Тема/Theme

Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки.

Цель обучения /learning objectives

11.4.1.4 находить интеграл, используя метод замены переменной

Критерии успеха/**Success criteria**

Учащийся достиг цели обучения, если:

– умеет применять метод подстановки (замена переменной) для нахождения неопределенного интеграла

Метод замены переменной в неопределённом интеграле

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется ***методом подстановки*** или ***методом замены переменной***. Он основан на следующей теореме:

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Метод замены переменной обычно применяется, когда подынтегральное выражение представляет собой **независимую переменную, умноженную на многочлен от этой переменной, или на тригонометрическую функцию от этой переменной или на степенную функцию (в том числе корень) от этой переменной.**

Интегрирование методом замены переменной

Integration by substitution

$$1)\ \int x\sqrt{3x^2-1}\,dx=\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{9}\left(3x^2-1\right)\sqrt{3x^2-1}+C.$$

$$\left(\text{Пусть}\quad 3x^2-1=t,\quad \text{тогда}\quad 6x\,dx=dt,\quad \text{т.е.}\quad x\,dx=\frac{1}{6}dt\right).$$

$$2)\ \int x\sqrt{2x-1}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2}t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int\left(t^4+t^2\right)dt=\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{6}t^3+C=$$

$$=\frac{1}{10}(2x-1)^2\sqrt{2x-1}+\frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

$$\left(\text{Пусть}\quad \sqrt{2x-1}=t,\quad \text{тогда}\quad x=\frac{t^2+1}{2},\quad dx=t\,dt\right).$$

Интегрирование методом замены переменной

Integration by substitution

$$3)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int \frac{\left(2-t^3\right)^2\cdot\left(-3t^2\right)dt}{t} = -3\int\left(4t-4t^4+t^7\right)dt = -6t^2+\frac{12}{5}t^5-\frac{3}{8}t^8+C =$$

$$= -6\sqrt[3]{(2-x)^2}+\frac{12}{5}(2-x)\sqrt[3]{(2-x)^2}-\frac{3}{8}(2-x)^2\sqrt[3]{(2-x)^2}+C.$$

$$\left(\textit{Пусть}\quad \sqrt[3]{2-x}=t,\quad \textit{тогда}\quad x=2-t^3,\textit{т. е.}\ \ dx=-3t^2dt\right).$$

$$4)\ \int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^7 2x} = -\frac{1}{2}\int t^{-7}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-6}}{-6}+C = \frac{1}{12\cos^6 2x}+C.$$

$$\left(\textit{Пусть}\ \ \cos 2x = t,\ \ \textit{тогда}\quad dt=-2\sin 2x\,dx,\quad \textit{т. е.}\ \ \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}dt\right).$$

Evaluate

Multiplying and dividing by a constant

$$1.\int \left(x^2+1\right)^2(2x)\,dx$$

Let $u = x^2 + 1$

$du = 2x\,dx$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\int (u)^2\cancel{(2x)}\frac{du}{\cancel{2x}}$$

$$=\frac{u^3}{3}+C \quad =\frac{\left(x^2+1\right)^3}{3}+C$$

Evaluate

$$2.\int x^2 \sin x^3\,dx$$

$u = x^3$

$du = 3x^2\,dx$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$=\int x^2 \sin u\,\frac{du}{3x^2} \quad =\frac{1}{3}\int \sin u\;du \;=\frac{1}{3}(-\cos u)+C \quad \boxed{=-\frac{1}{3}\cos x^3+C}$$

Evaluate

Multiplying and dividing by a constant

$$3. \int \sin^2 3x \cos 3x \, dx$$

rewritten as

$$\int (\sin 3x)^2 \cos 3x \, dx$$

Let u = sin 3x

du = 3cos 3x dx

$$\frac{du}{3\cos 3x} = dx$$

$$= \int u^2 \cancel{\cos 3x} \frac{du}{3\cancel{\cos 3x}} \qquad = \frac{1}{3}\int u^2 du$$

$$= \frac{u^3}{9} + C \quad \boxed{= \frac{\sin^3 3x}{9} + C}$$