

Тема/Them

e

**Нахождение  
неопределенного  
интеграла методом  
подстановки.**

# Цель обучения / **Learning objectives**

**11.4.1.4** находить интеграл, используя метод замены переменной

# Критерии успеха/**Success criteria**

*Учащийся достиг цели обучения, если:*

– умеет применять метод подстановки (замена переменной) для нахождения неопределенного интеграла

## Метод замены переменной в неопределённом интеграле

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*. Он основан на следующей теореме:

**Теорема.** Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на некотором промежутке  $T$  и пусть  $X$  – множество значений этой функции, на котором определена функция  $f(x)$ . Тогда, если на множестве  $X$  функция  $f(x)$  имеет первообразную, то на множестве  $T$  справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Метод замены переменной обычно применяется, когда подынтегральное выражение представляет собой **независимую переменную, умноженную на многочлен от этой переменной, или на тригонометрическую функцию от этой переменной или на степенную функцию (в том числе корень) от этой переменной.**

# Интегрирование методом замены переменной

## *Integration by substitution*

$$1) \int x\sqrt{3x^2 - 1} dx = \frac{1}{6} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9} (3x^2 - 1)\sqrt{3x^2 - 1} + C.$$

$$\left( \text{Пусть } 3x^2 - 1 = t, \text{ тогда } 6x dx = dt, \text{ т.е. } x dx = \frac{1}{6} dt \right).$$

$$2) \int x\sqrt{2x-1} dx = \int \frac{t^2 + 1}{2} t \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{6} t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{10} (2x-1)^2 \sqrt{2x-1} + \frac{1}{6} (2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$$

$$\left( \text{Пусть } \sqrt{2x-1} = t, \text{ тогда } x = \frac{t^2 + 1}{2}, \text{ } dx = t dt \right).$$

## Интегрирование методом замены переменной *Integration by substitution*

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{2-x}} &= \int \frac{(2-t^3)^2 \cdot (-3t^2) dt}{t} = -3 \int (4t - 4t^4 + t^7) dt = -6t^2 + \frac{12}{5}t^5 - \frac{3}{8}t^8 + C = \\ &= -6\sqrt[3]{(2-x)^2} + \frac{12}{5}(2-x)\sqrt[3]{(2-x)^2} - \frac{3}{8}(2-x)^2\sqrt[3]{(2-x)^2} + C. \end{aligned}$$

(Пусть  $\sqrt[3]{2-x} = t$ , тогда  $x = 2 - t^3$ , м. е.  $dx = -3t^2 dt$ ).

$$4) \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 2x} = -\frac{1}{2} \int t^{-7} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12 \cos^6 2x} + C.$$

(Пусть  $\cos 2x = t$ , тогда  $dt = -2 \sin 2x dx$ , м. е.  $\sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt$ ).

## Evaluate

$$\begin{aligned} 1. \int (x^2 + 1)^2 (2x) dx \\ \int (u)^2 \cancel{(2x)} \frac{du}{\cancel{2x}} \\ = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + C \end{aligned}$$

## Multiplying and dividing by a constant

$$\text{Let } u = x^2 + 1$$

$$du = 2x \, dx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

## Evaluate

$$2. \int x^2 \sin x^3 \, dx$$

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2 \, dx$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$= \int x^2 \sin u \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \sin u \, du = \frac{1}{3} (-\cos u) + C = -\frac{1}{3} \cos x^3 + C$$

## Evaluate

$$3 \int \sin^2 3x \cos 3x \, dx$$

rewritten as

$$\int (\sin 3x)^2 \cos 3x \, dx$$

$$= \int u^2 \frac{\cancel{\cos 3x} \, du}{\cancel{3 \cos 3x}} = \frac{1}{3} \int u^2 \, du$$

$$= \frac{u^3}{9} + C = \frac{\sin^3 3x}{9} + C$$

## Multiplying and dividing by a constant

$$\text{Let } u = \sin 3x$$

$$du = 3 \cos 3x \, dx$$

$$\frac{du}{3 \cos 3x} = dx$$