Учение без размышления бесполезно,
но и размышление без учения опасно.

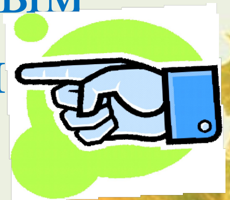
Конфуций

Перестановки.
Сочетания.
Размещения.

Комбинаторика

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».

Термин "комбинаторика" был введён знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем, - всемирн известным немецким учёным.

Комбинаторные задачи

Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор

В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными.

ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

Произведение всех натуральных чисел от n до 1 называют n-факториал и обозначают n!

n! = n(n-1)(n-2)*…..*2*1, где n - натуральное число

Принято считать, что 0! = 1

Пример:

1).Вычислить 5!

Решение: 5!=5*4*3*2*1=120

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16*15*14!}{14!}$ = 16*15=240

3) Вычислить $\frac{15!+16!}{14!}$

Решение $\frac{15!+16!}{14!} = \frac{15!(1+16)}{14!} = 15*17=255$

ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

Пример:

Решить уравнение: $$\frac{(n+2)!}{n!} = 20;$$

Решение: $$\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = 20;$$

$$(n+1)(n+2) = 20;$$

Решаем квадратное уравнение, получаем: $n_1 = 3; n_2 = -6$

Ответ: $n = 3$

-6 посторонний корень, так как n натуральное число

Проверьте себя.

Вычислите:

$$\frac{7!}{5!}$$

$$\frac{15!}{10!\cdot 5!}$$

$$\frac{5!+6!+7!}{8!-7!}$$

Ответы

1) **42**
2) **3003**
3) $\frac{7}{6}$

Решаем самостоятельно (1 вариант – нечетные варианты, 2 – четные)

1 вариант

- 1 $\frac{100!}{99!}$
- 2 $\frac{11!}{8! \cdot 5!}$
- 3 $\frac{4! + 6! + 7!}{6! - 5!}$;

2 вариант

- 1 $\frac{2015!}{2014!}$
- 2 $\frac{16!}{14! \cdot 3!}$
- 3 $\frac{9! + 10! + 11!}{12! - 11!}$;

Проверяем:

1 вариант

1) 100
2) 8,25
3) 48,2

2 вариант

- 1) 2015
- 2) 40
- 3) 1,1

Различают три вида соединений:
размещения, **перестановки** и **сочетания**.

Размещения

Размещениями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.

Определение: Пусть имеется множество, содержащее m элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов называется размещением из m элементов по n элементов.

Размещения

Количество размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

А теперь решим задачу для случая m=8, n=3:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6\cdot7\cdot8 = 336(\textit{способов})$$

Решим задачу:

- 1).Вычислить 5!

Решение: 5!=5*4*3*2*1=120

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16*15*14!}{14!}$ = 16*15=240

3) Вычислить $\frac{15!+16!}{14!}$

Решение $\frac{15!+16!}{14!} = \frac{15!(1+16)}{14!} = 15*17=255$

Сочетания

Сочетаниями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле .

Определение: Пусть имеется множество, состоящее из m элементов. Каждое его подмножество, состоящее из n элементов называется сочетанием из m элементов по n элементов.

Сочетания

1).Вычислить 5!

Решение: 5!=5*4*3*2*1=120

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16*15*14!}{14!}$ = 16*15=240

3) Вычислить $\frac{15!+16!}{14!}$

Решение $\frac{15!+16!}{14!} = \frac{15!(1+16)}{14!}$ = 15*17=255

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)} = 7\cdot 8 = 56 (\textit{способов})$$

Решим задачу

- 1). Вычислить 5!

Решение: 5!=5*4*3*2*1=120

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16*15*14!}{14!}$ = 16*15=240

3) Вычислить $\frac{15!+16!}{14!}$

Решение $\frac{15!+16!}{14!}=\frac{15!(1+16)}{14!}$= 15*17=255

Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие <u>из одних и тех же</u> **различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения.

Определение: Размещения из m элементов по m элементов называются перестановками из m элементов.

Перестановки

Количество всех возможных перестановок выражается формулой

$$P_m=m!$$

Решим задачу для $m=4$

$P_4=4!=4*3*2*1=24$

Решаем задачу:

Сколько шестизначных чисел, кратных пяти можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что в числе нет одинаковых цифр.

Решение: при составлении подмножеств мы будем использовать сразу все шесть цифр. Важен лишь их порядок. Так как число кратно 5, то на последней позиции должна стоять цифра 5 или 0. Нуля нам не предлагают, поэтому числа должны оканчиваться цифрой 5. Поэтому переставлять местами мы может только первые пять цифр.

$P_5 = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$ (чисел)

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов k мест	n элементов k мест
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$\boxed{P_n = n!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Задания для самопроверки

Выбрать и <u>решить</u> задачи, где рассматривается комбинация ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ, РАЗМЕЩЕНИЯ

1. Изменяя порядок слов: **руки, мою, я,** составьте всевозможные предложения.
2. Сколькими способами в игре «спортлото» можно выбрать 6 номеров из 49?
3. Сколькими способами можно выбрать 2 буквы из слова "конверт"?
4. Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?
5. Сколько существует способов выбора трёх ребят из 4-х желающих дежурить в столовой?
6. На собрании пожелали выступить 5 человек – Иванов, Петров, Сидоров, Белочкин и Пеночкин. Сколькими способами можно составить список ораторов?
7. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 человек, можно создать из 5 преподавателей?
8. Сколько различных трехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
9. Сколько различных четырехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
10. Сколькими способами можно составить расписание на день из 4 различных уроков, если изучается 10 предметов?
11. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?
12. В хирургическом отделении работают 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе хирурга и ассистента?

Проверяем себя

ПЕРЕСТАНОВКИ

1 Изменяя порядок слов: **руки, мою, я,** составьте всевозможные предложения.

6 На собрании пожелали выступить 5 человек – Иванов, Петров, Сидоров, Белочкин и Пеночкин. Сколькими способами можно составить список ораторов.

9 Сколько различных четырехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

11 Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?

СОЧЕТАНИЯ

2 Сколькими способами в игре «спортлото» можно выбрать 6 номеров из 49?

3 Сколькими способами можно выбрать 2 буквы из слова "конверт"?

5 Сколько существует способов выбора трёх ребят из 4-х желающих дежурить в столовой?

7 Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 человек, можно создать из 5 преподавателей?

РАЗМЕЩЕНИЯ

4 Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?

8 Сколько различных трехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

10 Сколькими способами можно составить расписание на день из 4 различных уроков, если изучается 10 предметов?

12 В хирургическом отделении работают 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе хирурга и ассистента?

Ответы

1. Я мою руки. Руки мою я. Мою я руки. Я руки мою. Руки я мою. Мою руки я. = 6
2. $C_{49}^{9} = 1383816$
3. $C_7^2 = 21$
4. $A_{25}^4 = 303600$
5. $C_4^3 = 4$
6. $P_5 = 120$
7. $C_7^3 = 35$
8. $A_4^3 = 24$
9. $P_4 = 24$
10. $A_{10}^4 = 30240$
11. $P_3 = 6$

12 $A_{40}^2 = 1560$

Проверь себя

1.Определите вид соединений:

а) Соединения из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются ___________

б) Соединения из m элементов по n, отличающихся друг от друга только составом элементов, называются _________________

в) Соединения из m элементов по n, отличающихся друг от друга составом элементом и порядком их расположения, называются __________

2.Восстановите соответствие типов соединений и формул для их подсчёта

1	$A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	А сочетания
2	$P_n = n!$	В размещения
3	$C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$	С перестановки

Задача

Встретились несколько друзей и все обменялись рукопожатиями. Всего было сделано 15 рукопожатий. Сколько встретилось друзей?

Исторические сведения

- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.

- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.

- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики, первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Пьер Ферма
1601-1665

Готфрид
Вильгельм
Лейбниц
1646-1716

Первые научные исследования принадлежат:

Блез Паскаль
1623-1662

Леонард Эйлер
1707-1783

Спасибо за внимание!!.