

*Учение без размышления
бесполезно,
но и размышление без учения
опасно.*



Конфуций

***Перестановки.
Сочетания.
Размещения.***





Комбинаторика

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».

Термин "комбинаторика" был введен знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем, - всемирно известным немецким учёным.



Комбинаторные задачи



Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор



В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными.

ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

Произведение всех натуральных чисел от n до 1 называют n -факториал и обозначают $n!$

$n! = n(n-1)(n-2)*\dots*2*1$, где n - натуральное число

Принято считать, что $0! = 1$

Пример:

1). Вычислить $5!$

Решение: $5! = 5*4*3*2*1 = 120$

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16*15*14!}{14!} = 16*15 = 240$

3) Вычислить $\frac{15!+16!}{14!}$

Решение $\frac{15!+16!}{14!} = \frac{15!(1+16)}{14!} = 15*17 = 255$

ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

Пример:

Решить
уравнение:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 20;$$

Решение: $\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = 20;$

$$(n+1)(n+2) = 20;$$

Решаем квадратное уравнение,
получаем:

$$n_1 = 3; n_2 = -6$$

Ответ $n = 3$

:

-6 посторонний корень, так как n
натуральное число

Проверьте себя.

Вычислите:

$$\frac{7!}{5!}$$

$$\frac{15!}{10! \cdot 5!}$$

$$\frac{5! + 6! + 7!}{8! - 7!}$$



ОТВЕТЫ

1) 42

2) 3003

3)

$\frac{7}{6}$



Решаем самостоятельно (1 вариант – нечетные варианты, 2 – четные)

1 вариант

• 1

$$\frac{100!}{99!}$$

• 2

$$\frac{11!}{8! \cdot 5!}$$

• 3

$$\frac{4! + 6! + 7!}{6! - 5!}$$

2 вариант

• 1

$$\frac{2015!}{2014!}$$

• 2

$$\frac{16!}{14! \cdot 3!}$$

• 3

$$\frac{9! + 10! + 11!}{12! - 11!}$$

Проверяем:

1 вариант

- 1) 100
- 2) 8,25
- 3) 48,2

2 вариант

- 1) 2015
- 2) 40
- 3) 1,1



Различают три вида соединений:
размещения, перестановки и сочетания.

Размещения

Размещениями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.

Определение: Пусть имеется множество, содержащее m элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов называется размещением из m элементов по n элементов.



Размещения

Количество размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

А теперь решим задачу для случая $m=8$, $n=3$:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336 \text{ (способов)}$$

Решим задачу:

1) Вычислить $5!$

Решение: $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16 * 15 * 14!}{14!} = 16 * 15 = 240$

3) Вычислить $\frac{15! + 16!}{14!}$

Решение $\frac{15! + 16!}{14!} = \frac{15!(1 + 16)}{14!} = 15 * 17 = 255$



Сочетания

Сочетаниями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле .

Определение: Пусть имеется множество, состоящее из m элементов. Каждое его подмножество, состоящее из n элементов называется сочетанием из m элементов по n элементов.

Сочетания

1). Вычислить $5!$

Решение: $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16 * 15 * 14!}{14!} = 16 * 15 = 240$

3) Вычислить $\frac{15! + 16!}{14!}$

Решение $\frac{15! + 16!}{14!} = \frac{15!(1 + 16)}{14!} = 15 * 17 = 255$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{1-2-3-4-5-6-7-8}{(1-2-3)-(1-2-3-4-5)} = 7 \cdot 8 = 56 \text{ (способов)}$$

Решим задачу

1) Вычислить $5!$

Решение: $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

2) Вычислить $\frac{16!}{14!}$

Решение: $\frac{16 * 15 * 14!}{14!} = 16 * 15 = 240$

3) Вычислить $\frac{15! + 16!}{14!}$

Решение $\frac{15! + 16!}{14!} = \frac{15!(1 + 16)}{14!} = 15 * 17 = 255$



Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же различных объектов и отличающиеся только порядком их расположения.

Определение: Размещения из m элементов по n элементов называются перестановками из m элементов.

Перестановки

Количество всех возможных перестановок выражается формулой

$$P_m = m!$$

Решим задачу для $m=4$

$$P_4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$$



Решаем задачу:

Сколько шестизначных чисел, кратных пяти можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что в числе нет одинаковых цифр.

Решение: при составлении подмножеств мы будем использовать сразу все шесть цифр. Важен лишь их порядок. Так как число кратно 5, то на последней позиции должна стоять цифра 5 или 0. Нуля нам не предлагают, поэтому числа должны оканчиваться цифрой 5. Поэтому переставлять местами мы может только первые пять цифр.

$$P_5 = 5! = 5*4*3*2*1 = 120 \text{ (чисел)}$$

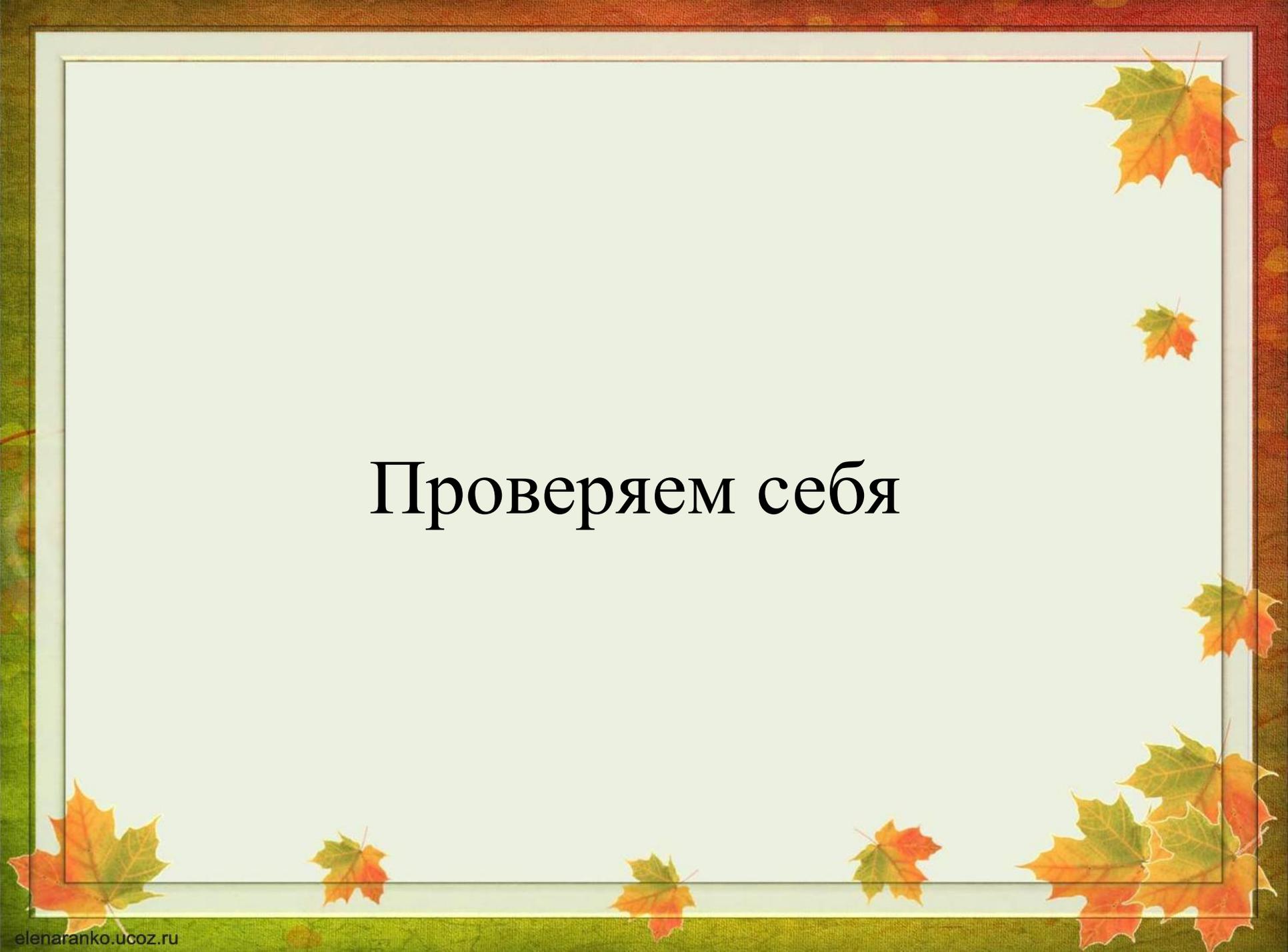
Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов k мест	n элементов k мест
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$



Задания для самопроверки

Выбрать и решить задачи, где рассматривается комбинация ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ, РАЗМЕЩЕНИЯ

1. Изменяя порядок слов: **руки, мою, я**, составьте всевозможные предложения.
2. Сколькими способами в игре «спортлото» можно выбрать 6 номеров из 49?
3. Сколькими способами можно выбрать 2 буквы из слова "конверт"?
4. Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?
5. Сколько существует способов выбора трёх ребят из 4-х желающих дежурить в столовой?
6. На собрании пожелали выступить 5 человек – Иванов, Петров, Сидоров, Белочкин и Пеночкин. Сколькими способами можно составить список ораторов?
7. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 человек, можно создать из 5 преподавателей?
8. Сколько различных трехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
9. Сколько различных четырехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
10. Сколькими способами можно составить расписание на день из 4 различных уроков, если изучается 10 предметов?
11. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?
12. В хирургическом отделении работают 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе хирурга и ассистента?

The image features a decorative border with autumn leaves in shades of green, yellow, and orange. The leaves are scattered around the perimeter of a white rectangular area. The background of the entire image is a textured, mottled green and brown.

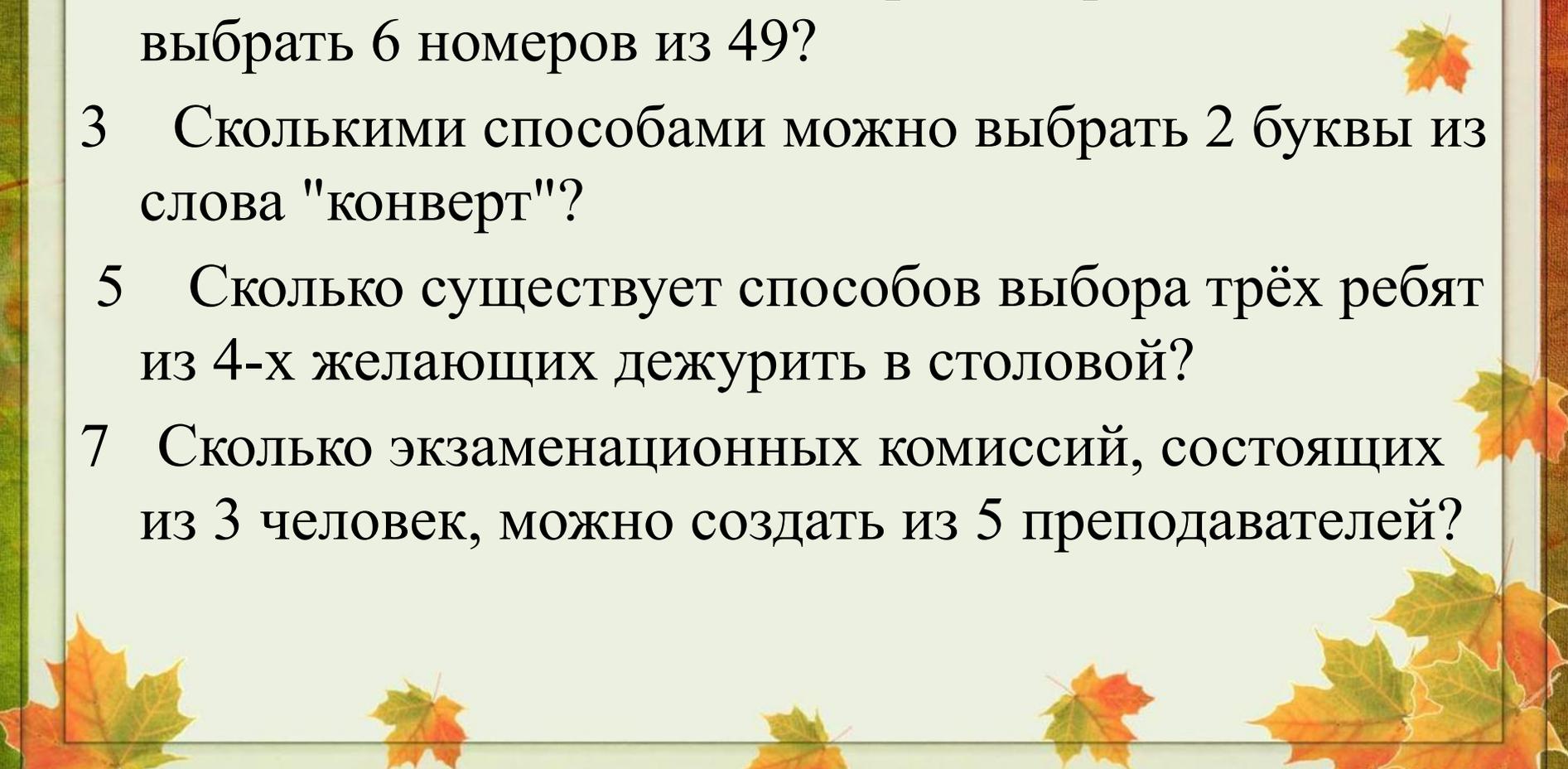
Проверяем себя

ПЕРЕСТАНОВКИ

- 1 Изменяя порядок слов: **руки, мою, я**, составьте всевозможные предложения.
- 6 На собрании пожелали выступить 5 человек – Иванов, Петров, Сидоров, Белочкин и Пеночкин. Сколькими способами можно составить список ораторов.
- 9 Сколько различных четырехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
- 11 Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?

СОЧЕТАНИЯ



- 2 Сколькими способами в игре «спортлото» можно выбрать 6 номеров из 49?
- 3 Сколькими способами можно выбрать 2 буквы из слова "конверт"?
- 5 Сколько существует способов выбора трёх ребят из 4-х желающих дежурить в столовой?
- 7 Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 человек, можно создать из 5 преподавателей?
- 

РАЗМЕЩЕНИЯ

- 4 Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?
- 8 Сколько различных трехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
- 10 Сколькими способами можно составить расписание на день из 4 различных уроков, если изучается 10 предметов?
- 12 В хирургическом отделении работают 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе хирурга и ассистента?

Ответы

1. Я мою руки. Руки мою я. Мою я руки. Я руки мою. Руки я мою.
Мою руки я. = 6
2. $C_{49}^9 = 1383816$
3. $C_7^2 = 21$
4. $A_{25}^4 = 303600$
5. $C_4^3 = 4$
6. $P_5 = 120$
7. $C_7^3 = 35$
8. $A_4^3 = 24$
9. $P_4 = 24$
10. $A_{10}^4 = 30240$
11. $P_3 = 6$
12. $A_{40}^2 = 1560$



Проверь себя

1. Определите вид соединений:

- а) Соединения из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются _____
- б) Соединения из m элементов по n , отличающихся друг от друга только составом элементов, называются _____
- в) Соединения из m элементов по n , отличающихся друг от друга составом элементов и порядком их расположения, называются _____

2. Восстановите соответствие типов соединений и формул для их подсчёта

1	$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$	А сочетания
2	$P_n = n!$	В размещения
3	$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$	С перестановки

Задача

Встретились несколько друзей и все обменялись рукопожатиями. Всего было сделано 15 рукопожатий. Сколько встретилось друзей?



Исторические сведения

- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.
- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Черталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.
- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики, первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».



Пьер Ферма
1601-1665

Готфрид
Вильгельм
Лейбниц
1646-1716



**Первые научные
исследования**

принадлежат:



Блез Паскаль
1623-1662

Леонард Эйлер
1707-1783



Спасибо за внимание!!.

