

Уравнения высших степеней



Урок алгебры в 10 классе (занятие элективного курса) по теме «Методы решения уравнений высших степеней». Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области

Лодина Виолетта Сергеевна.

История исследования уравнений высших степеней

☞ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Брахмагупта (VIIв), М. Штифель(1487-1567)

А.Жирар (1595-1632)

Декарт , Ньютон , Ф. Виетт (1591)

☞ КУБИЧЕСКИЕ $x^3+px+q=0$

Сципион Даль Ферро (1465-1526)

Фиори (1535)

Н. Тарталья (1499-1557)

Д. Кардано (1501-1576)

Формула Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

☞ УРАВНЕНИЯ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ

Л.Феррари (1522-1565)

Р.Бомбелли (1530-1572)

Ф.Виет (1540-1603г.)

☞ УРАВНЕНИЯ 5-й СТЕПЕНИ

Н. Абель (1802-1829) доказал, что в общем случае корни уравнений 5^й степени и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы.

Э. Галуа (1811-1832) выделил класс алгебраических уравнений, которые разрешены в радикалах.

Разложение на множители и замена переменной.

На занятии изучается методика решения уравнений высших степеней.

Рассматриваются два метода: разложение на множители и замена переменной.

Понижение степени уравнений с помощью деления многочленов по схеме Горнера и приведение различных уравнений к замене переменной.

Этот метод основан на применении теоремы Безу. Если число a является корнем многочлена $P(x)$ степени n , то его можно представить в виде $P(x)=(x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ -многочлен степени $(n-1)$.

Теорема Безу: “ Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $P(a)$, т.е. значению многочлена при $x=a$ ”.

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения $P(x)=0$ степени n , то с помощью теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени $(n-1)$, т.е. понизить степень уравнения.

Метод разложения на множители

Целые корни уравнения являются делителями свободного члена

☞ **Теорема.** Пусть несократимая дробь p/q является корнем уравнения с целыми коэффициентами, тогда число p – является делителем свободного члена, а q делителем старшего коэффициента. Таким образом, зная корень многочлена, его легко разложить на множители, т.е. разделить $P(x)$ на $(x - \alpha)$ “уголком” или по **схеме Горнера.** $(x - x_1)(x - x_2)\dots\dots(a_0x^2 + bx + c) = 0$

α						

☞ Найдем делители
свободного члена

☞ $p = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$

$$R(2) = 0, x_1 = 2.$$

$$\text{☞ } x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \Big| \frac{x-2}{x^2-7x+12}$$

$$\text{☞ } \underline{x^3 - 2x^2}$$

$$\text{☞ } -7x^2 + 26x$$

$$\text{☞ } \underline{-7x^2 + 14x}$$

$$\text{☞ } 12x - 24$$

$$\text{☞ } \underline{12x - 24}$$

☞ Разложим на множители
 $(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$

$$\text{☞ } x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$$

☞ Ответ $\{2; 3; 4\}$

Пример №1.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

**Понизим
степень
уравнения
делением
многочленом**

В

$$\text{№ 2 } x^3 + 7x^2 - 56x + 48 = 0$$

Ответ $\{1; 4; -12\}$

$$\text{№ 3 } x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = 0$$

Ответ $\left\{2; \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$

Понижение степени по схеме Горнера

☞ **Пример №4** $x^4 + 3x^3 - 24x^2 + 17x + 3 = 0$

☞ **Решение.** Выпишем делители свободного члена

☞ $p = \pm 1; \pm 3$ $R(1) = 0, x_1 = 1$

	1	3	-24	17	3	
1	1	4	-20	-3	0	
3	1	7	1	0		

☞ Разложим на множители $(x - 1)(x - 3)(x^2 + 7x + 1) = 0$

Ответ $\left\{1; 3; \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}\right\}$

№7 $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0$ Ответ $\left\{\frac{1}{2}; 1; -5 \pm \sqrt{19}\right\}$

№8 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = 0$ Ответ $\{2; -3; -1 \pm \sqrt{2}\}$

Пример №5

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 14x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$



Решение. $p = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

	1	-1	-8	14	1	-13	6	
1	1	0	-8	6	7	-6	0	
-1	1	-1	-7	13	-6	0		
2	1	1	-5	3	0			
-3	1	-2	1	0				

Разложим на множители

$$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 1)^3 = 0 \quad \text{Ответ } \{\pm 1; 2; -3\}$$

Пример№6 $2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$



☞ Решение. $p = \pm 1, q = 1; 2 \frac{p}{q} = \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{2}$

	2	-7	-3	5	-1	
1	2	-5	-8	-3	-4	не корень
-1	2	-9	6	-1	0	
0,5	2	-8	2	0		

$$(x + 1)(x - 0,5)(2x^2 - 8x + 2) = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad D/4 = 4 - 1 = 3 \quad x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Ответ $\{1; 0,5; 2 \pm \sqrt{3}\}$

Пример №9

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} + x\right) = \frac{142}{9}$$

Введём замену $\frac{1}{x} + x = t$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$9t^2 + 18t - 160 = 0 \quad t_1 = \frac{10}{3}, \quad t_2 = \frac{-16}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + x = \frac{-16}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 3x^2 + 16x + 3 = 0 \end{cases}$$

Ответ $\left\{\frac{1}{3}; 3; (-8 \pm \sqrt{55})/3\right\}$

Замена

переменной

Возвратные уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Возвратное уравнение симметричное, если $a_0 = a_n$

$a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$ и т.д. Возвратное уравнение 4-й степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, a \neq 0$

Делим на x^2

получим

замену

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = t$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$x + \frac{1}{x} = t$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Пример №10

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Решение. Делим на x^2 , получим

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(\frac{1}{x} + x\right) + 62 = 0, \quad \frac{1}{x} + x = t,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$6t^2 - 35t + 50 = 0 \quad t_1 = \frac{5}{2}, \quad t_2 = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + x = \frac{5}{2} \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$

Ответ $\left\{\frac{1}{3}; 3; 2; 0,5\right\}$

№11 $2x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 3x + 2 = 0$ Ответ $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}; -2 \pm \sqrt{5}\right\}$

№12 $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$ Ответ $\{2; 0,5\}$

Однородные уравнения.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0$$

Делим на y^n $x \neq 0, y \neq 0$

$$a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{x}{y}\right) + a_n = 0$$

Получим замену

$$\frac{x}{y} = t$$

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = 0$$

Пример №13 $2x^4 + x^2(x + 2) - 3(x + 2)^2 = 0.$

Делим на $(x + 2)^2$, получим

$$2\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{x^2}{x+2} - 3 = 0, \quad \frac{x^2}{x+2} = t,$$

$$2t^2 + t - 3 = 0 \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+2} = 1 \\ \frac{x^2}{x+2} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 + 1,5x + 3 = 0 \end{array} \right.$$

Ответ $\{-1; 2\}$

Пример №14 $(x - 1)^4 + 9(x + 1)^4 = 10(x^2 - 1)^2$

Ответ $\{-2; -0,5; 0\}$

Уравнения

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m, m \neq 0$$

Если

$$a + b = c + d, b + c = a + d, a + c = b + d$$

то выполняется замена переменной.

☞ **Пример №15** $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -96,$

☞ $2 + 1 = -3 + 6$

☞ $(x + 2)(x + 1)(x - 3)(x + 6) = -96$

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) = -96$$

☞ $x^2 + 3x = t, (t + 2)(t - 18) = -96, t^2 - 16t + 60 = 0$

$$t_1 = 10, t_2 = 6$$

☞

$$\begin{cases} x^2 + 3x = 10 \\ x^2 + 3x = 6 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x^2 + 3x - 6 = 0 \end{cases}$$

Ответ $\left\{-5; 2; \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$

Пример №16 $(x - 2)(x + 4)(x + 1)(x + 7) = 63$

В уравнениях числитель и знаменатель делим на x

$$\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c, x \neq 0$$

$$\frac{a}{px + n + \frac{q}{x}} + \frac{b}{px + m + \frac{q}{x}} = c$$

Получим
замену

$$px + \frac{q}{x} = t$$

Пример №17 $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6, \quad \frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6$

$$2x + \frac{3}{x} = t, \quad \frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6, \quad 2t^2 - 13t + 11 = 0 \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 5,5$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + 2x = 1 \\ \frac{3}{x} + 2x = \frac{11}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 5,5x + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ОТВЕТ } \{2; 0,75\}$$

№18 $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$
ОТВЕТ $\{0,5; 3,5\}$

Биномиальные уравнения

$$(x + a)^n + (x + b)^n = c$$

замена $x = t - \frac{a + b}{2}$

получим

$$(t - p)^n + (t + p)^n = c$$

Применяем формулу бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

☞ **Пример №19** $(x + 6)^4 + (x + 4)^4 = 82,$

$$x = t - \frac{6+4}{2} = t - 5,$$

$$\text{☞ } (t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 82,$$

$$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 82,$$

$$\text{☞ } 2t^4 + 12t^2 - 80 = 0, \quad t^4 + 6t^2 - 40 = 0,$$

$$\begin{cases} t^2 = -10 \\ t^2 = 4 \end{cases} \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -2$$

$$\text{☞ } x_1 = -3, \quad x_2 = -7 \quad \text{Ответ } \{-3; -7\}$$

$$\text{№20 } (x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16, \quad \text{Ответ } \{3; -5\}$$

Домашнее задание



№ 2 $x^3 + 7x^2 - 56x + 48 = 0$

Ответ {1; 4; -12}

№ 3 $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = 0$

Ответ $\left\{2; \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$

№ 7 $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0$

Ответ $\left\{\frac{1}{2}; 1; -5 \pm \sqrt{19}\right\}$

№ 8 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = 0$

Ответ $\{2; -3; -1 \pm \sqrt{2}\}$

№ 11 $2x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 3x + 2 = 0$

Ответ $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}; -2 \pm \sqrt{5}\right\}$

№ 12 $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$

Ответ {2; 0,5}

№ 14 $(x - 1)^4 + 9(x + 1)^4 = 10(x^2 - 1)^2$

Ответ {-2; -0,5; 0}

№ 16 $(x - 2)(x + 4)(x + 1)(x + 7) = 63,$

№ 18 $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1,$

Ответ {0,5; 3,5}

№ 20 $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16,$

Ответ {3; -5}