

Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды лекция 11.09.2020

Ряды Понятие числового ряда

Опр. Пусть задана некоторая числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (*)$$

называется числовым рядом, при этом число a_n называется n -ым (обычно) членом ряда, а сумма $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется n -ой частичной суммой ряда. Бесконечной сумме $(*)$ можно придать формальный смысл.

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (конечное число),

то ряд $(*)$ называется сходящимся, а число S называется его суммой. Этот факт записывается так $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$), то ряд $(*)$ называется расходящимся и записывается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad (+\infty \text{ или } -\infty)$$

Если же частичные суммы не имеют предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд также называется расходящимся и ему

-2-

не приписывают никакой суммы.

Примеры $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$a_n = q^n$ — общий член

Известно, что $S_{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \end{cases}$

Рассмотрим случаи

1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ при $|q| < 1$

2) при $q > 1$, Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$ при $q > 1$

3) при $q < -1$ Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \infty \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \infty$ (символ ∞ через зачеркнуть или
на $+\infty$, или на $-\infty$)

4) если $q = 1$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$

5) если $q = -1$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Потому $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$ и

эта последовательность не имеет предела.

и этот ряд расходится и ему через

приписав никакой суммы.

Итак $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится

при $|q| \geq 1$ расходится.

§ Свойства сходящихся рядов

Теорема Две \forall две сходящихся ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ сумма которых равны A и B соответственно - верно: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$

а) ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится, причем $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

б) для \forall числа C ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} C a_n$ сходится, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} C a_n = CA$.

Доказательство а) $S_n^{(a \pm b)} = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k = S_n^a \pm S_n^b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a \pm b)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = A \pm B$

б) $S_n^{Ca} = \sum_{k=1}^n C a_k = C \sum_{k=1}^n a_k = C S_n^a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{Ca} = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a = CA$ #

В сходящемся ряде $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ можно (не меняя порядка слагаемых) расставить скобки. При этом сумма ряда не изменится.

Теорема Тейлор ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится к S , т.е. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$.

Тогда для \forall строго возрастающей последовательности $\{k_r\}_1^{\infty}$ целых неотрицательных чисел $0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r < \dots$ числовой ряд $\sum b_r$ суммой которого

-4-

равен сумме $b_p = a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}$,
 $p = 1, 2, \dots$ является сходящимся, причем

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p = S.$$

Доказательство Пусть S_n^a — частичная сумма

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а S_m^b — частичная сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$

Тогда для всех натуральных p частичная сумма $S_p^b = b_1 + b_2 + \dots + b_p = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) +$

$$+ (a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}) + \dots + (a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}) =$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p} = S_{k_p}^a. \text{ Так как } S_{k_p}^a \rightarrow S \text{ при } p \rightarrow \infty,$$

$$\text{то } \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S \quad \#$$

Замечание В расходящемся ряде расстановка скобок недопустима, так как это может привести к неверным выводам.

В самом деле рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S = (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

С другой стороны

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 + \dots = 1$$

$$\text{или } S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \Rightarrow$$

$$2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Ряды через рядов и последовательностей.

Всякий числовой ряд $\sum a_n$ порождает числовую последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

Справедливо обратное: Для \forall числовой последовательности $\{U_n\}$ можно построить числовой ряд, частичными суммами которого будут $\{U_n\}$. Действительно,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_1 = U_1$, $a_n = U_n - U_{n-1}$

Тогда $S_1 = a_1 = U_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = U_1 + (U_2 - U_1) = U_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = U_1 + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) = U_3, \dots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1}) = U_n$, то есть $S_n = U_n$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема (Критерий Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \implies \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m, m > n > N(\varepsilon) \implies \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Доказательство следует из Теоремы для последовательностей. #

Теорема (необходимый признак). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Док-во. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ #

-6-

Обратное неверно.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Для этого воспользуемся отрицательным
критерием Коши.

$\exists \varepsilon > 0: \forall N_0 > 0 \exists n, m, n < m < N_0: \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \geq \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \forall N_0 > 0 \exists n = N_0 + 1, m = 2n =$
 $= 2(N_0 + 1)$ Тогда $\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} =$

$= \frac{1}{2} = \varepsilon$. Это и доказывает расходимость
ряда #

§ Знакоположительные числовые ряды

Будем рассматривать ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0, \forall n$.
Можно считать, что $a_n \geq 0$ начиная с
какого-то N_0 , то есть $a_n \geq 0$ для $\forall n \geq N_0$.

Теорема Знакоположительный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \iff когда $\{S_n\}$ ограни-
чена сверху. При этом $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{S_n\}$

Док-во $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$\implies \{S_n\}$ монотонно возрастает. Для
таких последовательностей критерием
сходимости является ограниченность сверху.

При этом предел последовательности равен
только верхней грани $\sup\{S_n\} = S \neq$

Замечание Для знакопеременных рядов
ограниченность частичных сумм $\{S_n\}$ не
эквивалентна сходимости.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

§ Признак сравнения. Интегральный признак

Теорема. Пусть $\exists n_0: \forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$

Тогда справедливы утверждения

- 1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
- 2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Док-во Так как отбрасывание конечного
числа слагаемых не влияет на сходимость,
то будем считать, что $0 \leq a_n \leq b_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$

Обозначим $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ Тогда $A_n \leq B_n$ (*)

для $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда по кри-

терию сходимости знакоположительного
ряда следует, что $\{B_n\}$ ограничена сверху
по тогда из (*) следует, что $\{A_n\}$ ограни-
чена сверху и тогда по критерию схи-
мости знакоположительного ряда

- 8 -

Следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. Докажем это, от противного?
Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, но тогда по доказанному 1-ому пункту следует, что и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, что противоречит условию #

Следствие (Критерий сравнения в предельной форме) Пусть $a_n \geq 0, b_n > 0$ и

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0; +\infty)$. Тогда ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство Так как $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$

то для $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$: что для $\forall n > n_0 \Rightarrow$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon, \text{ то есть}$$

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$, тогда $\exists n_0$: что для $\forall n > n_0 \Rightarrow$

$$\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n \quad (***)$$

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2} b_n\right)$ также сходится и из 2-ого неравенства (***) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда из 1-ого неравенства ~~***~~ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{k}{2} b_n)$ также сходится, а тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится.

3) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{k}{2} b_n)$ также расходится, а тогда из 1-ого неравенства ~~***~~ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

4) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Тогда из 2-ого неравенства ~~***~~ \implies что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3k}{2} b_n)$ расходится, а тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. #.

Теорема (Интегральный признак Коши-Маклорена) Если при $x \geq 1$ функция $f(x) \geq 0$ и не возрастает, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Док-во По условию

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), \quad x \in [k; k+1], \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Интегрируя это двойное неравенство по $x \in [k; k+1]$ и используя очевидное равенство $\int_k^{k+1} dx = 1$,

$$\text{получим } f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), \quad k=1, 2, 3, \dots$$

-10-

Суммируя это двойное неравенство по k от 1 до n , получим

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1). \quad \text{или}$$

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq S_{n+1} - f(1) \quad (*)$$

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Следовательно, согласно критерию сходимости знакоположительного ряда следует, что S_n ограничена сверху. Поэтому из 1-ого неравенства $(*)$ следует, что последовательность $\left\{ \int_1^{n+1} f(x) dx \right\}$ ограничена сверху. По условию $f(x) \geq 0$. Следовательно, непрерывная функция $F(T) = \int_1^T f(x) dx$ ограничена сверху и поэтому $\exists \lim_{T \rightarrow \infty} F(T)$, то есть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то согласно критерию сходимости знакоположительного ряда следует, что $\{S_n\}$ а также и $\{S_{n+1}\}$ и $\{S_{n+1} - f(1)\}$ не ограничена сверху. Поэтому из 2-ого неравенства $(*)$ следует, что последо-

важность $\int_{-11}^{+11} f(x) dx$ Также не ограничена сверху, то есть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расхо́дится.

3) Если же интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится (расхо́дится), то используя неравенство \otimes неотрицательности и монотонности $f(x)$ и критерий сходимости знакоположительного ряда, найдем, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится (расхо́дится) $\#$.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ $\otimes\otimes$

Общий член $a_n = \frac{1}{n^p}$, при $p=1$, гармонический.

1) Пусть $p \leq 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ (он равен 1 при $p=0$, а при $p < 0$ он равен $+\infty$).

Поэтому ряд $\otimes\otimes$ расхо́дится по необходимому признаку.

2) при $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$. При $p > 0$ выполняются все условия интегрального признака сходимости. А интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ как известно сходится при $p > 1$ и расхо́дится при $p \leq 1$.

-12-

Итак ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$

и расходится при $p \leq 1$.

Пример $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$, $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^p n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

для $\forall p$

1) Пусть $p \leq 0$. Тогда $a_n \geq \frac{1}{n}$ при $n \geq 3$ и

тогда ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ расходится при $p \leq 0$

2) Пусть $p > 0$. Тогда функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши-Маклорена.

Так как $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$

Итак ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$

Признак Даламбера. Радиальный признак Коши.

Теорема (Даламбера) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (где $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$) справедливы утверждения:

1) Если $\exists q \in (0, 1)$ и $\exists n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, для $\forall n \geq n_0$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если $\exists n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ для $\forall n \geq n_0$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.