Комплексные числа»

<u>Основные понятия</u>

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm i$$

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица (***i*** - от французского imaginaire «мнимый»)

<u>Комплексным числом</u> называется выражение вида

$z = a + ib$, где ***a, b*** - действительные числа, ***i*** - мнимая единица, $i^2 = -1$

a - называется действительной частью числа *z*, $a = \operatorname{Re} z$

b - называется мнимой частью числа *z*, $b = \operatorname{Im} z$

Выражение $z = a + ib$ называют ***<u>алгебраической формой записи комплексного числа</u>***

<u>***Основные понятия***</u>

$$z = a + ib$$

Если ***a* = 0,** то ***ib*** – чисто мнимое число.

Если ***b* = 0,** то получаем действительное число ***a***.

Комплексные числа $z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$, которые отличаются только знаком мнимой части, называются <u>***сопряженными***</u>

Основные понятия

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю.

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Геометрическое изображение комплексного числа

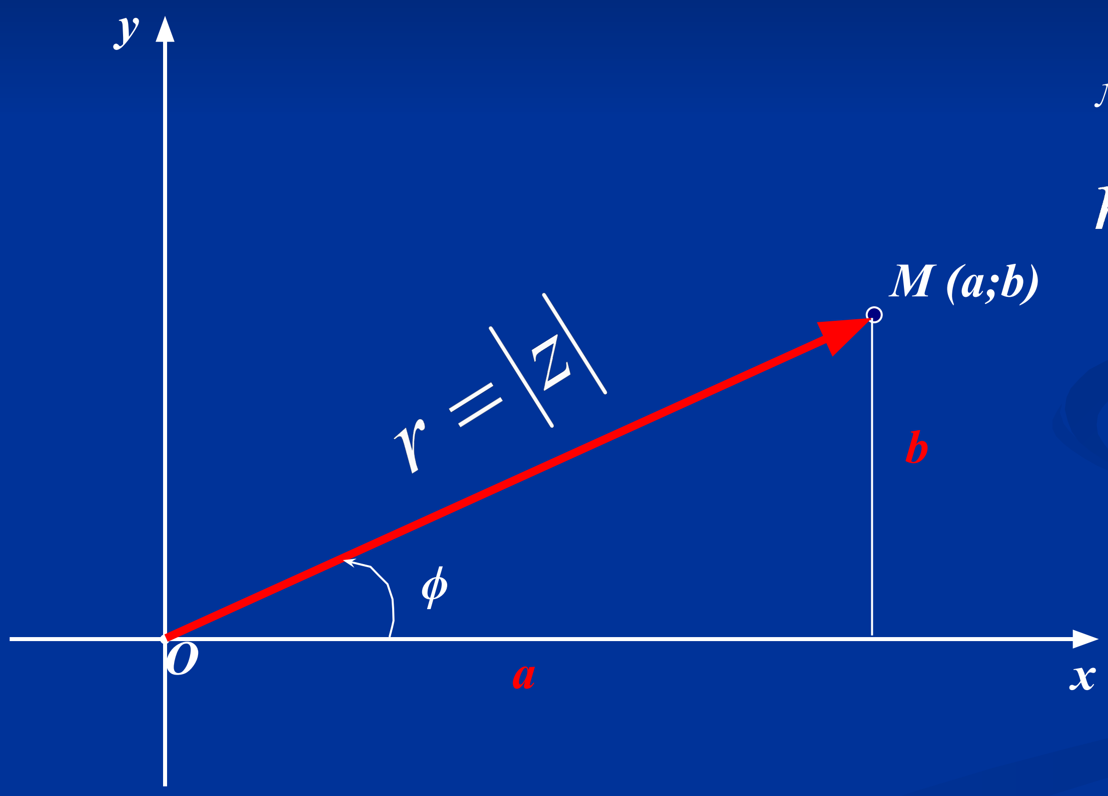
$$z = a + ib$$

аргумент комплексного числа

$$\varphi = Arg z$$

модуль комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$a = r\cos\varphi,$$

$$b = r\sin\varphi,$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$

<u>Алгебраическая, тригонометрическая форма записи комплексного числа</u>

$$\boxed{\begin{aligned} z &= a + ib \\ a &= r\cos\varphi, \\ b &= r\sin\varphi, \end{aligned}}$$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется ***<u>тригонометрической формой записи комплексного числа</u>***

$$\Downarrow$$

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Алгебраическая, тригонометрическая и форма записи комплексного числа

$z = a + ib$ - ***алгебраическая форма***;

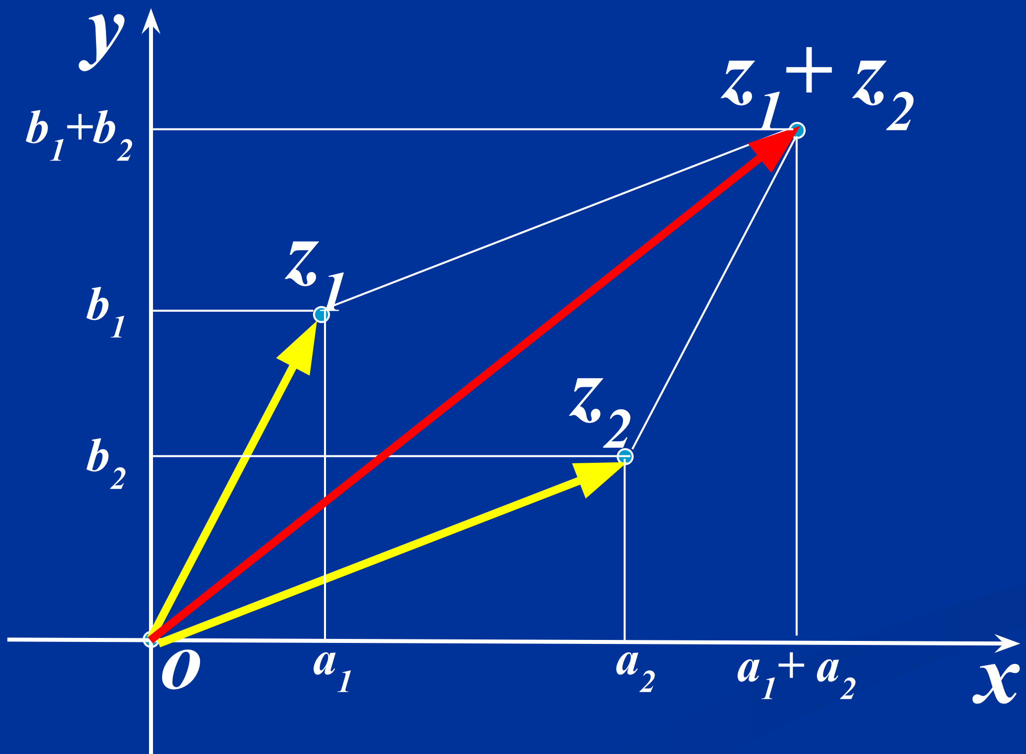
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - ***тригонометрическая форма***;

Действия с комплексными числами

В алгебраической форме $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$

Суммой двух комплексных чисел называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$



Пример:

$z_1 = 2 - i;$

$z_2 = -1 + 3i$

$z_1 + z_2 =$

$= (2 - i) + (-1 + 3i) =$

$= 1 + 2i$

Действия с комплексными числами

Произведением комплексных чисел называется такое комплексное число, которое получается, если перемножить числа как многочлены, учитывая что

$$i^2 = -1.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$$

после преобразования, получим

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

Пример:

$$(3+2i)(1-i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 =$$

$$= 3 + 2 + i(-3+2) = 5 - i$$

Произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

<u>Действия с комплексными числами</u>

<u>Частным</u> от деления z_1 на z_2 называется комплексное число z , удовлетворяющее условию:

$$z_1 = z_2 \cdot z \quad \Rightarrow \quad a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

Можно доказать, что $x = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$

Тогда,

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

<u>Пример:</u>

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-3i-4i-6}{5} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Действия с комплексными числами

В тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Действия с комплексными числами. Формула Муавра

Для нахождения частного двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме применяют следующие формулы:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

В силу правила умножения комплексных чисел получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ ***- формула Муавра***