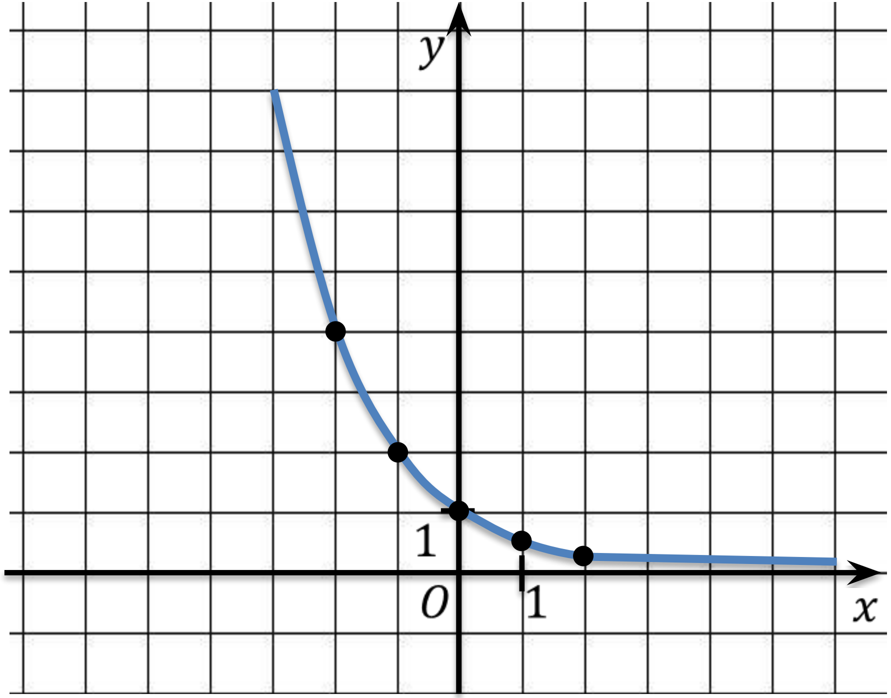
# Показательные уравнения

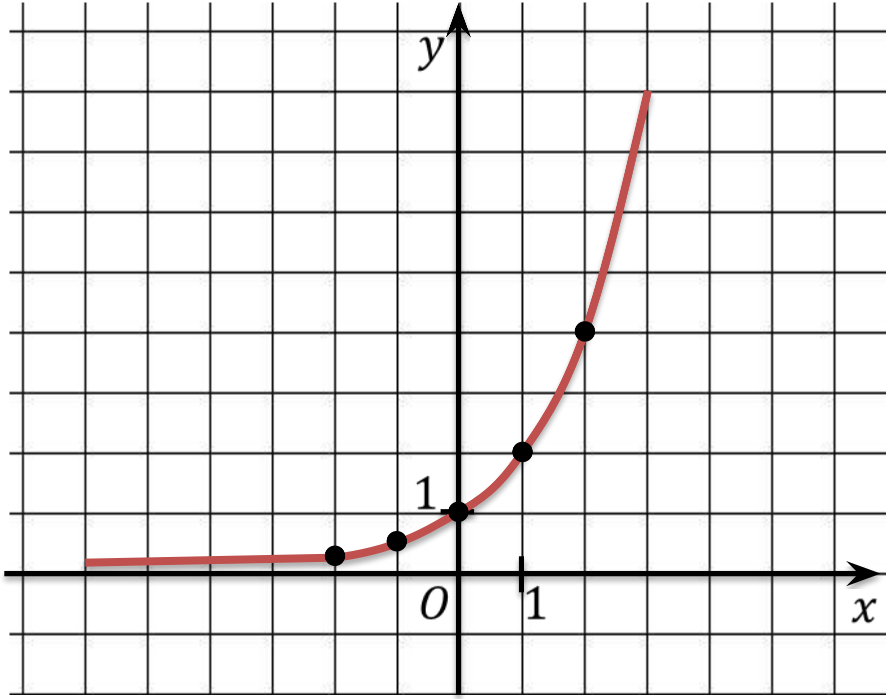
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

| | |
|---|---|
| Возрастает | Убывает |
| Непрерывна | Непрерывна |

$y = a^x, 0 < a < 1$




$y = a^x, a > 1$




Экспонент
а

**Показательными уравнениями** называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

**Теорема 1.** Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

# Пример:

Решить уравнение $2^x = \frac{1}{64}$.

Решение:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$x = -6$$

Ответ: $x = -6$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

# Пример:

Решить уравнение $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{2}$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решение:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{x-3} = 2^{1+\frac{1}{2}+x-3} = 2^{x-1,5}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$2^{x-1,5} = 2^{-1}$$

$$x - 1,5 = -1$$

$$x = 0,5$$

Ответ: $x = 0,5$.

# Пример:

Решить уравнение $5^{x^2-2x-1} = \frac{1}{25}$.

Решение:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

$$5^{x^2-2x-1} = 5^{-2}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

# Пример:

Решить уравнение $2^x = 3^x$.

Решение:

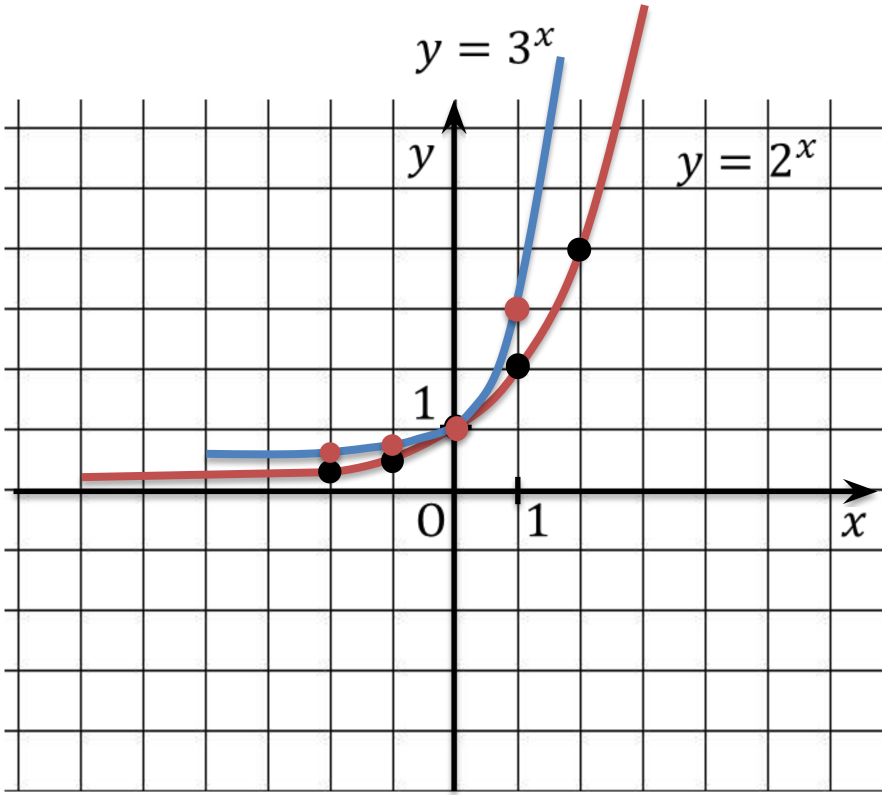
$$\frac{2^x}{2^x} = \frac{3^x}{2^x}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$x = 0$$



# Пример:

Решить уравнение $3^x - 3^{x+3} = -78$.

Решение:

$$3^x - 3^{x+3} = 3^x - 3^x \cdot 3^3 = 3^x - 27 \cdot 3^x = -26 \cdot 3^x$$

$$-26 \cdot 3^x = -78$$

$$3^x = 3$$

$$3^x = 3^1$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

# Пример:

Решить уравнение $7^{x-1} - 6^{2-2x} = 0$.

Решение:

$$\frac{7^x}{7} - \frac{6^2}{6^{2x}} = 0$$

$$\frac{7^x \cdot 6^{2x} - 6^2 \cdot 7}{7 \cdot 6^{2x}} = 0$$

$$7 \cdot 6^{2x} \neq 0 \Rightarrow 7^x \cdot 6^{2x} - 6^2 \cdot 7 = 0$$

$$(7 \cdot 36)^x = 7 \cdot 36$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

$$6^{2-2x} = 6^{-2(x-1)} = \left(\frac{1}{6^2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$$

$$7^{x-1} - \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 7^{x-1} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$$

$$(7 \cdot 36)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow (7 \cdot 36)^{x-1} = (7 \cdot 36)^0$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

# Пример:

Решить уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt{\frac{3^3}{5^3}} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

# Пример:

Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$y = 2^x$

$y^2 + 2y - 24 = 0$

$D = 4 + 96 = 100 \Rightarrow y_1 = \dfrac{-2 + 10}{2} = 4;\ y_2 = \dfrac{-2 - 10}{2} = -6$

$2^x = 4$ или $2^x = -6$ – нет решений

$x = 2$

# Пример:

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 16^{3x-y} \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72 \end{cases}.$$

Решение:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{1+\frac{1}{2}(x+y)} \\ 16^{3x-y} = 2^{4(3x-y)} \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{1+\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)} \Rightarrow 1+\frac{1}{2}(x+y) = 4(3x-y)$$

$$1+\frac{1}{2}(x+y) = 4(3x-y) \Leftrightarrow 4{,}5y - 11{,}5x + 1 = 0$$

$z = 3^{x+y} \Rightarrow z^2 - z = 72 \Rightarrow z_1 = -8;\ z_2 = 9 \Rightarrow 3^{x+y} = -8$ – нет решений,

$3^{x+y} = 9 \Leftrightarrow x + y = 2$

$$\begin{cases} 4{,}5y - 11{,}5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}5y - 11{,}5(2-y) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{8} \end{cases}$$

# Основные методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.