrow$ ряд сходится;

$\ell > 1 \Rightarrow$ ряд расходится;

$\ell = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера ответа не дает.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}\ , \quad u_n = \frac{n^4}{2^n}\ , \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} : \frac{n^4}{2^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}{2} = \frac{1}{2} < 1\ , \quad \text{ряд сходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}\ , \quad u_n = \frac{3^n}{n^3}\ , \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} : \frac{3^n}{n^3} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = 3 > 1\ , \quad \text{ряд расходится}$$

Пример 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ гармонический ряд – расходится

$$u_n=\frac{1}{n},\ \ u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\,;$$

ряд расходится, при этом $\ell=1$

Пример 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

эталонный ряд с $p = 2 > 1$ – ряд сходится

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \; u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2}\right] =$$

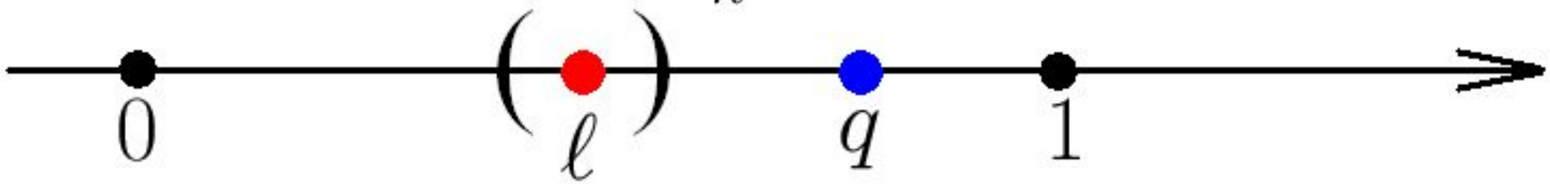
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

ряд сходится, при этом $\ell = 1$

Доказательство. Случай $\ell < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon \ \exists N: \quad \forall n > N$$

$$0 < \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = q < 1$$



$$u_{N+1} < u_N \cdot q; \quad u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q < u_N \cdot q^2;$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q < u_N \cdot q^3; \dots \quad u_{N+m} < u_N \cdot q^m$$

$v_m = u_N \cdot q^m$ – сходящаяся геометр. прогрессия, т.к. $0 < q < 1$ и "больший" ряд из v_m сходится, поэтому "хвост" исходного сходится, т.е. и весь исходный сходится

Случай $\ell > 1$:

$$1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \Longrightarrow u_{n+1} > u_n \Longrightarrow u_{n+1} \nearrow \Longrightarrow u_{n+1} \not\to 0$$

ряд расходится.

Интегральный признак

Теорема. *Если* $y = f(x)$ *есть неотрицательная, монотонно убывающая функция*

$$y = f(x) > 0; \quad x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) < f(x_1),$$

такая, что

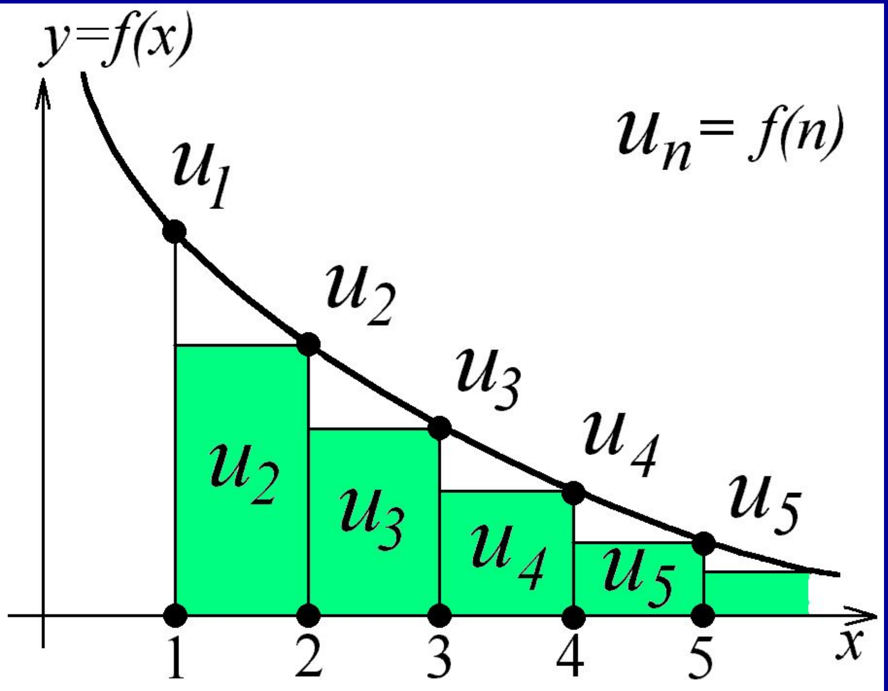
$$f(n) = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

то одновременно либо сходятся, либо расходятся

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

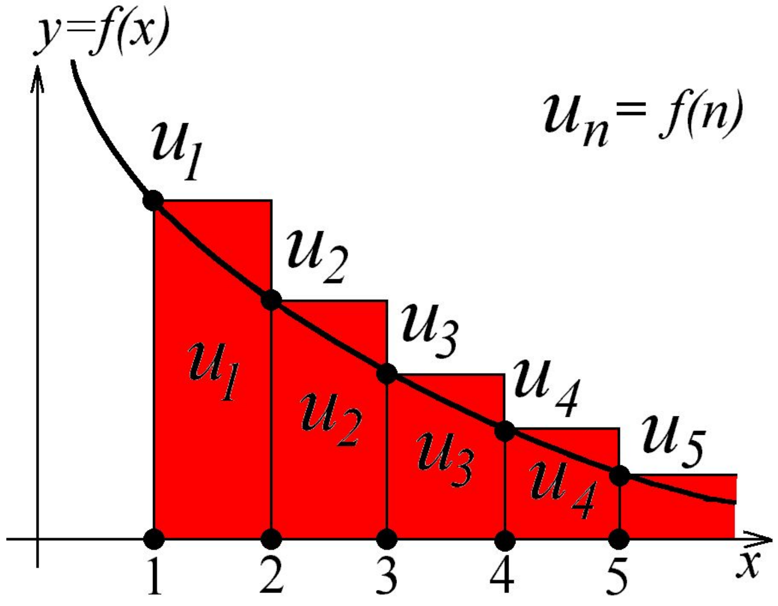
несобственный интеграл и ряд.

Доказательство. Пусть интеграл сходится, т.е. площадь криволинейной трапеции конечна. А она больше площади "зеленых" прямоугольников:



$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx > u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

Пусть интеграл расходится, т.е. площадь криволинейной трапеции бесконечна. А она меньше площади "красных" прямоугольников:



$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots > \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$$

Поэтому сходимость эталонных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\quad p = \text{const} > 0$

такая же, как у эталонных интегралов

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{при} \quad 0 < p \le 1 : \quad \text{расходимость} \\ \text{при} \quad p > 1 : \quad \text{сходимость} \end{array}}$$

Знакочередующиеся ряды

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \ , \quad u_n > 0$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \ , \quad u_n > 0$$

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

Если u_n — слагаемые знакочередующегося ряда — монотонно стремятся к нулю, т.е.

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > ... \ ; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ ;$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Замечание. Для рядов с положительными слагаемыми условие

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

еще не гарантирует сходимости ряда, т.е.
для рядов с положительными слагаемыми это **необходимое** условие, но **не достаточное**.

Доказательство признака Лейбница.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n} =$$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Из-за монотонности u_n каждая скобка положительна:

$$(u_1 - u_2) > 0 \ , \quad (u_3 - u_4) > 0 \ , \quad ..., \ (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0,$$

поэтому $S_{2n} \nearrow$ – возрастает.

С другой стороны:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

т.е. S_{2n} — ограничена.

По "лемме о двух милиционерах":

$$\exists \lim_{n \to \infty} S_{2n} = S < +\infty$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$$

Признак Лейбница доказан.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}\ , \quad \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Если в сходящемся знакочередующемся ряду отбросить "хвост" ряда, то оставшаяся конечная сумма отличается от точной суммы бесконечного ряда не более чем на модуль первого отброшенного члена ряда.

Знакопеременные ряды

Самый общий случай числовых рядов.

Теорема. *Если сходится ряд, составленный из модулей*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ...$$

то сходится исходный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

В этом случае исходный ряд называют **абсолютно сходящимся.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p} \text{ при } p = \text{const} > 1 \text{ абсолютно сходится.}$$

Если $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ — сходится,

а $|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ...$ — расходится,

то исходный ряд называют **условно сходящимся.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ — условно сходится.

Свойство условно сходящихся рядов. *Если ряд сходится условно, то для любого числа A (в т.ч. равного $\pm\infty$) можно переставить слагаемые ряда так, чтобы новый ряд сходился и его сумма совпадала бы с A.*

В условно сходящихся рядах переставлять слагаемые нельзя,

в абсолютно сходящихся — можно.

Степенные ряды

Самые простые из функциональных рядов:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a_n — заданные числа, **коэффициенты ряда**;
x — независимая переменная, $x \in \mathrm{R}$.
Если $x = x_1$, $u_n = a_n x_1^n$ — число, тогда получается числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Теорема Абеля. *Если при каком-то $x_1 \neq 0$ степенной ряд сходится, то он абсолютно сходится при всех x таких, что*

$$|x| < |x_1| \ , \quad \text{т.е. при} \quad -|x_1| < x < +|x_1| \ .$$

Замечание. При $x = 0$ любой степенной ряд сходится:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \Bigg|_{x=0} = a_0 \ .$$

Доказательство теоремы Абеля.

Пусть при x_1 ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \ — \text{сходится} \ .$$

Тогда $a_n x_1^n \to 0$, поэтому $\exists M$, что $|a_n x_1^n| < M$.

Рассмотрим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_1^n|\frac{|x|^n}{|x_1|^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

и сравним его с рядом

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$, где $q = \left|\frac{x}{x_1}\right|$, $0 < q < 1, \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, $|x| < |x_1|$

который сходится.

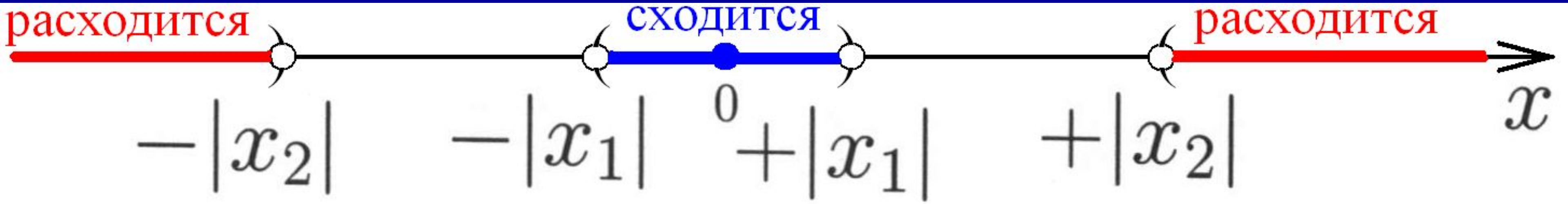
Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ **мажорирует** ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$,

который (как "меньший" ряд) сходится. А по свойству абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — сходится.

Теорема Абеля доказана.

1-ое следствие теоремы Абеля. *Если при каком-то* $x_2 \neq 0$ *степенной ряд расходится, то он расходится при всех* x *таких, что*

$$|x| > |x_2| \;, \quad \text{т.е. при} \quad x < -|x_2| \;, \quad +|x_2| < x \;.$$



2-ое следствие теоремы Абеля. *Для любого степенного ряда существует R — радиус сходимости ряда:*

1) если $R = 0$, то степенной ряд расходится при всех $x \neq 0$;

2) если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. при $-\infty < x < +\infty$;

3) если $0 < R < +\infty$, т.е. R конечное, отличное от нуля число, то

- *степенной ряд абсолютно сходится при всех $x: \ |x| < R$, т.е. при $-R < x < +R$;*
- *степенной ряд расходится при всех $x: \ |x| > R$, т.е. при $x < -R$ и при $+R < x$;*
- *при $x = \pm R$ сходимость степенного ряда надо исследовать отдельно.*

Множество $x \ : \ -R < x < +R$ **интервал сходимости степенного ряда**.

Нахождение R с помощью признака Даламбера

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

$$u_n = |a_n| \cdot |x|^n \ , \quad u_{n+1} = |a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =$$

$$= |x| \cdot L = \ell$$

- при $\ell = |x| \cdot L < 1$, т.е. при $|x| < \dfrac{1}{L} = R$ — ряд сходится;
- при $\ell = |x| \cdot L > 1$, т.е. при $|x| > \dfrac{1}{L} = R$ — ряд расходится;
- при $\ell = |x| \cdot L = 1$, т.е. при $|x| = \dfrac{1}{L} = R$ — ответа пока нет.

Примеры.

1) $$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \quad a_n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty} 1 = |x| = \ell$$

$R = 1$, т.к. при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится.

Этот ряд – сумма членов геометрической прогрессии с

$$a = 1,\ q = x.$$

При $x = \pm 1$ – расходится.

$$2)\quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot|x|^n} = |x|\cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x| = \ell$$

$R = 1$; при $x = +1$ ряд расходится (гармонический);

при $x = -1$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$$3)\quad 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot|x|^n} = |x|\cdot \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2}{(n+1)^2}\right] = |x| = \ell$$

$R = 1$; при $x = \pm 1$ ряд сходится — эталонный с $p = 2$

4)
$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\quad a_n=\frac{1}{n!}\ ;\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}\right]=|x|\cdot 0=0<1$$

$R=+\infty$; при всех x ряд сходится.

5) $$1+x+2x^2+6x^3+\ldots+n!x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n\ ,\quad a_n=n!$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!(n+1)}{n!}\right]=\infty\ ,\quad \text{если } x\neq 0$$

$R=0$; при всех $x\neq 0$ ряд расходится.