

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ
СИГНАЛА С ПОЛНОСТЬЮ
ИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Дискретный сигнал

Принимаемый сигнал представляет смесь ожидаемого сигнала $S(t, \alpha)$ с полностью известными параметрами и помехи:

$$U(t) = n(t) + S(t, \alpha)$$

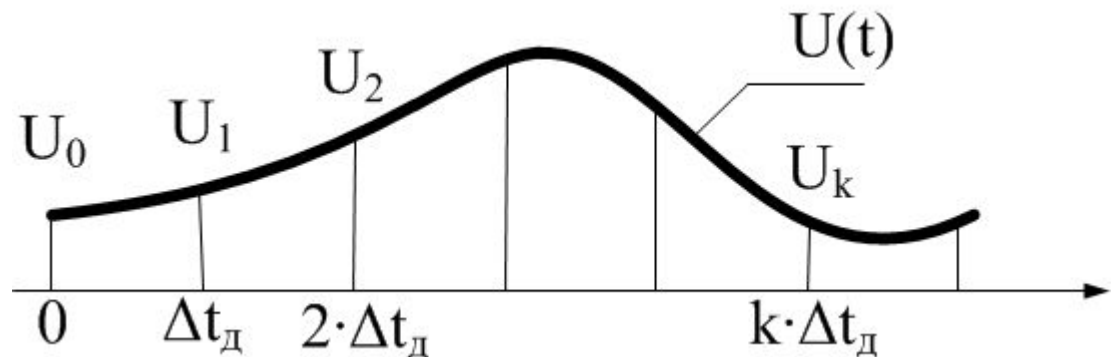
Дискретные значения U_k , соответствующие этому колебанию, удовлетворяют равенству:

$$U_k = n_k + S_k,$$

где: S_k — известные величины (дискретные значения сигнала),
 $k = 1, 2, \dots$

Дискретизация осуществляется в соответствии с теоремой Котельникова:

$$\Delta t_d < \frac{1}{2 \cdot f_{\text{макс}}}$$



Распределение шума и сигнала

Наличие сигнала приводит к смещению распределения величины U_k относительно распределения без сигнала $U_k = n_k$:

$$W_{\text{сн}}(U_1, U_2, \dots) = W_{\text{п}}(U_1 - S_1, U_2 - S_2, \dots)$$

Отношение правдоподобия для известного :

$$l(U | \alpha) = \frac{w_{\text{п}}(U_1 - S_1, U_2 - S_2, \dots)}{w_{\text{п}}(U_1, U_2, \dots)}$$

Отсчеты белого шума распределены по нормальному закону, некоррелированы и статистически независимы, соответственно:

$$W_{\text{п}}(U_1, U_2, \dots) = W_{\text{п}}(U_1) \cdot W_{\text{п}}(U_2) \cdot \dots$$

$$W_{\text{п}}(U_k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{макс}} \cdot f}} \cdot e^{-\frac{U_k^2}{2 \cdot N_{\text{макс}} \cdot f}} = \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi \cdot N_0}} \cdot e^{-\frac{U_k^2 \cdot \Delta t}{N_0}},$$

Дисперсия квазиглобального шума в полосе

$[0: f]_{\text{макс}}$

Отношение правдоподобия

$$l(U | \alpha) = e^{-\frac{1}{N_0} \sum_k U_k^2 \cdot \Delta t} \cdot e^{\frac{2}{N_0} \sum_k U_k S_k \cdot \Delta t}$$

Осуществим предельный переход, $f_{\text{макс}} \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k S_k^2 \cdot \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \alpha) dt = E(\alpha), \quad \text{— гнала}$$

Запишем корреляционный интеграл:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k U_k S_k \cdot \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} S(t, \alpha) \cdot U(t) dt$$

Окончательно отношение правдоподобия может быть представлено в виде:

$$l[U(t) | \alpha] = e^{-E(\alpha)/N_0} \cdot e^{2 \cdot z(\alpha)/N_0}, \quad z(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t, \alpha) \cdot U(t) dt = z[U(t) | \alpha]$$

Алгоритм обнаружения известного сигнала

Отношение правдоподобия - монотонная функция корреляционного интеграла для реализации $U(t)$ и ожидаемого сигнала с параметрами α .

Сравнение отношения правдоподобия с порогом l_0 эквивалентно сравнению корреляционного интеграла с соответствующим порогом z_0 :

$$z_0 = z_0(\alpha) = \frac{N_0}{2} \ln(l_0(\alpha)) + \frac{1}{2} E(\alpha),$$

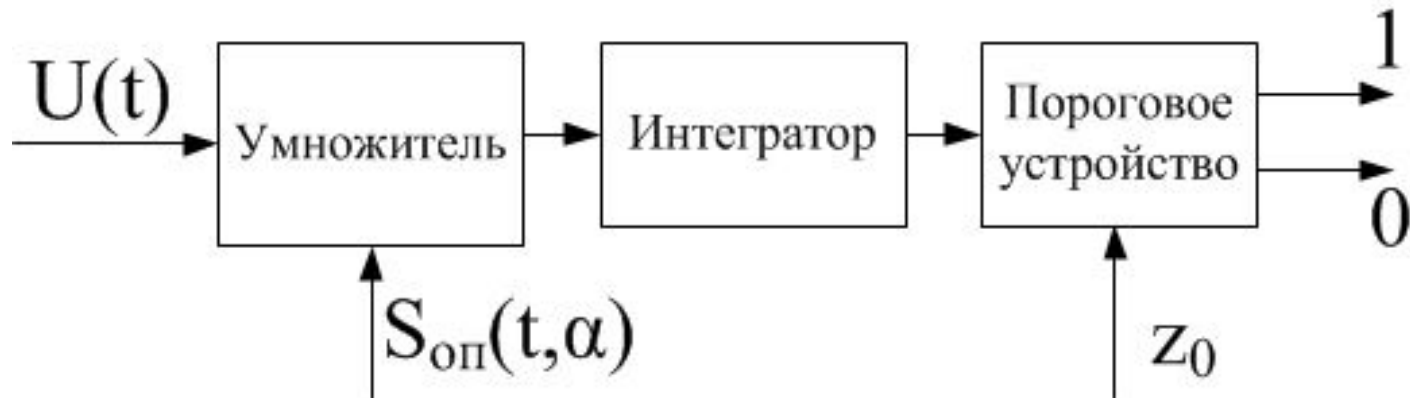
где: N_0 – спектральная плотность шума;

$E(\alpha)$ – энергия ожидаемого сигнала.

Алгоритм работы оптимального обнаружителя:

- вычислять корреляционный интеграл или его монотонную функцию;
- сравнивать результат с порогом.

Корреляционный обнаружитель

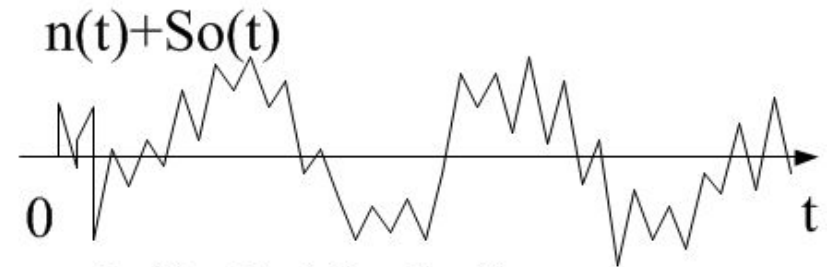
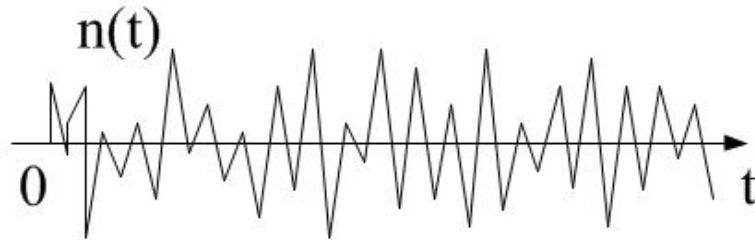
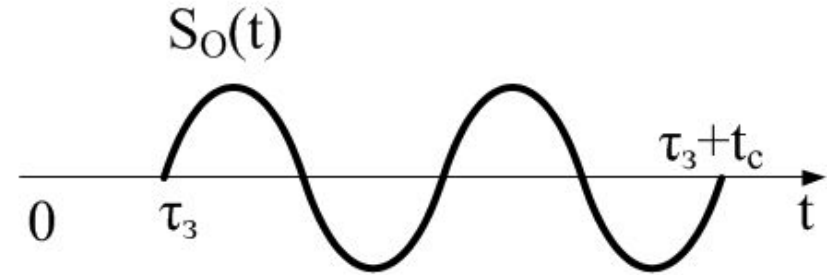
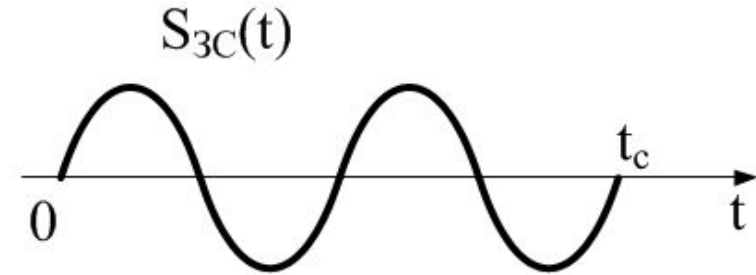


- На умножитель подается опорный сигнал $S_{\text{оп}}(t, \alpha)$, соответствующий ожидаемому сигналу, и принятый сигнал $U(t)$.
- Произведение интегрируется и дает оценку корреляционного интеграла.
- Результат интегрирования сравнивается с порогом z_0 порогового устройства.

Уровень порога выбирается исходя из применяемого критерия обычно требуют чтобы F была не больше допустимой.

Опорный сигнал соответствует по зондирующему, но с учетом вектора параметров цели α (обычно учитывается время задержки и частота смещения).

Работа корреляционного обнаружителя



$n(t) \times S_0(t)$



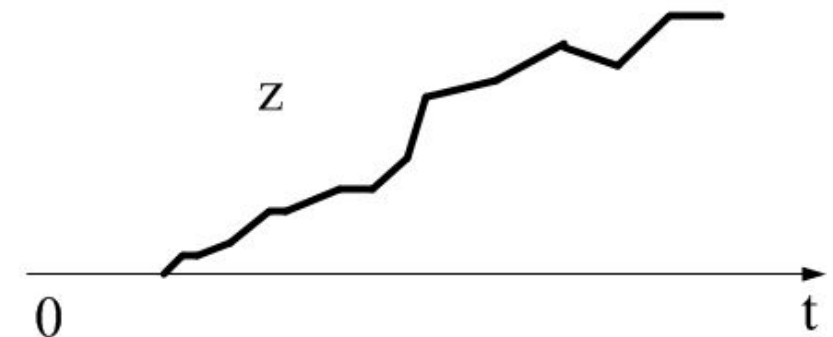
$(n(t)+S_0(t)) \times S_0(t)$



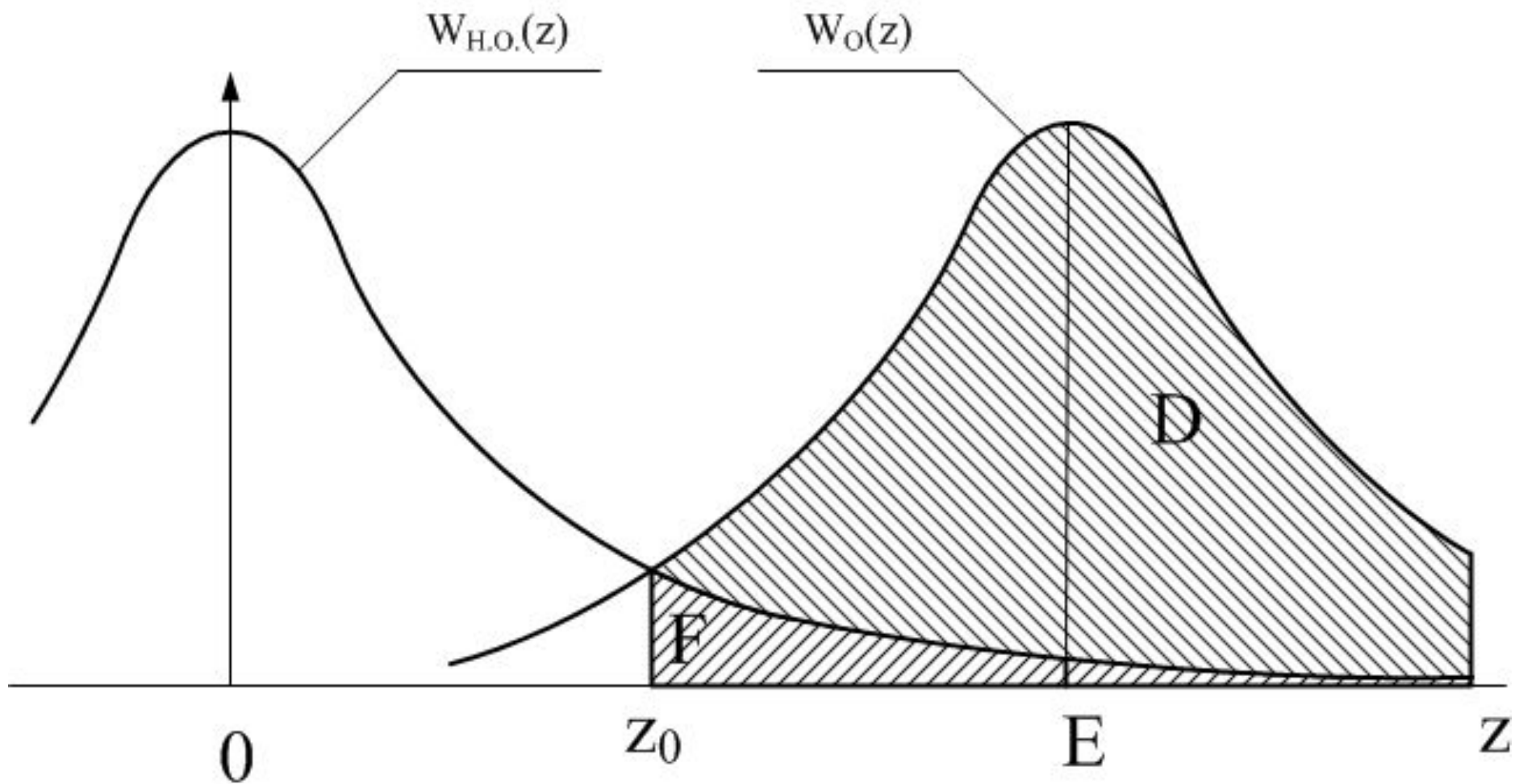
Z



Z



Распределения плотности вероятности величины корреляционного интеграла



Задача многоканального обнаружения

Положим, что сигнал принимается M -элементной антенной решеткой, элементы которой расположены в одном или нескольких пунктах приема, тогда совокупность всех принятых сигналов описывается вектор–столбцом $U(t)$:

$$U(t) = |U_0(t) \quad U_1(t) \quad \dots \quad U_{M-1}(t)|^T$$

Реализация принимаемых колебаний:

$$U_i(t) = A \cdot S(t, \alpha, \beta) + n(t, \nu)$$

$S(t, \alpha, \beta)$ — реализация сигнала

$n(t, \nu)$ — реализация помехи,

$$A = \begin{cases} 1 & \text{при наличии сигнала} \\ 0 & \text{при отсутствии сигнала} \end{cases}$$

α — вектор информативных параметров сигнала (задержка, частота смещения, угловые координаты источника излучения);

β — вектор неинформативных случайных параметров сигнала (начальная фаза, амплитуда, совокупность случайных фаз и амплитуд, параметры случайной поляризации сигнала);

ν — вектор случайных параметров помехи.

Влияние дискретизации сигнала

После дискретизации сигнала, получим L временных дискрет для каждой функции $U_i(t)$. Тогда общее число дискрет при M -канальном приеме $i = 1, 2, \dots, M$ составит $m = L \cdot M$, решение принимается по M -мерному вектор-столбцу:

$$U = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 & \dots & U_{M-1} \end{bmatrix}^T$$

Сигнал обозначим вектором $S = \|S_i\|$, размерность которого определяется общим числом временных дискрет во всех антенных каналах:

$$U = A \cdot S + n$$

Помеху обозначим вектор-столбцом $n = \|n_i\|$ случайных значений.

Мат. ожидание каждого из них равно нулю: $M\{n_i\} = 0$.

Мат. ожидание n также равно нулю: $M\{n\} = 0$, а его элементы распределены по гауссовскому (нормальному) закону:

$$w(n) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

Учет нестационарных помех

Помеха в общем случае считается нестационарной: различные элементы выборки n_i и n_k помехи могут иметь различные дисперсии σ_i и быть взаимозависимы, так что их **центрированный корреляционный момент**, называемый **ковариацией** в общем случае не равен нулю:

$$\psi_{ik} = M \left\{ \left(n - M \{ n \} \right)^2 \right\} = M \{ n_i \cdot n_k \} \neq 0$$

Степень взаимной корреляции характеризуют обычно **коэффициентом корреляции** элементов помеховой выборки

$$\rho_{ik} = \frac{M \{ n_i \cdot n_k \}}{\sigma_i \cdot \sigma_k}$$

Величина ρ_{ik} изменяется от +1 до -1.

Значения ρ_{ik} равны ± 1 , когда величины n_i и n_k пропорциональны.

Знак плюс соответствует положительному, а знак минус — отрицательному коэффициенту пропорциональности.

Ковариационная матрица помех

Совокупность корреляционных моментов (ковариаций) элементов помеховой выборки образует прямоугольную корреляционную или ковариационную матрицу в зависимости от смещенности или несмещенности случайных процессов:

$$C = \psi_{ik} = \|\rho_{ik} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_k\|$$

Диагональными элементами корреляционной матрицы оказываются дисперсии элементов выборки: $\psi_{ii} = \sigma_i^2$.

Для ковариационной матрицы можно найти определитель и матрицу, соответственно можно найти плотность вероятности эквивалентного гауссовского закона распределения помехового вектор-столбца \mathbf{n} с учетом компенсации ковариации помех:

$$W(\mathbf{n}) = (2 \cdot \pi)^{-m/2} |C|^{-1/2} \exp\left(-\mathbf{n}^T \cdot C^{-1} \cdot \mathbf{n} / 2\right)$$

$$W_{\Pi}(U) = (2 \cdot \pi)^{-m/2} |C|^{-1/2} \exp\left(-U^T \cdot C^{-1} \cdot U / 2\right)$$

Примеры ковариационных матриц

1. Если выборка состоит всего из одного дискрета, корреляционная матрица вырождается: она содержит всего один элемент σ^2 , а ее определитель $|\varphi| = \sigma^2$.

Обратная матрица φ^{-1} также сводится к одному элементу $1/\sigma^2$, а произведение $\varphi \cdot \varphi^{-1}$ – к одноэлементной единичной матрице. При наличии одной помехи из общего соотношения приходим, таким образом, к выражению w_{Π} и $w_{\text{СП}}$, приведенными выше.

2. Получим плотности вероятности $W_{\Pi}(U)$ и $W_{\text{СП}}(U)$ для случая, когда выборка состоит из двух дискрет.

Корреляционная матрица C в данном случае имеет вид:

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho & \sigma_2^2 \end{vmatrix},$$

$$|C| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2), \quad C^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \cdot \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

Учет ковариации двух помех

Распределения вероятности в таком случае становятся двумерными и имеют вид

$$W_{\Pi}(U_1, U_2) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2 \cdot (1 - \rho^2)} \left[\frac{U_1^2}{\sigma_1^2} - 2 \cdot \rho \cdot \frac{U_1 \cdot U_2}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{U_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$
$$W_{\Pi}(U_1, U_2) = W_{\Pi}(U_1 - S_1, U_2 - S_2),$$

что соответствует записи

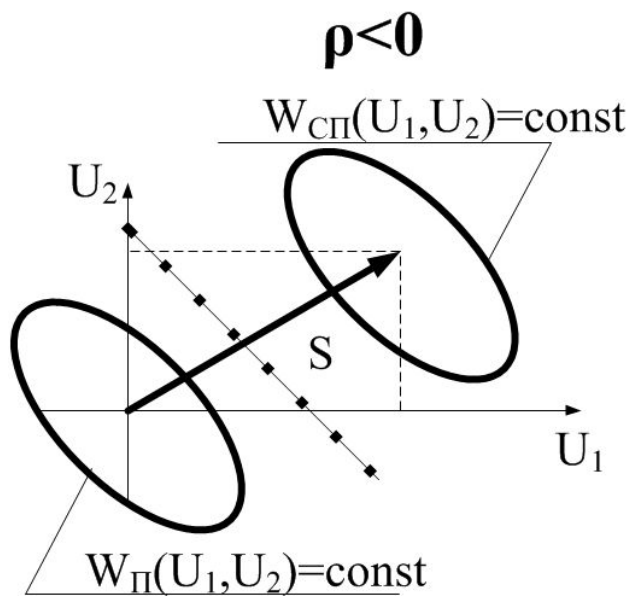
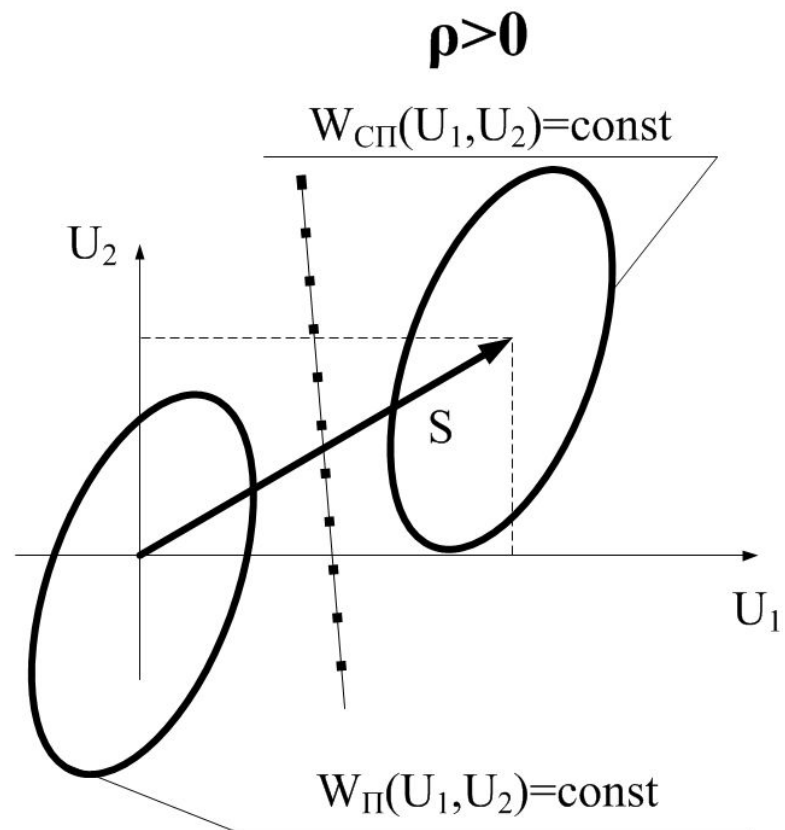
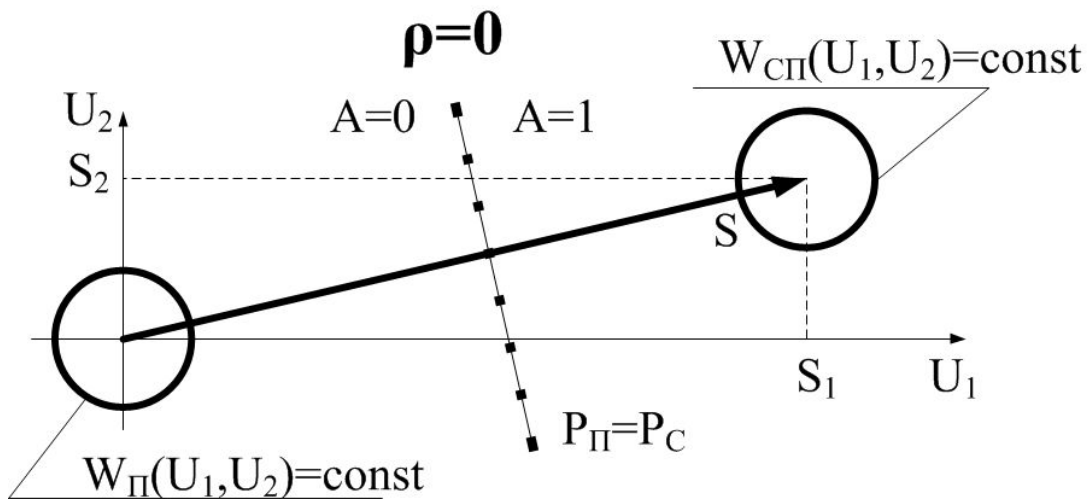
$$w_{\Pi}(U) = w_{\Pi}(U - S)$$

Полученные распределения показаны ниже с помощью линий уровня для случаев:

$$\rho = 0, \rho = \pm 0,5$$

$$\text{при } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Плотности распределения сигнала при наличии двух помех



Алгоритмы оптимального многоканального обнаружения

Сводится к сравнению с порогом логарифма отношения правдоподобия, так как логарифм линейное преобразование:

$$\ln(l) = \ln(w_{cn}(\mathbf{y})) - \ln(w_n(\mathbf{y}))$$

После подстановки плотностей распределения вероятности получим:

$$\ln(l) = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} / 2) / 2 - \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} / 2$$

$$\ln(l) = \zeta - q^2 / 2 = q \left(\zeta_H - \frac{q}{2} \right),$$

$$\zeta = \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} = \zeta_H \cdot q$$

$$q^2 = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S},$$

Виды схем оптимального многоканального обнаружителя

С порогом обычно сравнивают:

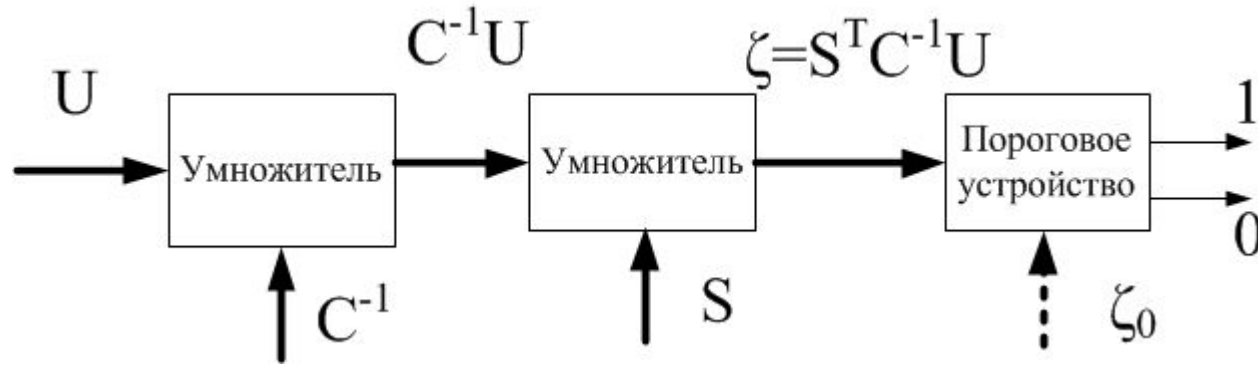
$$\ln(1); \zeta = \ln(1) + q^2 / 2; \zeta_n = \frac{\ln(1)}{q} + \frac{q}{2}.$$

они монотонно связаны с отношением правдоподобия и каждая из них может использоваться для сравнения с соответствующим порогом при двухальтернативном обнаружении.

Существует несколько вариантов схемы оптимального обнаружителя.

В данном семействе схем подача на элемент схемы скалярной величины показывается с помощью пунктирных стрелок, а векторно-матричной величины с помощью сплошных стрелок.

Схема 1 оптимального обнаружителя



Проводится два вида обработки m -элементного принятого U :

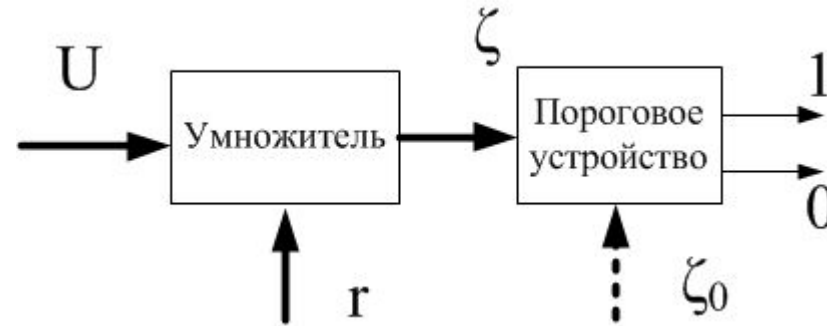
- линейное преобразование U к зависящему только от структуры m^2 -элементной корреляционной матрицы помехи:
- выделение скалярной весовой суммы элементов с весовыми коэффициентами, соответствующими составляющим полезного сигнала и не зависящими от корреляционной матрицы помехи:

$$\zeta = S^T \cdot \boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^m C_i \cdot \eta_i, \quad \boldsymbol{\eta} = C^{-1} \cdot U;$$

$$M_{\Pi} \{ \boldsymbol{\eta} \cdot U^T \} = C^{-1} \cdot M_{\Pi} \{ U \cdot U^T \} = C^{-1} \cdot C = \mathbf{I}$$

$$M_{\Pi} \{ \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^T \} = C^{-1} \cdot M_{\Pi} \{ U \cdot U^T \} = C^{-1} \cdot C \cdot C^{-1} = C^{-1}$$

Схема 2 оптимального обнаружителя



В данной проводится m -элементная весовая обработка с коэффициентами r_i вектора $\mathbf{r} = \|r_i\|$:

$$\zeta = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^m U_i \cdot r_i; \mathbf{r} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}$$

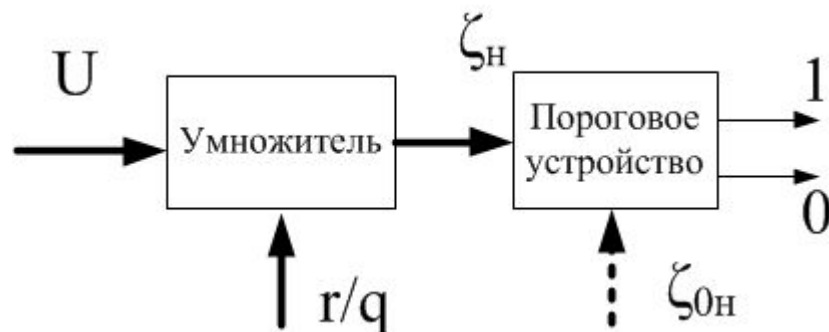
$$\sigma^2 = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\Pi} \{ \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T \} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} = q^2$$

Выходной уровень помехи в схемах 1 и 2 зависит от:

- входной корреляционной матрицы \mathbf{C}
- вектора опорного/зондирующего сигнала \mathbf{S} .

Уровень порога ξ_0 , обеспечивающий заданную условную вероятность ложной тревоги F выбирается с учетом зависимости.

Схема 3 оптимального обнаружителя



Это схема **многоканального оптимального обнаружителя с нормированным порогом.**

Для оценки отношения правдоподобия здесь в виде весовой коэффициенте используется нормированный вектор \mathbf{r} .

Переход к нормированному весовому вектору \mathbf{r}_n учитывает используемую в радиолокационных приемниках автоматическую регулировку усиления по выходному уровню помехи.

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}/q = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} / \sqrt{\mathbf{T}^{-1}}$$

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^m y_i \cdot r_{ni} = \zeta / q$$

$$\sigma_n^2 = M_{\Pi} \{ \zeta_n^2 \} = M_{\Pi} \{ \zeta^2 \} / q^2 = 1$$

Параметр качества двухальтернативного обнаружения

Параметром обнаружения (квадратичным, линейным) называют отношение сигнал-помеха на выходе линейного тракта обработки (по мощности, по напряжению).

Отношение сигнал-помеха по мощности это отношение величины квадрата математического ожидания весовой суммы ξ или ξ_n при наличии сигнала и помехи к величине дисперсии этой же самой весовой суммы (которая полагается постоянной вне зависимости от наличия или отсутствия сигнала).

Параметры обнаружения приведенных выше оптимальных обнаружителей одинаковы при одинаковых условиях на входе.

Расчет проведем для схемы 1 при наличии сигнала

$$M_{\text{сп}} \{U\} = S$$

$$M_{\text{сп}} \{\zeta_n\} = M_{\text{сп}} \{U^T\} \cdot \mathbf{r} / q = S^T \cdot C^{-1} \cdot S / q = q^2 / q = q$$

Плотности распределения параметра двухальтернативного обнаружения

Если нормировать дисперсию помехи, квадратичный параметр обнаружения будет равен q^2 , а линейный q .

Для параметра обнаружения справедливы следующие выражения:

$$q^2 = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{S};$$

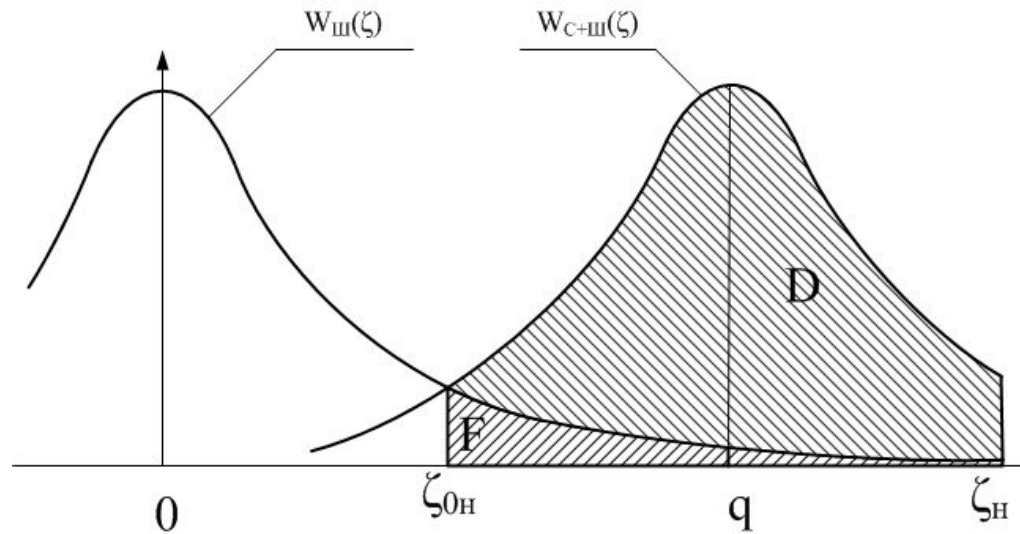
$$q = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{r}_H = \mathbf{r}_H^T \cdot \mathbf{S} = M_{\text{сп}} \{ \zeta_H \}$$

Весовая сумма ζ_H или ζ есть линейная комбинация нормально распределенных величин U_i и за счет закона больших чисел также распределена по нормальному закону.

Так как $M_{\text{сп}} \{ \zeta_H \} = q$, $M \{ (\zeta_H - q)^2 \} = 1$, плотности вероятности нормированной весовой суммы имеют вид:

$$w_{\text{п}}(\zeta_H) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\zeta_H^2 / 2}; \quad w_{\text{сп}}(\zeta_H) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-(\zeta_H - q)^2 / 2}$$

Кривые плотностей вероятности и уровень порога



Заштрихованные области, соответствуют интегралам от указанных плотностей вероятности в области $\zeta_н > \zeta_{0н}$ и определяют условные вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D .

При интегрировании используют табулированные для $\zeta_{0н} \geq 0$ значения интеграла вероятности:

$$\Psi(\zeta_н) = \left(2 / \sqrt{2\pi}\right) \int_0^{\zeta_н} e^{-\zeta^2/2} d\zeta, \Psi(\infty) = 1$$

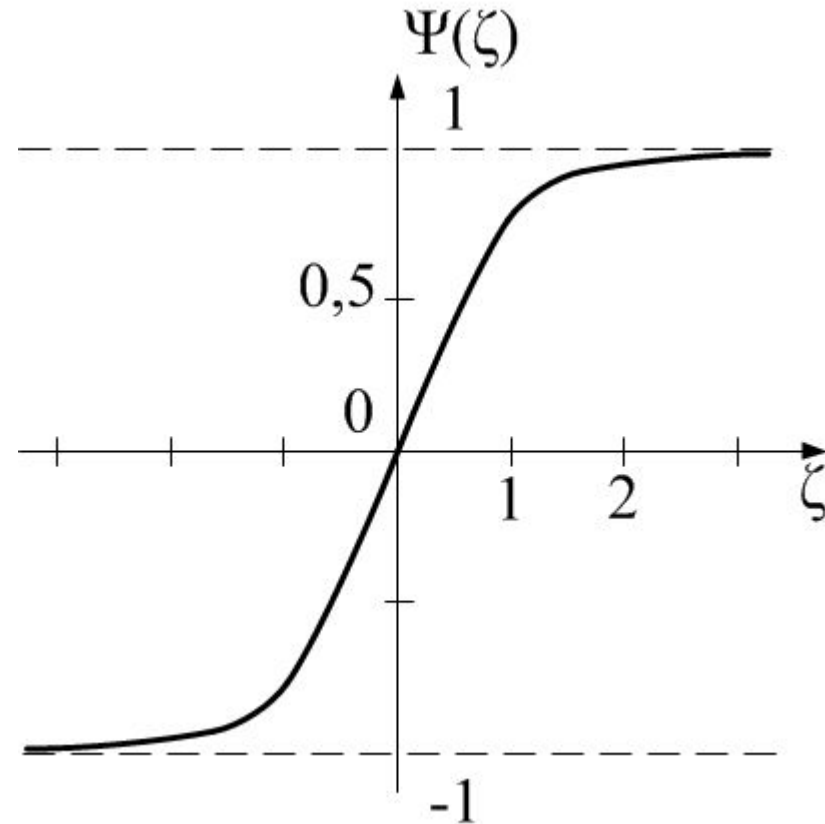
Модифицированный интеграл Эрфанга (интеграл вероятности)

Для использования необходимо определить интеграл вероятности для $\zeta_{0H} < 0$, так как функция обладает свойством

$$\Psi(-\zeta_{0H}) = -\Psi(\zeta_{0H}),$$

зависимость $\Psi(u)$ показана на графике.

Если перейти к случаю когда сигнал имеется получим:



$$\int_{-\infty}^{\zeta_{0H}} e^{-\zeta^2/2} d\zeta = \int_{-\infty}^q e^{-\zeta^2/2} d\zeta + \int_q^{\zeta_{0H}} e^{-\zeta^2/2} d\zeta$$

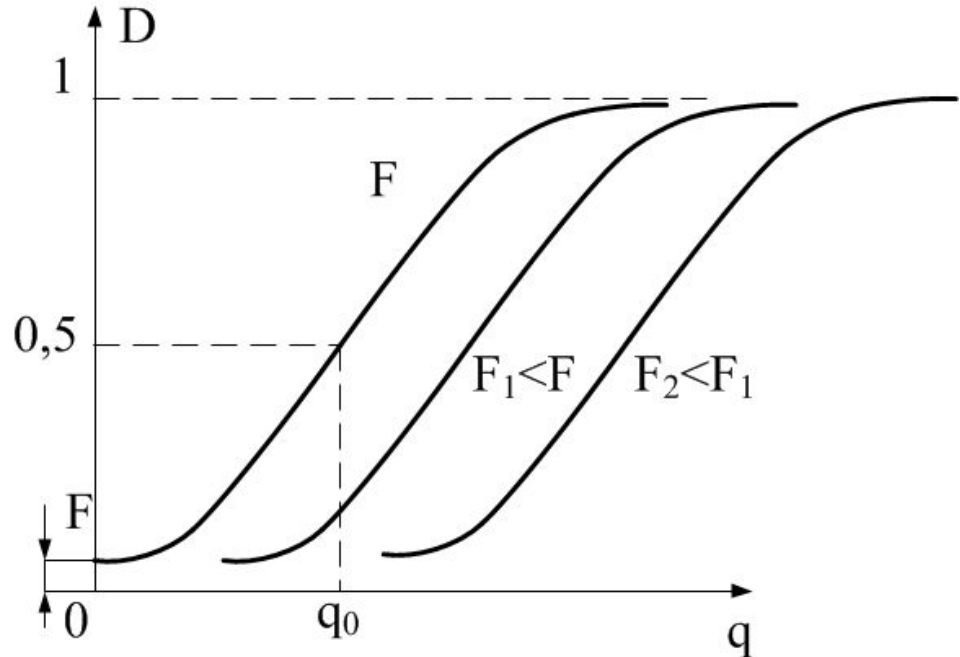
Кривые обнаружения

При отсутствии сигнала положим $q=0$, с учетом $\Psi(-\infty)/2=-1/2$, выразим условные вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги:

$$D = \int_{-\infty}^{\zeta_{0H}} p_{сп}(\zeta_H) d\zeta_H = 0,5 + 0,5 \cdot \Psi(q - \zeta_{0H}),$$

$$F = \int_{-\infty}^{\zeta_{0H}} p_{п}(\zeta_H) d\zeta_H = 0,5 - 0,5 \cdot \Psi(\zeta_{0H})$$

Кривые обнаружения связывают условную вероятность правильного обнаружения и ложной тревоги и фиксированный уровень порога ζ_{0H} . Для построения кривых фиксируется вероятность ложной тревоги $F = F_0$.



Условия расчета параметров обнаружения в двухэлементной выборке

При расчете полагают что:

- отсутствует корреляция элементов выборки помехи;
- помеха стационарна во времени и пространстве;
- дисперсия помехи и собственных шумов за время наблюдения постоянна.

Если в выборке имеется более двух элементов данные условия могут быть не выполнены и соответственно требуется информация для декорреляции входной выборки.

Двухэлементная выборка соответствует напряжениям двух элементов антенной системы в один и тот же момент времени. Она образована помехой либо наложением сигнала и помехи. Выборка сигнала S известна. Известна также корреляционная матрица помехи C и обратная ей матрица.

Межэлементное нормирование по уровню помехи

Весовой вектор для структурной схемы 2:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{vmatrix} x_1 / \sigma_1^2 & -\rho \cdot x_2 / \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \cdot x_1 / \sigma_1 \sigma_2 & x_2 / \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \end{vmatrix}$$

Весовая сумма в таком случае имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{r} = [(\mathbf{S}_{1\text{H}} - \rho \cdot \mathbf{S}_{2\text{H}}) \cdot \mathbf{U}_{1\text{H}} + (\mathbf{S}_{2\text{H}} - \rho \cdot \mathbf{S}_{1\text{H}}) \cdot \mathbf{U}_{2\text{H}}] / (1-\rho^2) = \\ &= [(\mathbf{U}_{1\text{H}} - \rho \cdot \mathbf{U}_{2\text{H}}) \cdot \mathbf{S}_{1\text{H}} + (\mathbf{U}_{2\text{H}} - \rho \cdot \mathbf{U}_{1\text{H}}) \cdot \mathbf{S}_{2\text{H}}] / (1-\rho^2) \end{aligned}$$

Проведем оптимальное межэлементное взвешивание для устранения не стационарности помехи:

$$\mathbf{U}_{1\text{H}} = \mathbf{U}_1 / \sigma_1, \mathbf{U}_{2\text{H}} = \mathbf{U}_2 / \sigma_2, \mathbf{S}_{1\text{H}} = \mathbf{S}_1 / \sigma_1, \mathbf{S}_{2\text{H}} = \mathbf{S}_2 / \sigma_2$$

Тогда параметр обнаружения q определяется выражением:

$$q^2 = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot (\mathbf{S}_{1\text{H}}^2 + \mathbf{S}_{2\text{H}}^2 - 2 \cdot \rho \cdot \mathbf{S}_{1\text{H}} \cdot \mathbf{S}_{2\text{H}})$$

Обнаружение и независимые стационарные помехи

Коэффициент корреляции выборки $\rho=0$, дисперсии элементов выборки равны $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, соответственно:

$$\zeta = U_{1H} \cdot S_{1H} + U_{2H} \cdot S_{2H}, \quad q^2 = S_{1H}^2 + S_{2H}^2$$

Каждое из принятых нормированных напряжений U_{1H} , U_{2H} умножается на соответствующее нормированное по уровню помехи значение ожидаемого напряжения. Если математическое ожидание ζ в отсутствие сигнала равно нулю $M_{\Pi} \{ \zeta_H \} = 0$, то при его наличии оно равно:

$$M_{\Pi} \{ \zeta \} = S_{1H}^2 + S_{2H}^2 = q^2 = q_1^2 + q_2^2$$

где $|S_{1H}| = q_1$, $|S_{2H}| = q_2$ – параметры обнаружения элементов выборки. Накопление сигнала осуществляется независимо от знака элементов выборки сигнала с одинаковыми весами элементов выборки, так как дисперсии помехи равны.

Обнаружение и нестационарные помехи

1. Коэффициент корреляции выборки $\rho=0$, дисперсии элементов выборки не равны $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, соответственно когерентное накопление сигнальных составляющих производится с различными весами:

$$S_{\#} = S_1 / \sigma_1, S_{2\#} = S_2 / \sigma_2$$

Весовая обработка связана с межэлементным нормированием принимаемых напряжений по ожидаемому уровню помехи. С меньшим весом учитывается элемент выборки, принимаемый на фоне более интенсивной помехи.

2. Коэффициент корреляции выборки $\rho \neq 0$, дисперсии элементов выборки не равны $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, когерентное накопление сигнальных составляющих с учетом когерентной компенсации:

$$U'_{\#} = U_{1\#} - \rho \cdot U_{2\#}, U'_{2\#} = U_{2\#} - \rho \cdot U_{1\#}$$

Компенсации коррелированных частей помехи предшествует межэлементное нормирование принимаемых колебаний, обеспечивающее выравнивание помех по интенсивности:

$$y_{\#} = y_1 / \sigma_1, y_{2\#} = y_2 / \sigma_2$$

Обнаружение при значительной корреляции помех

Для сильно коррелированной помехи роль компенсации может оказаться значительнее роли корреляционного накопления.

Обработка неэффективна, если

$$|x_{\#}| = |x_{2H}|, |\rho| \approx 1, \rho \cdot x_{1H} \cdot x_{2H} > 0,$$

т. е. когда отсутствуют существенные различия между сигналом и помехой. В этом случае: $q^2 = q_1^2$ и использование второго дискрета не изменяет параметр обнаружения.

Полезный сигнал компенсируется при его использовании вместе с помехой, помеха накапливается, как и полезный сигнал, компенсация, и накопление оказываются неэффективными.

Многоканальный корреляционный
обнаружитель непрерывного сигнала с
известными параметрами на фоне
гауссовской коррелированной помехи

Обнаружение непрерывного сигнала

При переходе от дискретных величин к непрерывным выражения для весового интеграла и параметра обнаружения принимают вид:

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta^T(t) \cdot \mathbf{r}(t) dt \cdot q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S^T(t) \cdot \mathbf{r}(t) dt \quad \text{уд} \quad = \quad ^2$$

А для определения весового вектора $\mathbf{r}(\alpha)$ необходимо решить интегрально-матричное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(t, \alpha) \cdot \mathbf{r}(\alpha) d\alpha = S(t)$$

$C(t, \alpha)$ - матрица взаимных корреляционных функций канальных помеховых напряжений является ядром уравнения;

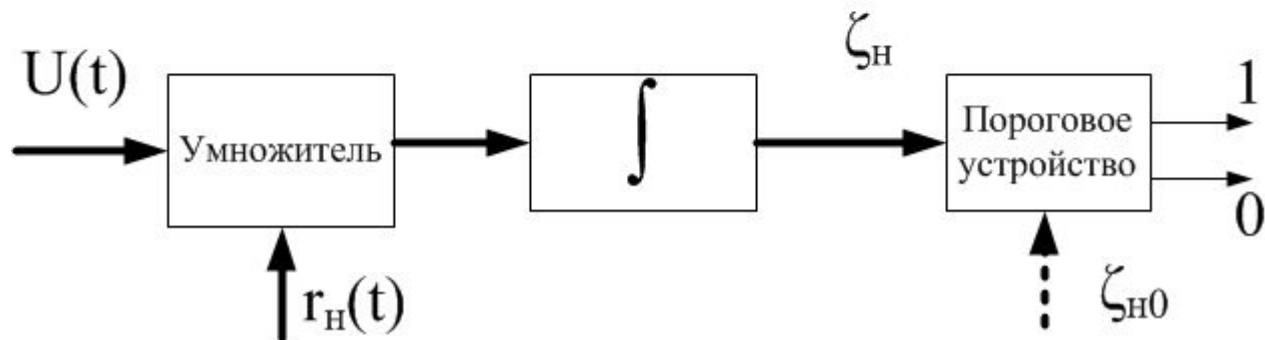
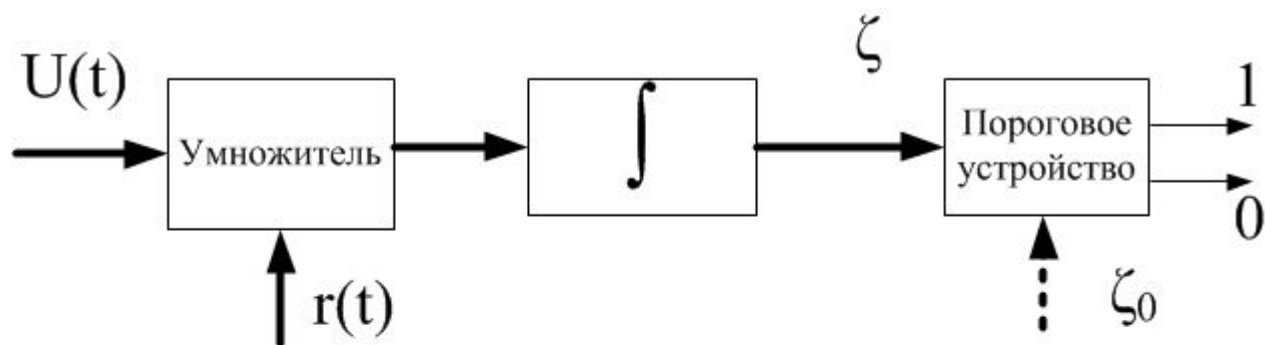
$S(t)$ – опорный сигнал.

С помощью вектора $\mathbf{r}(s)$ можно:

- синтезировать схему обработки, преобразуя $r_n(s) = \mathbf{r}(s)/q$ можно построить схему обнаружителя с заданной вероятностью ложной тревоги F_0 ;

- определять параметр обнаружения q .

Структурные схемы обнаружителей непрерывного сигнала с полностью известными параметрами



Одноканальное обнаружение непрерывного сигнала

При одноканальном приеме $M=1$, а помеха - стационарный шумовой процесс с постоянной спектральной плотностью мощности N_0 в неограниченной полосе частот (белый шум). По теореме Хинчина корреляционная функция шума с точностью до множителя сводится к дельта-функции:

$$\varphi(t, s) = \int_0^{\infty} N(f) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot (t - s)) df = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t - s)$$

Подставляя $C(t, s)$ в интегрально-матричное уравнение, получим в силу фильтрующего свойства дельта-функции:

$$\frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) r(\alpha) d\alpha = x(t)$$

$$r(t) = 2 \cdot S(t) / N_0$$

Выбор порога для одноканального обнаружения

Оптимальная обработка сводится к вычислению и сравнению с порогом нормированного или ненормированного весового интеграла:

$$\zeta_{\text{н}} = \zeta / q, \quad \zeta = 2 \cdot z / N_0,$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \cdot S(t) dt$$

Параметр обнаружения q^2 сигнала на фоне белого шума равен отношению удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума:

$$q^2 = \frac{2}{N_0} E, \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t) dt$$

Независимое двухканальное обнаружение непрерывного сигнала

В двух каналах приема ($M = 2$) действуют некоррелированные стационарные независимые белые шумы со спектральными плотностями N_{01} и N_{02} . Матрица корреляционных функций имеет вид

$$C(t, \alpha) = \frac{1}{2} \delta(t - \alpha) \begin{vmatrix} N_{01} & 0 \\ 0 & N_{02} \end{vmatrix}$$

Подставляя ее в интегрально-матричное уравнение, получаем следующую систему двух интегральных уравнений:

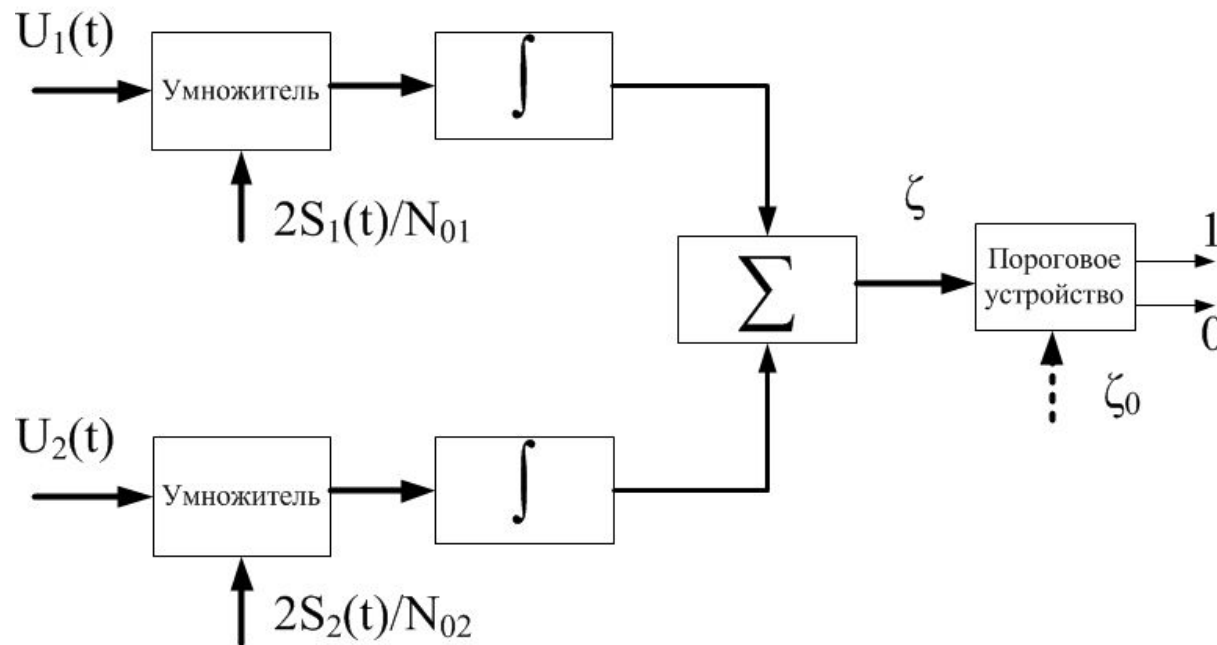
$$\begin{cases} \frac{N_{01}}{2} \cdot \int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) \cdot r_1(\alpha) d\alpha = S_1(t), \\ \frac{N_{02}}{2} \cdot \int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) \cdot r_2(\alpha) d\alpha = S_2(t) \end{cases}$$

$$r_1(t) = 2 \cdot S_1(t) / N_{01}; r_2(t) = 2 \cdot S_2(t) / N_{02}$$

Схема независимого двухканального обнаружителя непрерывного сигнала

Оптимальная обработка сводится к суммированию нормированных по уровню шумов корреляционных интегралов, а q^2 сводится к сумме аналогичных параметров одноканального обнаружения:

$$\zeta = \frac{2}{N_{01}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t) \cdot x_1(t) dt + \frac{2}{N_{02}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y_2(t) \cdot x_2(t) dt; q^2 = \frac{\mathfrak{D} \cdot 1}{N_{01}} + \frac{\mathfrak{E} \cdot 2}{N_{02}} = q_1^2 + q_2^2$$



Двухканальное обнаружение при коррелированных помехах

Каналы с коррелированными помехами встречаются:

- при использовании различных антенных элементов, принимающих колебания общих источников мешающих колебаний;
- при использовании незадержанных и задержанных на период посылки мешающих колебаний в импульсном радиолокаторе с селекцией движущихся целей.

Соответственно в каналах имеются коррелированные стационарные помеховые колебания типа белого шума со спектральными плотностями мощности N_{01} и N_{02} .

Матрица корреляционных функций для рассматриваемых случаев имеет вид

$$C(t, \alpha) = \frac{1}{2} C \cdot \delta(t - \alpha), \quad C = \begin{vmatrix} N_{01} & \rho \cdot \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \\ \rho \cdot \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} & N_{02} \end{vmatrix}$$

Алгоритм двухканального обнаружения на фоне коррелированных помех

Подставим корреляционную матрицу в интегрально-матричное уравнение, и решим его относительно весового вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{S}(t),$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1/N_{01} & -\rho/\sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \\ -\rho/\sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} & 1/N_{02} \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2}{1-\rho^2} \cdot \left\| \begin{array}{c} S_1(t)/N_{01} - \rho \cdot S_2(t)/\sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \\ S_2(t)/N_{02} - \rho \cdot S_1(t)/\sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \end{array} \right\|$$

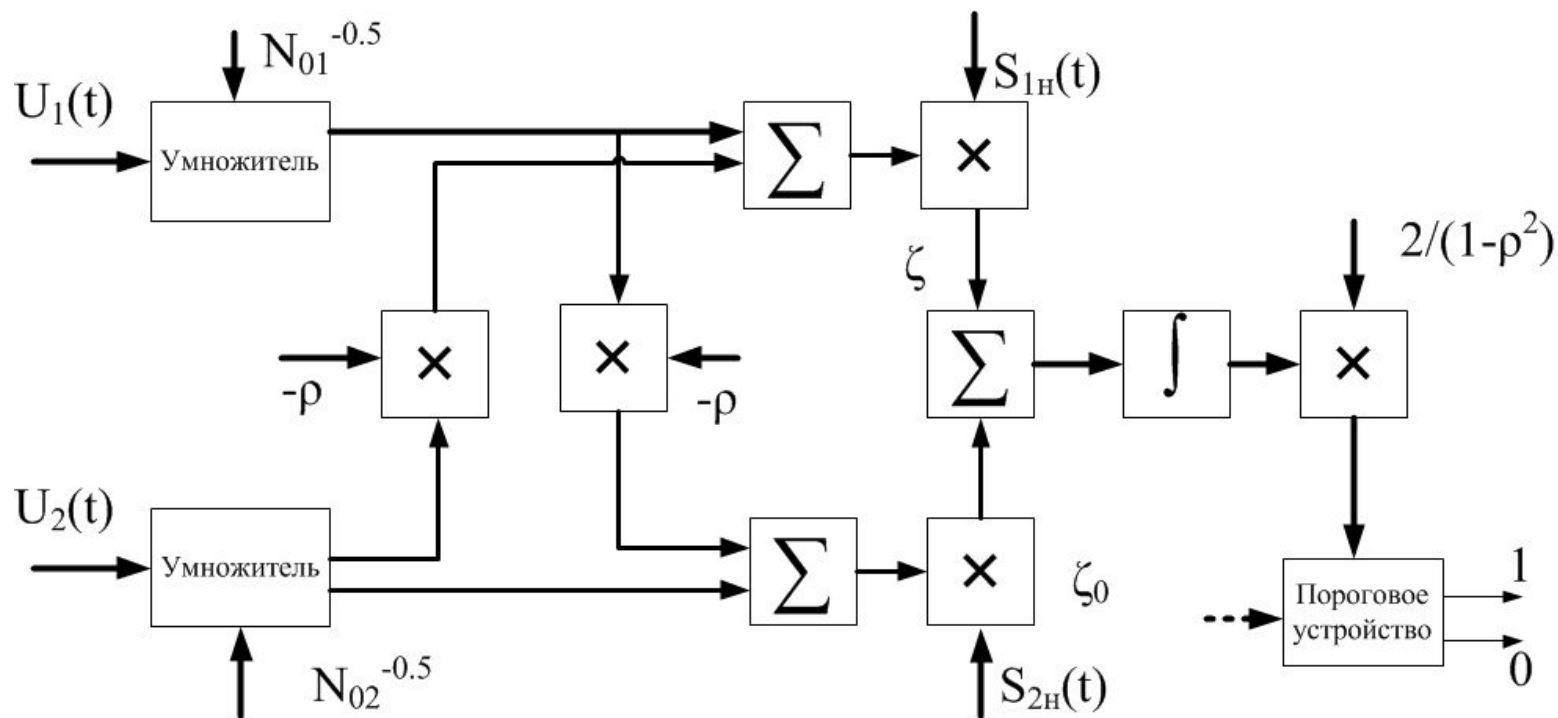
$$q^2 = \frac{2}{1-\rho^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{1H}^2(t) + S_{2H}^2(t) - 2\rho \cdot S_{1H}(t) \cdot S_{2H}(t)] dt$$

$$U_{1H}(t) = U_1(t)/\sqrt{N_{01}}, \quad U_{2H}(t) = U_2(t)/\sqrt{N_{02}}$$

$$S_{1H}(t) = S_{1H}(t)/\sqrt{N_{01}}, \quad S_{2H}(t) = S_2(t)/\sqrt{N_{02}}$$

Схема двухканального обнаружителя на фоне коррелированных помех

Интегрирование соответствует непрерывному накоплению сигнала во времени, в обнаружителе осуществляются следующие операции: межканальное накопления полезного сигнала, межканальная компенсация коррелированной части помех, межканального нормирование.



Обнаружение на фоне нестационарной ПОМЕХИ

Пусть Рассмотрим для одноканального обнаружение воздействие нестационарной дельта-коррелированный шумовой процесс с корреляционной функцией

$$C(t, \alpha) = \frac{N_0(t)}{2} \cdot \delta(t - \alpha)$$

$N_0(t)$ медленно меняющаяся во времени спектральная плотность мощности шума.

Подставим $C(t, \alpha)$ в интегрально-матричное уравнение:

$$r(t) = 2S(t) / N_0(t), \quad \zeta = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(t) \cdot U(t)}{N_0(t)} dt$$

$$q^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\text{од}}^2(t) dt; \quad q_{\text{од}}^2(t) = \frac{\mathbb{E}_{\text{уд}}(t)}{N_0(t)}, \quad \mathbb{E}(t) = S^2(t)$$

Таким образом алгоритм сводится к взвешиванию временных участков сигнала, меньший вес у участков с большей долей помехи.

Многоканальный корреляционный
обнаружитель комплексного сигнала с
полностью известными параметрами

Комплексная модель узкополосного высокочастотного колебания

Полоса узкополосного сигнала значительно меньше несущей частоты f_0 . С учетом преселекции ограничены полосы помех $n(t) = \|n_i(t)\|$ и принимаемых колебаний $S(t) = \|S_i(t)\|$.

$$a(t) = a_m(t) \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(t)]$$

Изменение амплитуды $a_T(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$ за период $1/f_0$ несущей частоты невелики, в пределе их могут полагать постоянными. Воспользовавшись формулами Эйлера после замены переменных получим:

$$U(t) = \operatorname{Re} \left[A(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \right] = \left[A(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} + A^*(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \right] / 2$$

$$2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \psi(t) = \Psi, \cos(\Psi) = \operatorname{Re}(e^{j\Psi}) = (e^{j\Psi} + e^{-j\Psi}) / 2,$$

$$A(t) = a_m(t) \cdot e^{j\psi(t)} \quad \text{комплексная амплитуда высокочастотного колебания}$$

$$A^*(t) = a_m(t) \cdot e^{-j\psi(t)} \quad \text{ряженная комплексная амплитуда}$$

Взаимное влияние пары колебаний

$a(t)$ представляет собой действительную часть произведения комплексной амплитуды $A(t)$ и высокочастотного комплексного множителя $e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$ или к полусумму аналогичных комплексно-сопряженных произведений.

Возьмем другое высокочастотное колебание $b(t)$, взятое в какой-то иной момент времени t_2 :

$$b(t_2) = \left[B(t_2) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t_2} + B^*(t_2) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t_2} \right] / 2$$

Произведение $a(t_1) \cdot b(t_2)$ сведется к сумме функций разностного и суммарного времен, по формуле Эйлера сведем функции одного времени к реальной части, получим:

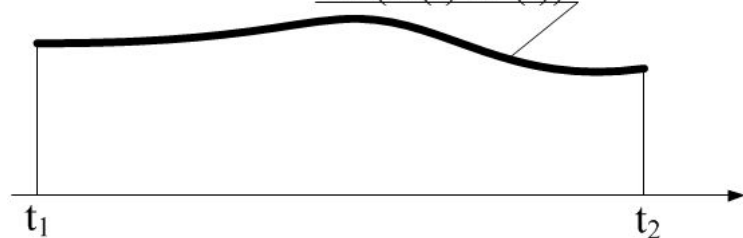
$$a(t_1) \cdot b(t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[A(t_1) \cdot B^*(t_2) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 - t_2)} + A(t) \cdot B(t_2) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 + t_2)} \right]$$

Приближенное вычисление интеграла произведения колебаний

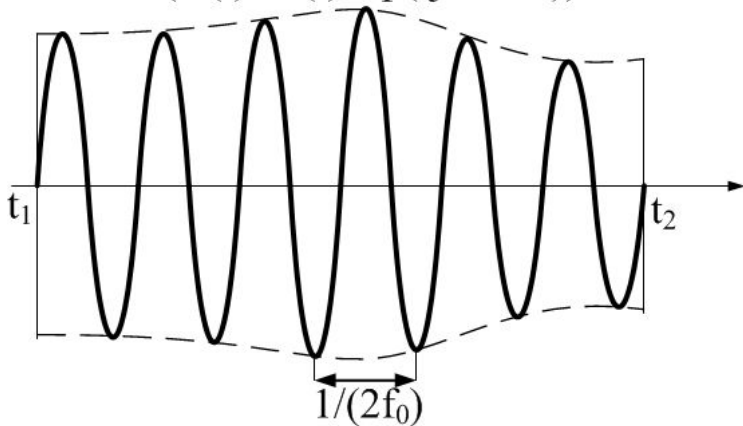
При $t_1 = t_2$ и медленно изменяющихся $A(t)$ и $B(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+1/f_0} A(t) \cdot B(t) \cdot e^{j \cdot 4\pi \cdot f_0 \cdot t} dt \approx A(t_0) \cdot B(t_0) \int_{t_0}^{t_0+1/f_0} e^{j \cdot 4\pi \cdot f_0 \cdot t} dt \approx 0$$

$\text{Re}(A(t) \cdot B^*(t))$



$\text{Re}(A(t) \cdot B^*(t) \exp(-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t))$



При интегрировании за время $t_2 - t_1$, существенно превышающее период колебаний $1/f_0$, получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot b(t) dt \approx \frac{1}{2} \text{Re} \int_{t_1}^{t_2} A(t) \cdot B^*(t) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot b(t) dt \approx \frac{1}{2} \text{Re} \int_{t_1}^{t_2} A^*(t) \cdot B(t) dt$$

Вычисление взаимной корреляционной функции случайных сигналов

$$M[a(t) \cdot b(t)] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} M[A(t_1) \cdot B^*(t_2)] e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 - t_2)} + \frac{1}{2} M[A(t_1) \cdot B(t_2)] e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 + t_2)} \right\}.$$

Случайными здесь могут быть амплитуды и начальные фазы колебаний $a(t_1)$, $b(t_2)$, соответственно $M[A(t) \cdot B(t)] = 0$.

$M[A(t) \cdot B^*(t)]$ может не быть равным нулю когда $A(t) = B(t)$, а случайные начальные фазы компенсируются, тогда:

$$C(t_1, t_2) = M[a(t) \cdot b(t)] = \operatorname{Re} \left\{ M[A(t_1) \cdot B^*(t_2)] / 2 \right\} e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 - t_2)}.$$

Взаимная корреляционная функция $C(t_1, t_2)$ двух колебаний $a(t_1)$ и $b(t_2)$ определяется действительной компонентой **взаимной корреляционной функции их комплексных амплитуд** с учетом высокочастотного множителя.

Комплексная корреляционная матрица

ПОМЕХИ

Если принимается сигнал $U(t) = \|U_i(t)\|$, тогда мгновенное значение в соответствующих каналах:

$$u_i(t) = \operatorname{Re} \left[U_i(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \right]$$

Взаимные корреляционные функции комплексных амплитуд помеховых напряжений в паре каналов имеют вид:

$$C_{ik}(t_1, t_2) = \frac{1}{M} \left[U_i(t_1) \cdot U_k^*(t_2) / 2 \right]$$

Совокупность этих функций образует комплексную матрицу помеховых взаимных корреляционных функций (**комплексную корреляционную матрицу помехи**):

$$C(t_1, t_2) = \left\| C_{ik}(t_1, t_2) \right\| = M \left[U(t_1) \cdot U^{*T}(t_2) / 2 \right],$$

$U(t) = \|N_i(t)\| = N(t)$ – комплексные амплитуды помех.

Свойства корреляционной матрицы ПОМЕХИ

Комплексная корреляционная матрица помехи $C(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2$ оказывается эрмитовой:

$$C_{ki}(t_1, t_2) = C_{ik}^*(t_1, t_2), C^T(t_1, t_2) = C^*(t_1, t_2)$$

При $t_1 \neq t_2$ справедлива лишь **обобщенная эрмитовость** комплексной корреляционной матрицы помехи: матрица переходит в комплексно-сопряженную, если вместе с заменой номеров строк и столбцов заменяются аргументы функций:

$$C_{ki}(t_1, t_2) = C_{ik}^*(t_2, t_1), C^T(t_1, t_2) = C^*(t_2, t_1)$$

Весовая интегральная сумма при переходе к комплексной скалярной записи принимает вид

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} U_i(t) \cdot R_i^*(t) dt = \operatorname{Re} Z, Z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U^T(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) dt$$

Комплексная запись основных соотношений обнаружения

Интегрально-матричное уравнение комплексного весового вектора $\mathbf{R}(t)$ следует из уравнения вещественного весового вектора $\mathbf{r}(t)$ и после преобразования получим:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}(t_1, t_2) \cdot \mathbf{R}(t_2) dt_2 = \mathbf{S}(t_1)$$

Выражение параметра обнаружения:

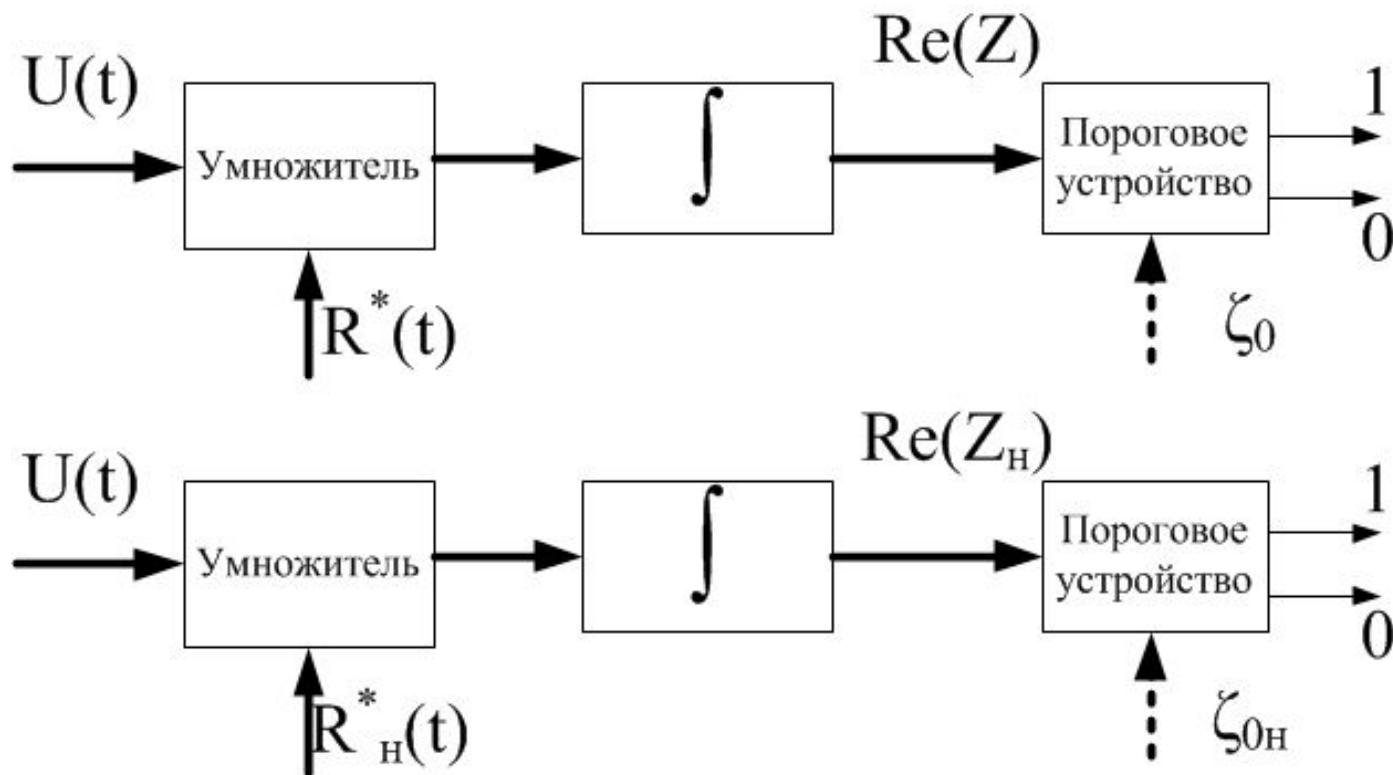
$$q^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^T(t_1) \cdot \mathbf{C}^*(t_1) dt_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^T(t_1) \cdot \mathbf{R}^*(t_2) dt_1 = \mathbf{H}$$

Проведя замены и подставив получим:

$$q^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^T(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) dt$$

Схемы обнаружителя непрерывных СИГНАЛОВ



Операция вычисления $\text{Re}(Z)$ опущена, переход к нормированному весовому вектору $\mathbf{R}_H(t) = \mathbf{R}(t)/q$ и к порогу ζ_{0H} , определяемому условной вероятностью ложной тревоги F .

Алгоритмы многоканального обнаружения сигналов

	Дискретный сигнал	Непрерывный действительный сигнал	Непрерывный комплексный сигнал
Принимаемая реализация	$U= U_k $ $U_k=A \cdot S_k+n_k$	$U(t)= U_k(t) $ $U_k(t)=A \cdot S_k(t)+n_k(t)$	$U(t)= U_k(t) $ $U_k(t)=A \cdot S_k(t)+n_k(t)$
Сигнал	$S= S_k $	$S(t)= S_k(t) $	$S(t)= S_k(t) $
Корреляционная матрица помехи	$C= C_{i,k} $	$C(t_1,t_2)= C_{i,k}(t_1,t_2) $	$C(t_1,t_2)= C_{i,k}(t_1,t_2) $
Весовая сумма (интеграл)	$\zeta=U^T r$	$\zeta=\int U^T(t)r(t)dt$	$\zeta=\text{Re}(Z)$ $Z=0,5 \cdot \int U^T(t)R^*(t)dt$
Уравнение весового вектора	$C \cdot r=S$	$\int C(t_1,t_2)r(t_2)dt_2=S(t_1)$	$0,5 \cdot \int C(t_1,t_2)R(t_2)dt_2=S(t_1)$
Параметр обнаружения	$q^2=S^T \cdot r$	$q^2=\int S^T(t)r(t)dt$	$q^2=\int S^T(t)R^*(t)dt$

Модель белого шума для узкополосного сигнала

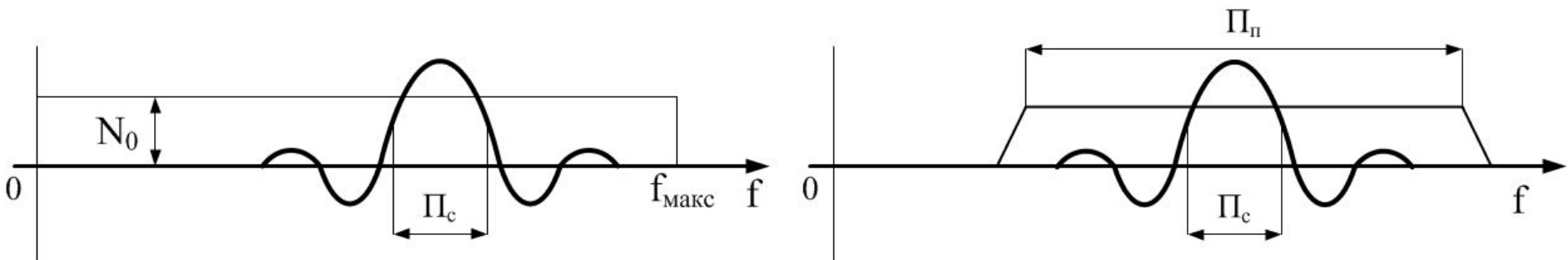
Действительная корреляционная функция стационарной помехи с равномерно распределенной в полосе Π_{Π} спектральной плотностью мощности N_0 соответствует выражению

$$c(t_1, t_2) = N_0 \int_{f_{\Pi} - 2}^{f_{\Pi} + 2} \cos(2\pi \cdot f \cdot (t_1 - t_2)) df = N_0 \cdot \text{Re} \left[\Delta(t_1 - t_2) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t_1 - t_2)} \right]$$

$$\Delta(t) = \frac{\text{Si}(\pi \cdot \frac{\Pi_{\Pi}}{t})}{\pi \cdot t}$$

Если полоса помехи больше полосы сигнала функция $\Delta(\tau)$ переходит в дельта-функцию, тогда:

$$C(t_1, t_2) = N_0 \cdot \delta(t_1 - t_2)$$



Синтез многоканального обнаружителя для некоррелированных помех

Принимаемый сигнал на антенной решетке:

$$S(t, \alpha) = S(t) \cdot S(\alpha), S(\alpha) = \left\| e^{-j \cdot \alpha_i} \right\|$$

Вектор α характеризует сдвиги фаз α_i ($i=1, 2, \dots, M$), зависящие от угловых координат источника сигнала.

Помеха не коррелирована по времени и элементам разрешения, спектральная плотность мощности постоянная.

$$C(t_1, t_2) = N_0 \cdot \mathbf{I} \cdot \delta(t_1 - t_2).$$

Весовой вектор будет иметь вид:

$$\mathbf{R}(t) = 2S(t) \cdot S(\alpha) / N_0$$

До расчета весового интеграла следует провести пространственную обработку:

$$U_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^M U_i(t) \cdot e^{j \cdot \alpha_i}$$

Алгоритм обработки сигнала и показатель обнаружения

Алгоритм расчете корреляционного интеграла ζ :

$$\zeta = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\Sigma}(t) \cdot S^*(t) dt / N_0$$

Показатель обнаружения в таком случае:

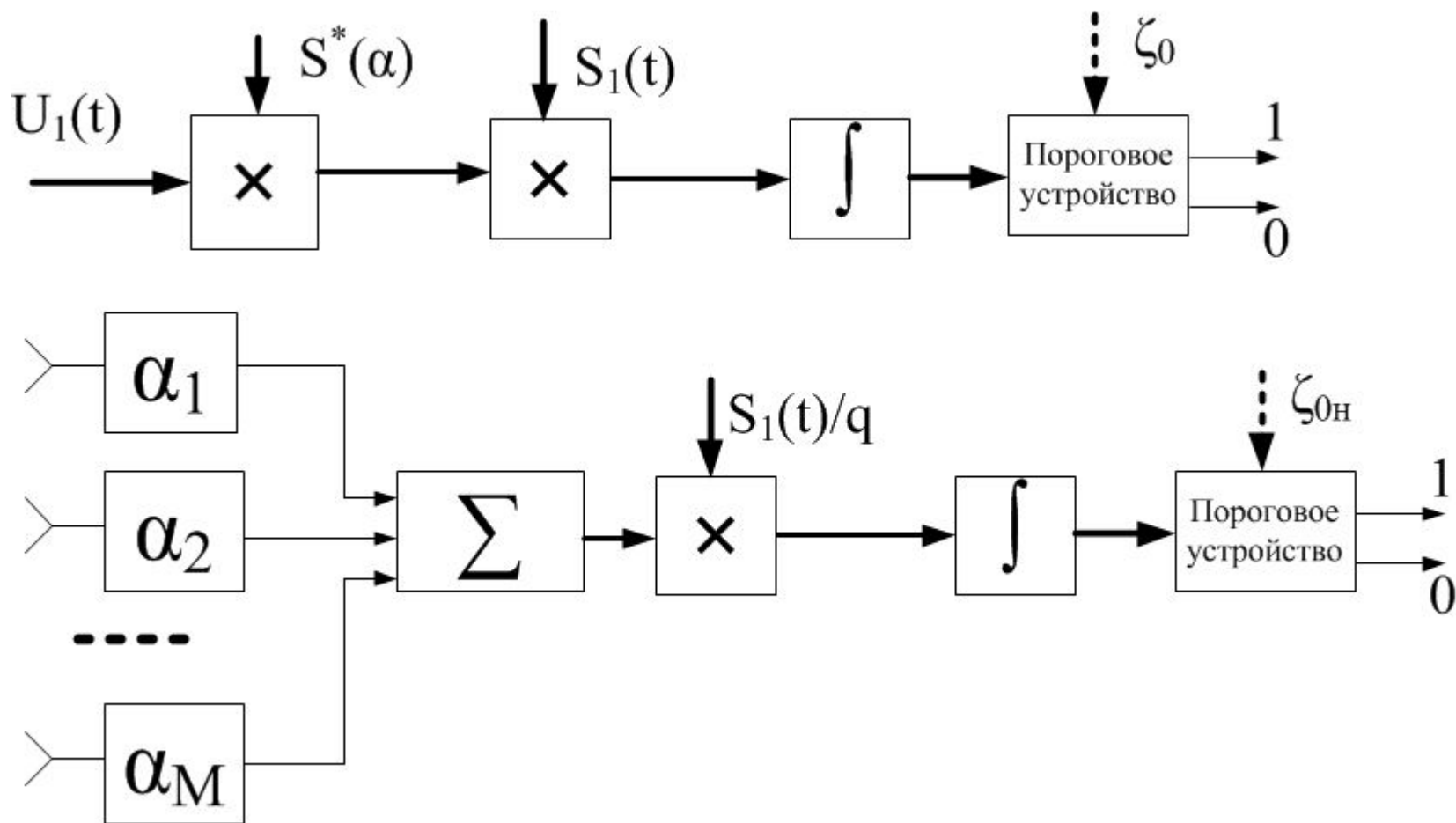
$$q^2 = S^T(\alpha) \cdot S^*(\alpha) \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = 2M \cdot E_0 / N_0$$

Множество элементов решетки

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt / 2 - \text{энергия сигнала.}$$

Алгоритм может использоваться для квадратурного представления сигнала без непосредственного представления сигнала в комплексной форме.

Схема многоканального обнаружителя для некоррелированных помех



Синтез многоканального обнаружителя на фоне коррелированных помех

Комплексная корреляционная матрица помехи

$$C(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} N_{01} & \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \cdot \rho \\ \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \cdot \rho^* & N_{02} \end{vmatrix} \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

$\rho = \frac{C_{12}}{\sqrt{N_{01} \cdot N_{02}}}$ — комплексный коэффициент межканальной корреляции

Сигнал имеет вид:

$$\bar{S}(t) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot S(t)$$

Условия соответствуют приему остронаправленной и слабонаправленной антеннами, соответственно принимаемым слабонаправленной антенной сигналом можно пренебречь. Аналогична ситуация при приеме различных поляризаций.

Система уравнений для комплексных весовых функций:

$$N_{01} \cdot R_1(t) + \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \cdot \rho \cdot R_2(t) = 2S(t), \quad \sqrt{N_{01} \cdot N_{02}} \cdot \rho^* \cdot R_1(t) + N_{02} \cdot R_2(t) = 0$$

Весовые коэффициенты и алгоритм работы обнаружителя

Решая систему уравнений получим весовые коэффициенты:

$$R_1(t) = \frac{2 \cdot X(t)}{N_{01} \cdot (1 - |\rho|^2)}, R_2(t) = \frac{-2\rho^* \cdot X(t)}{\sqrt{N_{01} / N_{02}} \cdot (1 - |\rho|^2)}$$

Выражение весовой суммы ζ в таком случае:

$$\zeta = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\Sigma}(t) \cdot S^*(t) dt / N_0, U_{\Sigma}(t) = \frac{[U_1(t) - \sqrt{N_{01} / N_{02}} \cdot \rho \cdot U_2(t)]}{(1 - |\rho|^2)}$$

Если $\rho \neq 0$ необходимо провести межканальную компенсацию:

$$U_{\text{комп}}(t) = \frac{\sqrt{N_{01} / N_{02}} \cdot \rho \cdot U_2(t)}{(1 - |\rho|^2)}$$

Параметр обнаружения будет иметь вид:

$$q^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt}{N_{01} \cdot (1 - |\rho|^2)} = \frac{2 \cdot E}{N_{01} \cdot (1 - |\rho|^2)}$$