

Аппроксимирующий полином Ньютона

Задача. Придать интерполяционной формуле более простой вид. Слагаемые должны располагаться в порядке убывания их значимости.

Элементы теории разделённых разностей.

1) Схема Эйткена

2) Формулы численного дифференцирования

разностные
методы

Задана табличная функция:

x_0	x_1	x_2	\boxtimes	x_n
y_0	y_1	y_2	\boxtimes	y_n

$$x_i \neq x_j$$

$$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1), \quad \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f(x_1, x_2), \quad \sphericalangle$$

$$\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}, x_n)$$

разделённые разности **первого** порядка

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2), \quad \sphericalangle$$

$$\frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

разделённые
разности **второго**
порядка

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

разделённая разность k -го порядка

Полезные свойства разделённых разностей

1) Разделённая разность k -го порядка равна:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \sum_{l=0}^k \frac{f(x_{i+l})}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^k (x_{i+l} - x_j)}$$

2) Разделённая разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделённых разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого.

3) Постоянный множитель можно выносить за знак разделённой разности.

4) Разделённая разность есть симметрическая функция своих аргументов, т.е.

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = f(x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+k})$$

5) Разделённая разность многочлена понижает на единицу его степень.

$$f(x) = x^n : f(x_i, x_{i+1}) = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{x_{i+1} - x_i} = x_{i+1}^{n-1} + x_{i+1}^{n-2} x_i + \dots + x_{i+1} x_i^{n-2} + x_i^{n-1}$$

Вывод:

Разделённые разности n -го порядка многочлена n -й степени $P_n(x)$ постоянны. (Все последующие равны нулю)

Свойство 5 применяют для определения предпочтительной степени многочлена, подходящего для интерполирования данной функции. Или используют для обнаружения ошибок в таблицах многочленов или функций, близких к ним.

Построим таблицу разделённых разностей

i	x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(\overline{x_i, x_{i+3}})$
0	0	0	$\frac{8-0}{2-0} = 4$	$\frac{19-4}{3-0} = 5$	$\frac{10-5}{5-0} = 1$
1	2	8	$\frac{27-8}{3-2} = 19$	10	1
2	3	27	49	14	1
3	5	125	91	12	
4	6	216	43		
5	1	1			

$$f(x) = x^3$$

Строим полином Ньютона

Задана табличная функция:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

При построении полинома Ньютона в качестве базисных функций возьмем следующие:

$$1, \quad x - x_0, \quad (x - x_0) \cdot (x - x_1), \dots, (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Многочлен ищем в виде:

$$\begin{aligned} N_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots \\ & \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т.е.

$$N(x_i) = f_i, \quad (i = \overline{1, n})$$

Из этих условий найдём коэффициенты:

$$N(x_0) = a_0 = f_0$$

$$N(x_1) = f_0 + a_1 \underbrace{(x_1 - x_0)}_h = f_1$$

$$N(x_2) = f_0 + a_1 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2 \cdot h} + a_2 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2 \cdot h} \underbrace{(x_2 - x_1)}_h = f_2$$

▽ ▽ ▽

$a_0 = f_0$ – разделённая разность 0-го порядка

$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ – разделённая разность 1-го порядка

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f_2 - f_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f_2(x_1 - x_0) - f_0(x_1 - x_0) - f_1(x_2 - x_0) + f_0(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} = \\ &= \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f_0}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)} \end{aligned}$$

– разделённая разность 2-го порядка

Для равноотстоящих узлов:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \text{— разделённая разность 1-го порядка}$$
$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1 2h}{2h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} 2h}{2h^2} =$$
$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2} = \frac{[f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_1) - f(x_0)]}{2h^2} =$$
$$= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{2h^2} \quad \text{— разделённая разность 2-го порядка}$$

Общая формула для коэффициента многочлена Ньютона имеет вид:

$$a_k = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_k)}{k! h^k}; \quad k = \overline{0, n}$$

Окончательный вид многочлена Ньютона:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперёд.

Этой формулой пользуются для вычисления значений функции в узлах левой(верхней) части таблицы.

4) Разделённая разность есть симметрическая функция своих аргументов, т.е.

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_0, x_2) = f(x_2, x_1, x_0) = \square$$

Если $0 \leftrightarrow n$, $1 \leftrightarrow n - 1$, $2 \leftrightarrow n - 2$ и т.д., тогда

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \square$$

$$\square + a_n(x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \square \cdot (x - x_1)$$

$$N_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \square$$

$$\square + f(x_n, x_{n-1}, \square, x_0)(x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \square \cdot (x - x_1)$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования назад.

Погрешность многочлена Ньютона.

$$f(x) - N_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \omega_n(x)$$

$$\text{где } f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\text{при } |x - x_k| \rightarrow 0$$

$$f(x, x_0, \dots, x_n) \approx \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \approx f(x_0, \dots, x_{n+1})$$

Пример. Вычислить в точках $x = 0,1$ и $x = 4,5$ значения функции, заданной таблично.

i	x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(\overline{x_i, x_{i+3}})$
0	0	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$
1	2	3	-1	$\frac{5}{6}$	
2	3	2	$\frac{3}{2}$		
3	5	5			

При $x = 0.1$ воспользуемся первой формулой Ньютона.

$$\begin{aligned} f(0.1) &\approx N(0.1) = 1 + 1 \cdot (0.1 - 0) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (0.1 - 0)(0.1 - 2) + \\ &+ \frac{3}{10} \cdot (0.1 - 0)(0.1 - 2)(0.1 - 3) = \\ &= 1.1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{19}{10}\right) + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{19}{10}\right) \cdot \left(-\frac{29}{10}\right) = \\ &= 1.1 + 0.127 + 0.166 = 1.393 \end{aligned}$$

При $x = 4.5$ воспользуемся второй формулой Ньютона.

$$\begin{aligned} f(4.5) &\approx N(4.5) = 5 + \frac{3}{2} \cdot (4.5 - 5) + \frac{5}{6} \cdot (4.5 - 5)(4.5 - 3) + \\ &+ \frac{3}{10} \cdot (4.5 - 5)(4.5 - 3)(4.5 - 2) = 3.854 \end{aligned}$$

Возможна такая нумерация узлов:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	⊠	$\Delta^n y$	⊠
⊠	⊠	⊠				
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	⊠			
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	⊠		
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	⊠	$\Delta^n y_0$	⊠
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	⊠		
x_2	y_2	Δy_2				
			⊠	Многочлен Гаусса		
⊠	⊠	⊠				