Сибирский государственный индустриальный университет

Кафедра прикладных информационных технологий и программирования

Инструментальные средства работы с графической информацией

Бабичева Н.Б.

Лекция 3
Преобразование координат

Координатный метод

Координатный метод был введен в XVII веке французскими математиками Р. Декартом и П.Ферма

- каждая точка (пиксел) на экране монитора, на листе бумаги при печати задается координатами
- любой объект находится в пространстве и описывается своими координатами
- при изменении положения объекта в пространстве изменяются его координаты

Преобразование координат

Пусть задана ***n***-мерная система координат в базисе ($\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \ldots, \boldsymbol{k_n}$), которая описывает положение точки в пространстве с помощью числовых значений $\boldsymbol{k_i}$

Если задать другую, ***N***-мерную, систему координат в базисе ($\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}, \ldots, \boldsymbol{m_N}$) и поставить задачу определения координат в новой системе, зная координаты в старой, то решение можно записать в таком виде (1)

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ \ldots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, \ldots, k_n), \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} k_1 = F_1(m_1, m_2, \ldots, m_N), \\ k_2 = F_2(m_1, m_2, \ldots, m_N), \\ \ldots \\ k_n = F_n(m_1, m_2, \ldots, m_N), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{f_i}$ – функция пересчета ***i***-ой координаты

Обратная задача: по известным координатам ($\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}, \ldots, \boldsymbol{m_N}$) определить координаты ($\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \ldots, \boldsymbol{k_n}$), записывается в виде (2)

где $\boldsymbol{F_i}$ – функция обратного преобразования

Преобразование координат

По виду функции преобразования различают линейные и нелинейные преобразования

Если при всех $j=1, 2, \ldots, N$ функции f_j – линейные относительно ($k_1, k_2, \ldots, k_n$), то есть

$$f_j = a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \ldots + a_{jn}k_n + a_{jn+1},$$

где a_{ji} – константы, то такие преобразования называются

линейными, а при $n=N$ – **аффинными**

Если хотя бы при одном j функция f_j – нелинейная относительно ($k_1, k_2, \ldots, k_n$), тогда преобразование координат в целом является

нелинейным

Преобразование координат

Линейные преобразования наглядно записываются в матричной форме

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ & \dots & & \\ a_{N1} & \dots & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ k_N \end{bmatrix}$$

т.е. матрица коэффициентов $\boldsymbol{a_{ij}}$ умножается на матрицу-столбец $\boldsymbol{k_i}$, и в результате будем иметь матрицу-столбец $\boldsymbol{m_i}$

Аффинные преобразования на плоскости

Зададим некоторую двумерную систему координат (***x,y***). Аффинное преобразование на плоскости описывается формулами

$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

где ***A***, ***B***, …, ***F*** – константы. Значение (***X,Y***) можно рассматривать как координаты в новой системе координат

Обратное преобразование (***X,Y***) в (***x,y***) также является аффинным:

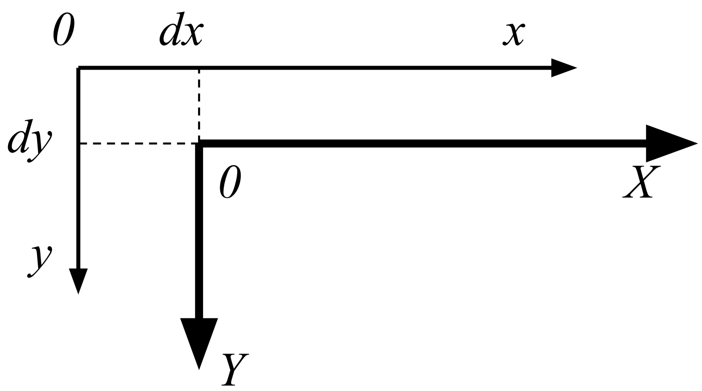
$$\begin{cases} x = A'X + B'Y + C', \\ y = D'X + E'Y + F', \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

1. Параллельный сдвиг координат



$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

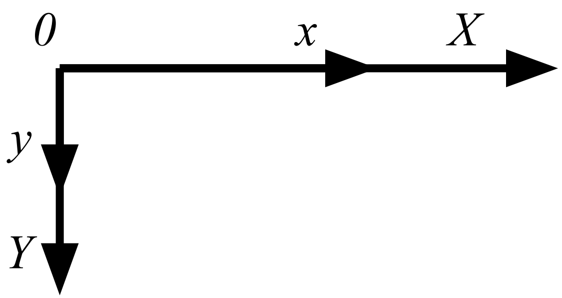
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X + dx, \\ y = Y + dy, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

2. Растяжение-сжатие осей координат



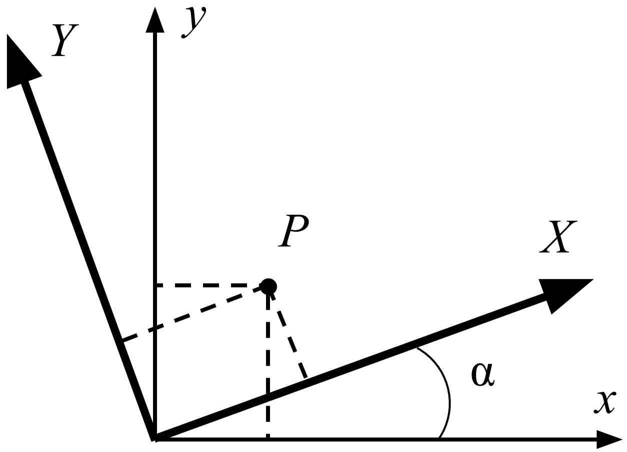
$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y. \end{cases}$$

В матричной форме: $\begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратное преобразование: $\begin{cases} x = Xk_x, \\ y = Yk_y, \end{cases}$ $\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Аффинные преобразования на плоскости

3. Поворот



$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

В матричной форме: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трехмерные аффинные преобразования

В общем виде записываются

$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D, \\ Y = Ex + Fy + Gz + H, \\ Z = Kx + Ly + Mz + N, \end{cases}$$

где ***A*, *B*, …, *N*** – константы

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Трехмерные аффинные преобразования

1. Сдвиг осей координат соответственно на *dx, dy, dz*:

$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy, \\ Z = z - dz, \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

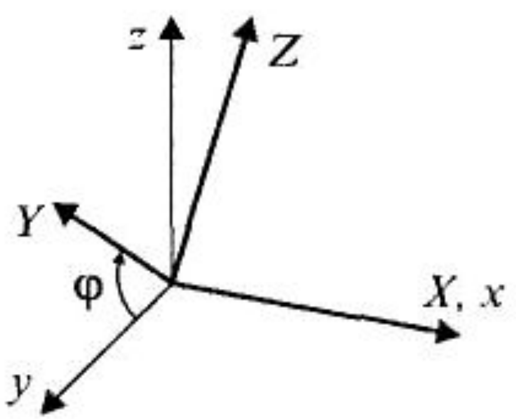
2. Растяжение/сжатие на k_x, k_y, k_z:

$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y, \\ Z = z / k_z, \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Трехмерные аффинные преобразования

3. Повороты – в трехмерном пространстве существует больше разновидностей поворота, сравнительно с двумерным пространством

Поворот вокруг оси x на угол ϕ



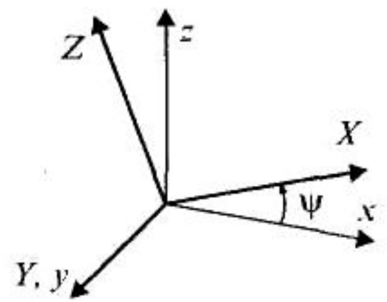
Поворот вокруг оси x

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y\cos\varphi + z\sin\varphi, \\ Z = -y\sin\varphi + z\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Трехмерные аффинные преобразования

Поворот вокруг оси *y* на угол ψ

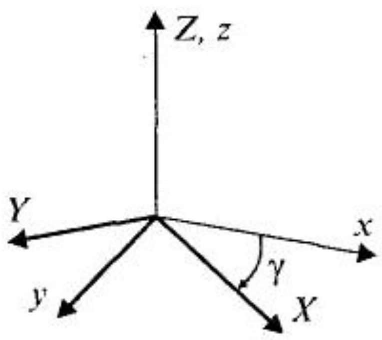


Поворот вокруг оси y

$$\begin{cases} X = x\cos\psi + z\sin\psi, \\ Y = y, \\ Z = -x\sin\psi + z\cos\psi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот вокруг оси *z* на угол γ



Поворот вокруг оси z

$$\begin{cases} X = x\cos\gamma + y\sin\gamma, \\ Y = -x\sin\gamma + y\cos\gamma, \\ Z = z, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$