Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды Лекция 11.09.2020

§ Понятие числового ряда

Опр. Пусть задана некоторая числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (*)$$

называется числовым рядом, при этом число a_n называется n-ым (общим) членом ряда, а сумма $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется n-ой частичной суммой ряда.

Бесконечной сумме $(*)$ можно придать формальный смысл.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (конечное число), то ряд $(*)$ называется сходящимся, а число S называется его суммой. Этот факт записывается так $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$), то ряд $(*)$ называется расходящимся и записывается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ (+\infty \text{ или } -\infty)$$

Если же частичные суммы не имеют предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд также называется расходящимся и ему не приписывают никакой суммы.

Примеры $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+q+q^2+\dots+q^n+\dots$

$a_n = q^n$ – общий член

Известно, что $S_{n+1} = 1+q+q^2+\dots+q^n = \left\{\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1\right.$

Рассмотрим случаи

1) $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ при $|q|<1$

2) при $q>1$, Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$ при $q>1$

3) при $q<-1$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \infty$ (символ ∞ нельзя заменить ни на $+\infty$, ни на $-\infty$)

4) если $q=1$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$

5) если $q=-1$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\dots$

Поэтому $S_0=1, S_1=0, S_3=1, S_4=0, \dots$ и эта последовательность не имеет предела и этот ряд расходится и ему нельзя приписать никакой суммы.

Итак $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ при $|q|<1$ сходится
при $|q|\geq 1$ расходится.

§ Свойства сходящихся рядов

Теорема Для $\forall$ двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0} b_n$ суммы которых равны A и B соответственно: $\sum\limits_{n=\phi} a_n = A$, $\sum\limits_{n=\phi}^{+\infty} b_n = B$

а) ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится, причём

$$\sum_{n=\phi}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$$

б) для $\forall$ числа C ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Ca_n$ сходящийся, причём

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Ca_n = cA.$$

Доказательство а) $S_n^{(a\pm b)} = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = S_n^{a} \pm S_n^{b} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{a\pm b} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{a} \pm \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{b} = A \pm B$

б) $S_n^{Ca} = \sum\limits_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = cS_n^{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{ca} = C\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{a} = CA.$ #

В сходящемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ можно (не меняя порядок слагаемых) расставить скобки. При этом сумма ряда не изменится.

Теорема Пусть ряд $\sum\limits_{n=1} a_n$ сходится к S, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Тогда для $\forall$ строго возрастающей последовательности $\{K_p\}_1^{\infty}$ целых неотрицательных чисел $0 = K_0 < K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_p < \dots$ числовой ряд $\sum b_p$ общий член которого равен сумме $b_p = a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}$,

$p = 1, 2, \dots$ является сходящимся, причём $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$.

<u>Доказательство</u> Пусть S_n^a — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а S_m^b — частичная сумма ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$

Тогда для всех натуральных p частичная сумма $S_p^b = b_1 + b_2 + \dots + b_p = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) +$

$+ (a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}) + \dots + (a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}) =$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p} = S_{k_p}^a$. Так как $S_{k_p}^a \to S$ при $p \to \infty$,

то $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$ #

<u>Замечание</u> В расходящемся ряде расстановка скобок недопустимо, так как это может привести к неверным выводам.

В самом деле рассмотрим ряд

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S = (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

С другой стороны

$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 + \dots = 1$

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \Rightarrow$

или $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$

$2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$

§ Связь рядов и последовательностей.

Всякий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ порождает числовую последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Справедливо обратное</u>: Для $\forall$ числовой последовательности $\{U_n\}$ можно построить числовой ряд, частичными суммами которого будут $\{U_n\}$. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_1 = U_1$, $a_n = U_n - U_{n-1}$

Тогда $S_1 = a_1 = U_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = U_1 + (U_2 - U_1) = U_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = U_1 + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) = U_3, \ldots$,

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = U_1 + (U_2 - U_1) + \cdots + (U_n - U_{n-1}) = U_n$, то есть $S_n = U_n$, $n = 1, 2, \ldots$

<u>Теорема</u> (Критерий Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n, m,\ m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

<u>Доказательство</u> следует из теоремы для последовательностей. #

<u>Теорема</u> (необходимый признак). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

<u>Док-во</u>. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

Тогда $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Тогда $\lim a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ #

Обратное неверно.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Для этого воспользуемся отрицанием критерия Коши.

$\exists\,\varepsilon>0:\ \forall N_0>0\ \exists\, n, m,\ n>m>N_0:\ \left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|\geq\varepsilon$

Возьмём $\exists\ \varepsilon=\frac{1}{2}>0\ \forall N_0>0\ \exists\, n=N_0+1,\ m=2n=$
$=2(N_0+1)$ Тогда $\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=$
$=\frac{1}{2}=\varepsilon$. что и доказывает расходимость ряда #

§ Знакоположительные числовые ряды

Будем рассматривать ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\geq 0$, $\forall n$.
Можно считать, что $a_n\geq 0$ начиная с некоторого n_0, то есть $a_n\geq 0$ для $\forall n\geq n_0$.

Теорема Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится $\Longleftrightarrow$ когда $\{S_n\}$ ограничена сверху. При этом $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sup\{S_n\}$

Док-во $S_{n+1}=a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}=S_n+a_{n+1}$
$\Longrightarrow\{S_n\}$ монотонно возрастает. Для таких последовательностей критерием сходимости является ограниченность сверху.

При этом предел последовательности равен точной верхней грани $\sup\{S_n\} = S$ #

Замечание Для знакопеременных рядов ограниченность частичных сумм $\{S_n\}$ не эквивалентна сходимости.

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

§ Признак сравнения. Интегральный признак

Теорема. Пусть $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$

Тогда справедливы утверждения

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Док-во) Так как отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость, то будем считать, что $0 \leq a_n \leq b_n$ для $\forall n \in N$

Обозначим $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ Тогда $A_n \leq B_n$ (*) для $\forall n \in N$.

1) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда по критерию сходимости знакоположительного ряда следует, что $\{B_n\}$ ограничена сверху. Но тогда из (*) следует, что $\{A_n\}$ ограничена сверху и тогда по критерию сходимости знакоположительного ряда

следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. Докажем это „от противного":

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, но тогда по доказанному 1-ому пункту следует, что и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, что противоречит условию #

Следствие (Признак сравнения в предельной форме) Пусть $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0; +\infty)$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Док-во| Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K > 0$

то для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$: что для $\forall n > n_0 \Longrightarrow$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon, \text{ то есть}$$

$$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon.$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0$, тогда $\exists n_0$: для $\forall n > n_0 \Longrightarrow$

$$\frac{K}{2} b_n < a_n < \frac{3K}{2} b_n \quad (***)$$

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3K}{2} b_n\right)$ также сходится и из 2-ого неравенства (***) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда из 1-ого неравенства (***) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}b_n\right)$ также сходится, а тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится.

3) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}b_n\right)$ также расходится, а тогда из 1-ого неравенства (***) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

4) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Тогда из 2-ого неравенства (***) $\Longrightarrow$ что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3k}{2}b_n\right)$ расходится, а тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. #.

<u>Теорема (Интегральный признак Коши-Маклорена)</u> Если при $x \geq 1$ функция $f(x) \geq 0$ и не возрастает, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Док-во</u> По условию

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), \quad x \in [k; k+1], \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегрируя это двойное неравенство по $x \in [k; k+1]$ и используя очевидное равенство $\int_k^{k+1} dx = 1$, получим

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Суммируя это двойное неравенство по k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1). \quad \text{или}$$

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq S_{n+1} - f(1) \quad (*)$$

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Следовательно, согласно критерию сходимости знакоположительного ряда следует, что S_n ограничены сверху. Поэтому из 1-ого неравенства $(*)$ следует, что последовательность $\left\{\int_1^{n+1} f(x)dx\right\}$ ограничена сверху. По условию $f(x) \geq 0$. Следовательно, неубывающая функция $F(T) = \int_1^T f(x)dx$ ограничена сверху и поэтому $\exists \lim_{T\to\infty} F(T)$, то есть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то согласно критерию сходимости знакоположительного ряда следует, что $\{S_n\}$ а значит и $\{S_{n+1}\}$ и $\{S_{n+1} - f(1)\}$ не ограничены сверху. Поэтому из 2-ого неравенства $(*)$ следует, что последо-

вательность $\left\{\int_1^{n+1} f(x)dx\right\}$ также не ограничена сверху, то есть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

3) Если же интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то используя неравенство (*) неотрицательность и монотонность $f(x)$ и критерий сходимости знакоположительного ряда, получим, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится (расходится) #.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ (**)

Общий член $a_n = \frac{1}{n^p}$, при $p=1$ гармонический.

1) Пусть $p \le 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$ (он равен 1 при $p=0$, а при $p<0$ он равен $+\infty$). Поэтому ряд (**) расходится по необходимому признаку.

2) при $p>0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$. При $p>0$ выполнены все условия интегрального признака сходимости. А интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ как известно сходится при $p>1$ и расходится при $p \le 1$.

Итак ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$

и расходится при $p \le 1$.

Пример $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$, $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^p n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

для $\forall p$

1) Пусть $p \le 0$ Тогда $a_n \ge \frac{1}{n}$ при $n \ge 3$ и

тогда ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ расходится при $p \le 0$

2) Пусть $p>0$. Тогда функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$

удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши-Маклорена.

Так как $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ сходится при $p>1$

и расходится при $p \le 1$

Итак ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ сходится при $p>1$

расходится при $p \le 1$

§ Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.

Теорема (Даламбера) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (где $a_n > 0$

для $\forall n \in \mathbb{N}$) справедливы утверждения:

1) Если $\exists\, q \in (0;1)$ и $\exists\, n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, для $\forall n \ge n_0$

То ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) Если $\exists\, n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ для $\forall n \ge n_0$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.