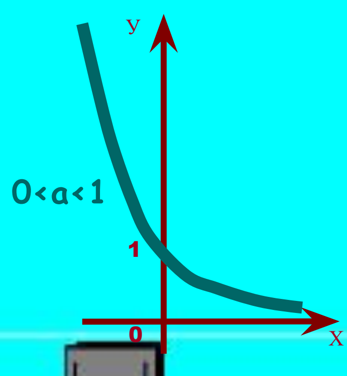
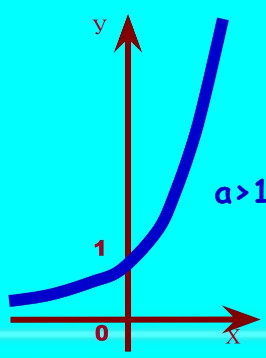
$y=a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$

Показательные уравнения:

типы и методы решения.

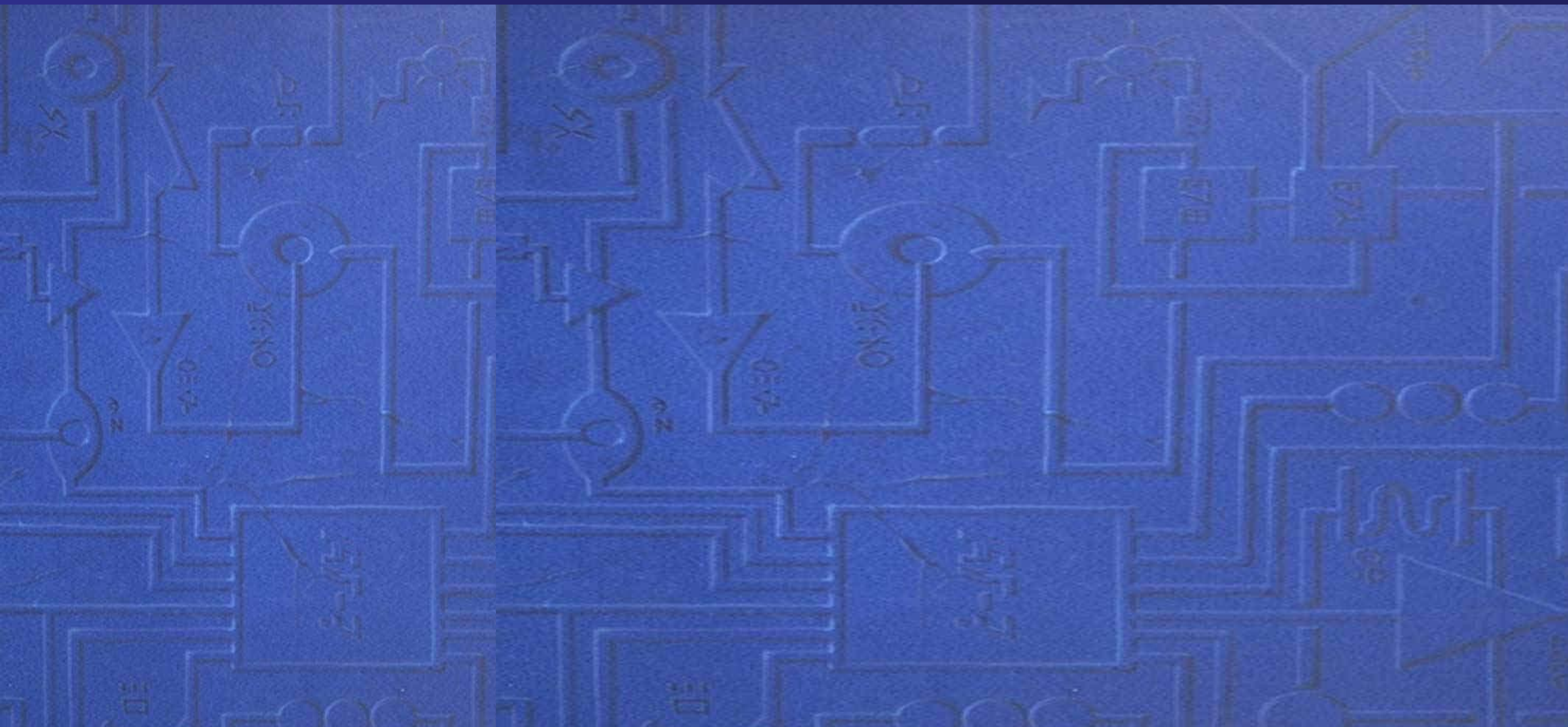


$y=a^x$



Концентрация внимания

Выпишите в каждом ряду лишнее (по смыслу составления ряда) число



Концентрация внимания равна N.

N = (число верно указанных чисел) x 0,125 x 100%

Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b \in R$

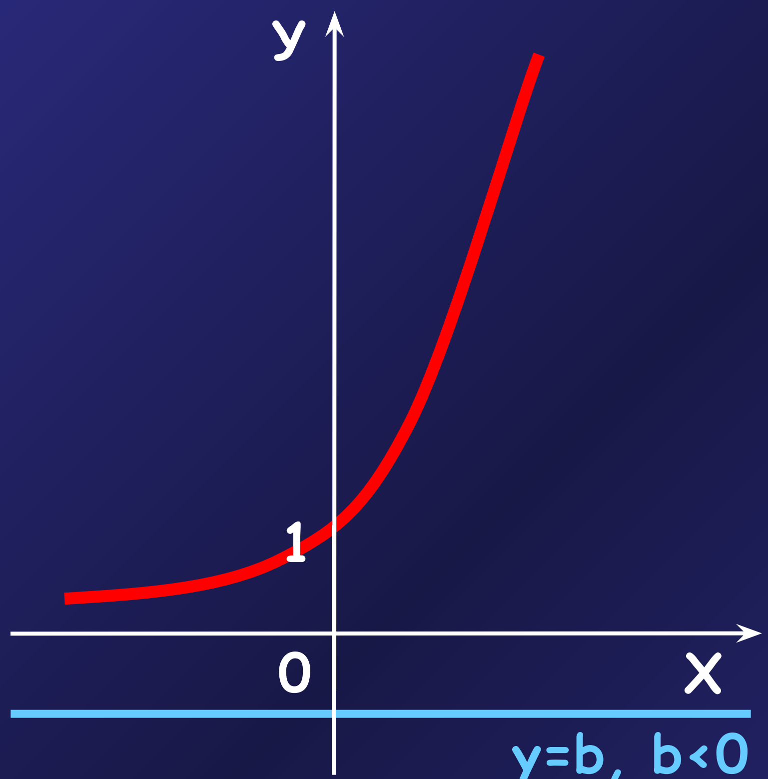
$a^x=b$ – <u>простейшее показательное уравнение</u>

Пример:

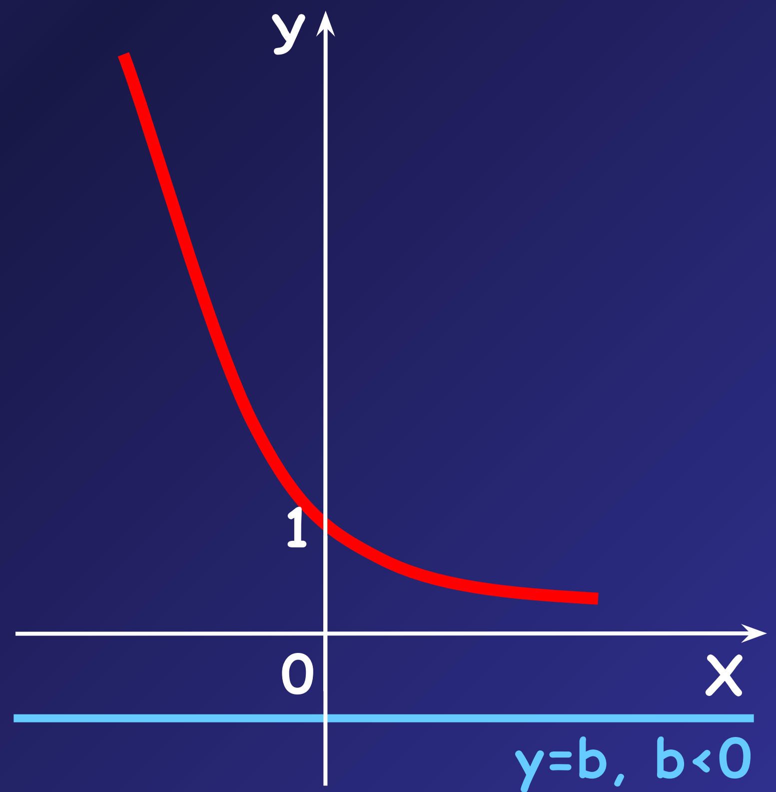
$$2^x=8,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x=81,\quad 5^x=\sqrt[3]{7},\quad 6^x=-10$$

Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$y=a^x,\ a>1$



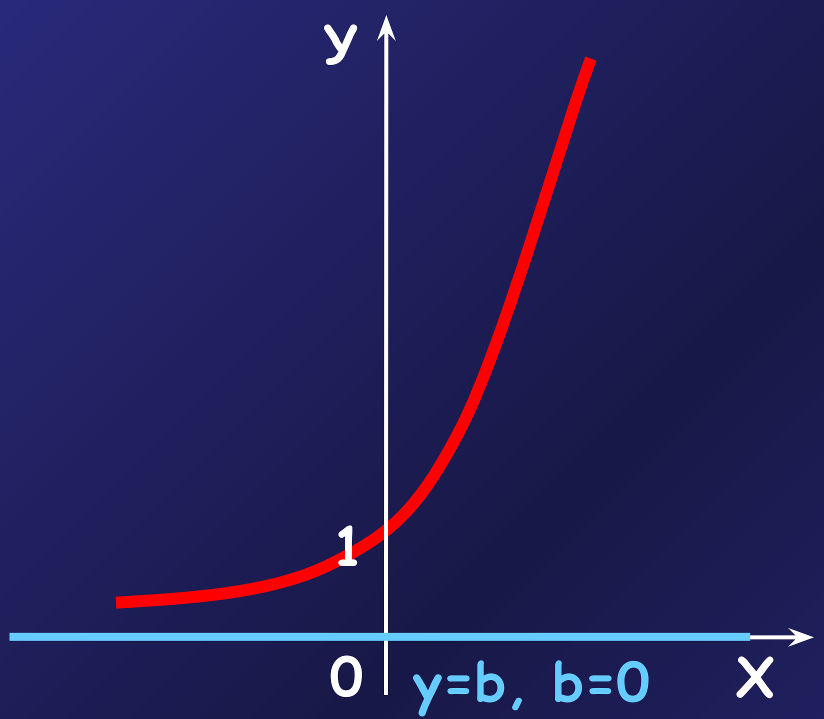
$y=a^x,\ 0<a<1$

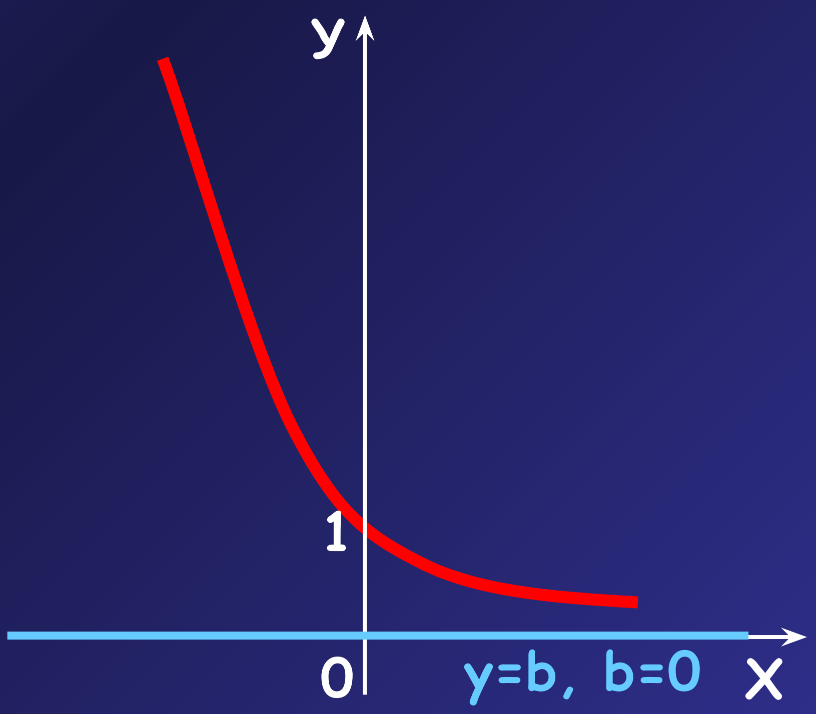


Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$y=a^x,\ a>1$

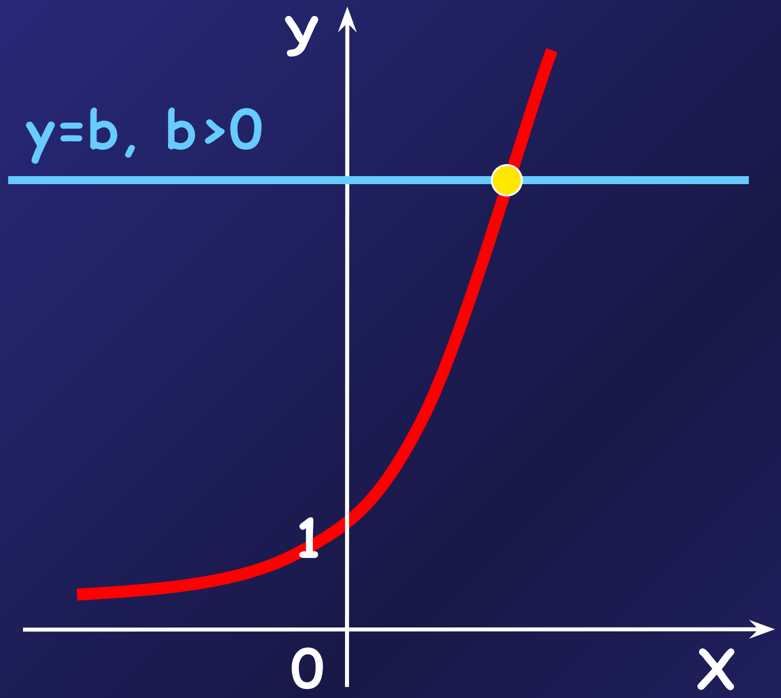
$y=a^x,\ 0<a<1$



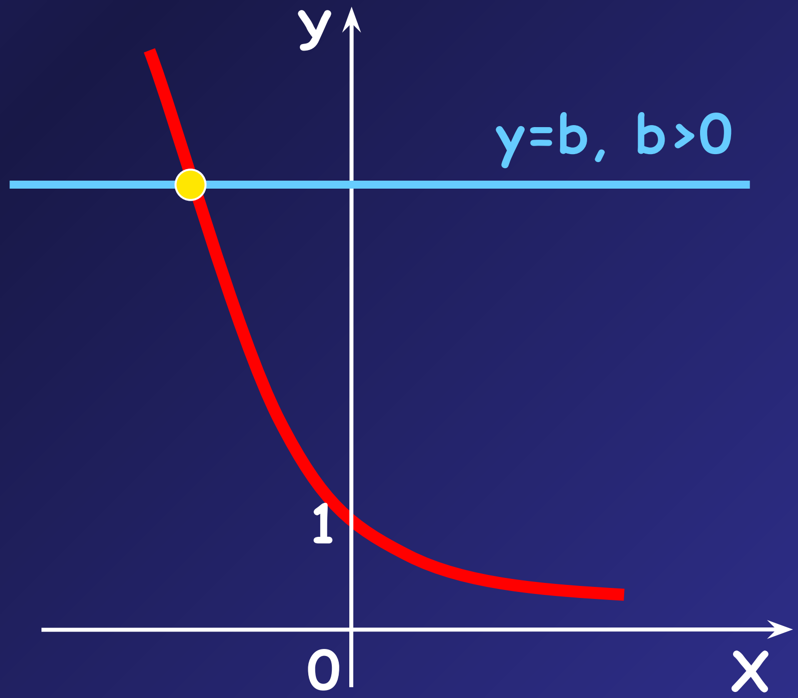


Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$y=a^x$, $a>1$



$y=a^x$, $0<a<1$



Вывод:

$b \le 0$	Уравнение $a^x=b$ корней не имеет
$b > 0$	Уравнение $a^x=b$ имеет единственное решение $x=\log_a b$

Пример:

1) $2^x = 8,$ $8 > 0,$ уравнение имеет

$x = \log_2 8,$ единственное решение

$x = 3.$

2) $3^x = 5,$ $5 > 0,$ уравнение имеет

$x = \log_3 5.$ единственное решение

3) $5^x = -25,$ $-25 < 0,$ уравнение корней

не имеет.

Замечание:

Во многих случаях решение показательных уравнений после надлежащих преобразований сводится к решению простейших показательных уравнений.

При решении показательных уравнений часто используется следующая теорема:

«Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ и $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ ».

В общем, виде справедлива теорема

«Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) a > 0,\ a \neq 1, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

».

ТИП	**Простейшие показательные уравнения.**
ПРИМЕР	$9^{x^2+4x-4,5}=3$
Решение	$9^{x^2+4x-4,5}=3,$ $\left(3^2\right)^{x^2+4x-4,5}=3,$ $\left(3\right)^{2(x^2+4x-4,5)}=3,$ $2\left(x^2+4x-4,5\right)=1,$ $x^2+4x-4,5=0,5,$ $x^2+4x-5=0,$ $\left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1. \end{array}\right.$
ОТВЕТ:	**-5 ; 1.**

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к уравнениям относительно функции одного аргумента.**
ПРИМЕР	$2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$
Решение	$2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280,$ $2^{12x-1}-(2^2)^{6x-1}+\left(2^3\right)^{4x-1}-\left(2^4\right)^{3x-1}=1280,$ $2^{12x-1}-2^{12x-2}+2^{12x-3}-2^{12x-4}=1280,$ $2^{12x-4}\left(2^3-2^2+2-1\right)=1280,$ $2^{12x-4}\cdot 5=1280,$ $2^{12x-4}=256,$ $2^{12x-4}=2^8,$ $12x-4=8,$ $12x=12,$ $x=1.$
ОТВЕТ:	**1.**

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.**
ПРИМЕР	$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$
Решение	$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0,$ $3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{x^2-1-2} + 3 = 0,$ $3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$ $\left(3^{x^2-1}\right)^2 - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$ Пусть $t = 3^{x^2-1}, t > 0,$ тогда $t^2 - 4t + 3 = 0,$

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.**
ПРИМЕР	$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 3, \\ t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t = 1, \\ t > 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной Х

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 3, \\ 3^{x^2-1} = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 1, \\ x^2 - 1 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 2, \\ x^2 = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

ОТВЕТ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

ТИП	Однородные показательные уравнения первой и второй степени.
ПРИМЕР 1	$2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$
Решение	$2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2},$ $2^{x^2-1}+2^{x^2+2}=3^{x^2-1}+3^{x^2},$ $2^{x^2-1}\left(1+2^3\right)=3^{x^2-1}(3+1),$ $2^{x^2-1}\cdot 9=3^{x^2-1}\cdot 4;\quad 3^{x^2-1}\cdot 9>0,$ при $x\in R$

ТИП	**Однородные показательные уравнения первой и второй степени.**
ПРИМЕР 1	$2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$
Решение	$\frac{2^{x^2-1}\cdot 9}{3^{x^2-1}\cdot 9}=\frac{3^{x^2-1}\cdot 4}{3^{x^2-1}\cdot 9},$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\frac{4}{9},$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,$ $x^2-1=2,$ $x^2=3,$ $x=\pm\sqrt{3}.$
ОТВЕТ:	$x=\pm\sqrt{3}$

ТИП	**Однородные показательные уравнения первой и второй степени.**
ПРИМЕР 2	$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$$
Решение	$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x,$$ $$3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}-5\cdot (2\cdot 3)^x=0,$$ $$\frac{3\cdot 2^{2x}}{3^{2x}}-\frac{5\cdot 2^x 3^x}{3^{2x}}+\frac{2\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0;\ 3^{2x}>0, \text{ при } x\in R$$

ТИП	**Однородные показательные уравнения первой и второй степени.**
ПРИМЕР **2**	$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$$
Решение	$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+2=0.$ Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t, t>0,$ тогда

$$3t^2-5t+2=0,$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3},\\ t=1,\end{array}\right.\\ t>0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=\frac{2}{3},\\ t>0,\end{cases}\\ \begin{cases}t=1,\\ t>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3},\\ t=1.\end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=0.\end{array}\right.$$

ОТВЕТ: **0 ; 1**

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.**
ПРИМЕР **1**	$5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$

Решение

$$5^x + 5^{1-x} - 6 = 0,$$

$$5^x + \frac{5}{5^x} - 6 = 0.$$

Пусть $5^x = t$, $t > 0$, **тогда**

$$t + \frac{5}{t} - 6 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0,$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 1, \\ t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t = 5, \\ t > 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} 5^x = 1, \\ 5^x = 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

ОТВЕТ: **0 ; 1.**

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.**
ПРИМЕР **2**	$$2-\frac{1}{3^x-1}-\frac{5}{3^x+3}=0.$$
Решение	$2-\frac{1}{3^x-1}-\frac{5}{3^x+3}=0.$ **Пусть** $3^x=t, t>0$, **тогда** $2-\frac{1}{t-1}-\frac{5}{t+3}=0,$ $\frac{2(t-1)(t+3)-(t+3)-5(t-1)}{(t-1)(t+3)}=0,$ $\frac{t^2-t-2}{(t-1)(t+3)}=0,$ $\frac{(t+1)(t-2)}{(t-1)(t+3)}=0,$ $\begin{cases}(t+1)(t-2)=0,\\(t-1)(t+3)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-1,\\t=2,\end{array}\right.\\t\neq 1, t\neq -3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=-1,\\t=2.\end{array}\right.$

ТИП	**Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.**
ПРИМЕР **2**	$2-\dfrac{1}{3^x-1}-\dfrac{5}{3^x+3}=0.$
Решение	Т.к. $t>0$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-1,\\ t=2,\end{array}\right.\\ t>0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=-1,\\ t>0,\end{cases}\\ \begin{cases}t=2,\\ t>0;\end{cases}\end{array}\right.$ $t=2.$ **Вернёмся к переменной x** $3^x=2,$ $x=\log_3 2.$
ОТВЕТ:	$\log_3 2$

ТИП	Показательные нестандартные уравнения.
ПРИМЕР 1	$2^x + 5^x = 7^x$
Решение	$2^x + 5^x = 7^x,$ $\frac{2^x}{7^x} + \frac{5^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x},\ 7^x > 0,$ при $x \in R$ $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР 1	$2^x + 5^x = 7^x$
Решение	**Введём функции** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **и** $g(x) = 1$**.** **Функция** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **убывает на R, как сумма убывающих на R. Функция** $g(x) = 1$ **постоянна на R.** **Горизонтальная прямая** $g(x) = 1$ **может пересечь график функции** $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ **не более чем в одной точке.** **Следовательно, уравнение** $2^x + 5^x = 7^x$ **имеет не более одного корня. Корнем уравнения является x=1.** **Проверим это.** $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1, \quad 1 = 1.$

ОТВЕТ: **1**

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **2**	$$3^{x-2} = \frac{9}{x}$$
Решение	$$3^{x-2} = \frac{9}{x}.$$ **Легко определить и проверить, что x=3 - корень данного уравнения.** $$x = 3, \quad 3^{3-2} = \frac{9}{3}, \quad 3 = 3.$$ **Покажем, что других корней уравнение иметь не может.**

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **2**	$3^{x-2} = \dfrac{9}{x}$

Решение

Справедливы следующие утверждения:

1

Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве *I*, то уравнение $f(x) = b$ не может иметь на *I* более одного корня.

2

Если функция $f(x)$ возрастает на *I*, а функция $g(x)$ убывает на *I*, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь на *I* более одного корня.

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **2**	$$3^{x-2}=\frac{9}{x}$$
Решение	**Введём функции** $f(x)=3^{x-2}$ **и** $g(x)=\frac{9}{x}$. **Показательная функция** $f(x)=3^{x-2}$ **(** $a=3,\ 3>1,\ a>1$ **)** **возрастает на** ***R*****.** **Функция** $g(x)=\frac{9}{x}$ **(обратная пропорциональность) убывает на каждом из промежутков** $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$. **Таким образом, на** $(-\infty;0)$ **и на** $(0;\infty)$ **уравнение имеет не более одного корня, т. е.** $x=3$ **- единственный корень данного уравнения.**
ОТВЕТ**:**	**3**

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **3**	$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$
Решение	**Прежде всего, заметим, что функция $y=f(x)^{g(x)}$ не является показательной функцией.** **Существуют две точки зрения, оценивающие область определения данной функции.** **1** $f(x)>0$ **2** a) $f(x)>0;$ b) $\left[\begin{array}{l} f(x)<0, \text{если } g(x)\in Z, \\ f(x)=0, \text{если } g(x)>0. \end{array}\right.$

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР 3	$$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$$
Решение	**Решим данное уравнение, придерживаясь второй точки зрения.** **Вначале проверим, какие из решений совокупности** $\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ x-3=-1, \\ x-3=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=2, \\ x=4; \end{array}\right.$ **являются корнями данного уравнения.** **Проверка.** $x=2$ $\quad (2-3)^{4+2}=(2-3)^{14-5},$ $(-1)^6=(-1)^9,$ $1=-1.$

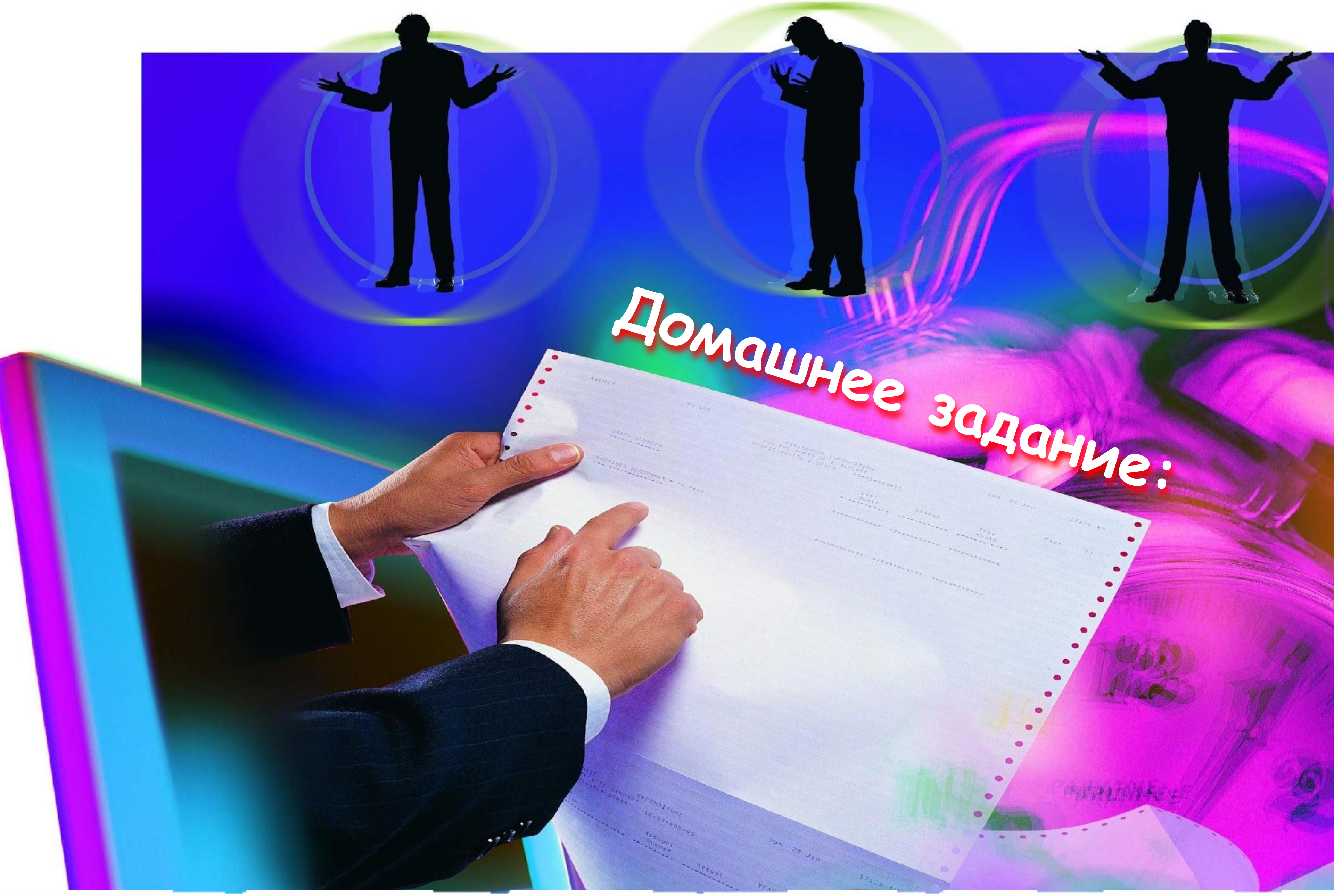
Проверка показала, что $x=2$ не является корнем уравнения.

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **3**	$$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$$
Решение	$x=3$ $\quad (3-3)^{9+3}=(3-3)^{21-5},$ $0^{12}=0^{16},$ $0=0.$ **Проверка показала, что x=3 является корнем уравнения.** $x=4$ $\quad (4-3)^{16+4}=(4-3)^{28-5},$ $1^{20}=1^{23},$ $1=1.$ **Проверка показала, что x=4 является корнем уравнения.**

ТИП	**Показательные нестандартные уравнения.**
ПРИМЕР **3**	$$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$$
Решение	**Теперь установим, какие из корней уравнения** $x^2+x=7x-5$ **удовлетворяют исходному уравнению.** $x^2+x=7x-5,$ $x^2-6x+5=0,$ $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=1. \end{array}\right.$ **Проверка.** $x=1$ $(1-3)^{1+1}=(1-3)^{7-5}$ $(-2)^2=(-2)^2.$

Проверка показала, что x=1 является корнем уравнения.

ТИП	Показательные нестандартные уравнения.
ПРИМЕР 3	$(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$
Решение	$x=5$ $(5-3)^{25+5}=(5-3)^{35-5},$ $2^{30}=2^{30}.$ Проверка показала, что $x=5$ является корнем уравнения. Замечание: если придерживаться первой точки зрения, то корни $x=1$ и $x=3$ следует исключить.
ОТВЕТ:	5 ; 4 ; 3 ; 1



ВНИМАНИЕ! ЗАПИСАТЬ! ВЫПОЛНИТЬ!

Выполнил:

Бобров Р.С.

РУКОВОДИТЕЛИ:

КАЛУГИНА Е.Е.

НЕСТЕРЕНКО В.В.