

# Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей  
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 9-ого декабря 2020 года

Основная лемма вариационного исчисления.

Лемма Если  $\varphi(x) \in C[a, b]$  и для любого  $h(x) \in C^1[a, b]$  такое, что  $h(a) = h(b) = 0$  выполняется условие

$$\int_a^b \varphi(x) h(x) dx = 0$$

Тогда  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Доказ-во, Будем доказывать эту лемму методом "от противного".

Предположим, что  $\varphi(x) \neq 0$  на  $[a, b]$

Тогда существует  $x_0 \in [a, b]$  такое, что

$\varphi(x_0) = m \neq 0$ . Без ограничения общности можно считать, что  $m > 0$ .

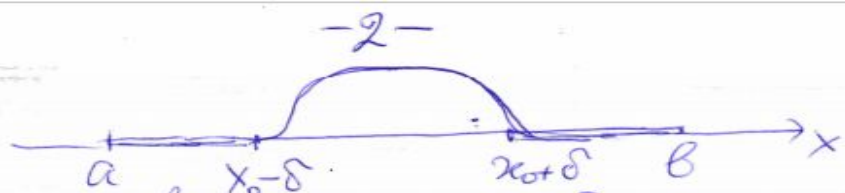
Тогда в силу непрерывности  $\varphi(x)$  существует окрестность точки  $x_0$ :

$[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ ,  $\delta > 0$  такая что

$$\varphi(x) \geq \frac{m}{2} \text{ для всех } x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$$

Так как (по условию)  $h(x) \in C[a, b]$  произвольная функция, то возьмем в качестве  $h(x)$  функцию

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2, & \text{при } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0, & \text{в остальных точках из } [a, b] \end{cases}$$



Тогда  $\int_a^b \varphi(x) \eta(x) dx = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(x) \eta(x) dx \geq$   
 $\geq \frac{m}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta(x) dx > 0$ . Получим противо-

речие (что  $\int_a^b \varphi(x) \eta(x) dx = 0$ ). Получен-  
 ное противоречие и доказывает лемму #.  
Замечание Основная лемма вариационного исчисления справедлива также если  $\varphi(x) \in C^{(n)}[a, b]$  и  $\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0, k = 0, (n-1)$ .

Док-во. Доказательство леммы проводится дословно доказательству предыду-  
 щей леммы, но в качестве  $\eta(x)$  берется

функция  $\eta(x) = \begin{cases} (x-x_0-\delta)^{2n} (x-x_0+\delta)^{2n}, & \text{где } x \in [x_0-\delta; x_0+\delta] \\ 0, & \text{в остальных точках } \eta \text{ на } [a; b] \end{cases}$

Замечание Основная лемма вариационного исчисления справедлива и для функций многих переменных.

§ Лемма Дробца-Реймона



Лемма Если  $\varphi(x) \in C[a, b]$  и  $\int_a^b \varphi(x) h'(x) dx = 0$

для любых  $h(x) \in C^1[a, b]$  такие, что  $h(a) = h(b) = 0$ . Тогда  $\varphi(x) \equiv \text{const}$ .

Док-во. Будем доказывать эту лемму методом "от противного".

Предположим, что  $\varphi(x) \neq \text{const}$ .

Тогда существуют числа  $x_0$  и  $x_1$ , принадлежащие отрезку  $[a, b]$  ( $x_0, x_1 \in [a, b]$ ) такие что  $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ . Без ограничения общности можно считать, что

$\varphi(x_0) > \varphi(x_1)$ . Тогда существуют числа  $d_1$  и  $d_2$  такие, что  $\varphi(x_0) > d_1 > d_2 > \varphi(x_1)$

и существует натуральное число  $n \in \mathbb{N}$  такое что  $[\frac{x_0}{n}, \frac{x_0 + \frac{\pi}{n}}{n}]$  и  $[\frac{x_1}{n}, \frac{x_1 + \frac{\pi}{n}}{n}]$  принадлежат отрезку  $[a, b]$  (то есть  $[\frac{x_0}{n}, \frac{x_0 + \frac{\pi}{n}}{n}] \subset [a, b]$  и  $[\frac{x_1}{n}, \frac{x_1 + \frac{\pi}{n}}{n}] \subset [a, b]$ ) и эти отрезки не пересекаются. На этих отрезках

$\varphi(x) > \frac{1}{2}d_1$  на  $[\frac{x_0}{n}, \frac{x_0 + \frac{\pi}{n}}{n}]$  и  $\varphi(x) < \frac{1}{2}d_2$  на

отрезке  $[\frac{x_1}{n}, \frac{x_1 + \frac{\pi}{n}}{n}]$ , где  $0 < \frac{1}{2} < 1$  (это возможно в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функцией)

Так как  $\eta(x) \in C^{(1)}[a; b]$ , удовлетворяющая условиям  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  произвольная, то в качестве  $\eta(x)$  возьмем функцию:

$$\eta'(x) = \begin{cases} n n^2 n(x-x_0), & \text{где } x \in [x_0; x_0 + \frac{\pi}{n}] \\ -n n^2 n(x-x_1), & \text{где } x \in [x_1; x_1 + \frac{\pi}{n}] \\ 0, & \text{в остальных точках } [a; b] \end{cases}$$

Тогда  $\eta(x) = \int_a^x \eta'(t) dt$ , Тогда  $\eta(a) = 0$

Тогда  $\eta(b) = \int_a^b \eta'(t) dt = \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\pi}{n}} n n^2 n(t-x_0) dt -$

$-\int_{x_1}^{x_1 + \frac{\pi}{n}} n n^2 n(t-x_1) dt = 0$

Тогда  $\int_a^b \psi(x) \eta'(x) dx = \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\pi}{n}} \psi(x) n n^2 n(x-x_0) dx -$

$-\int_{x_1}^{x_1 + \frac{\pi}{n}} \psi(x) n n^2 n(x-x_1) dx > 2d_1 \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\pi}{n}} n n^2 n(x-x_0) dx -$

$-\ 2d_2 \int_{x_1}^{x_1 + \frac{\pi}{n}} n n^2 n(x-x_1) dx = 2(d_1 - d_2) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n n^2 n t dt > 0$

Это противоречит условию, что

$\int_a^b \psi(x) \eta'(x) dx = 0$  где всех  $\eta(x)$ , удовлетворяющих условию  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ .



-5-

Полученное противоречие и доказательство леммы Дюбуа-Реймона #

§ Уравнение Эйлера для простейшего функционала

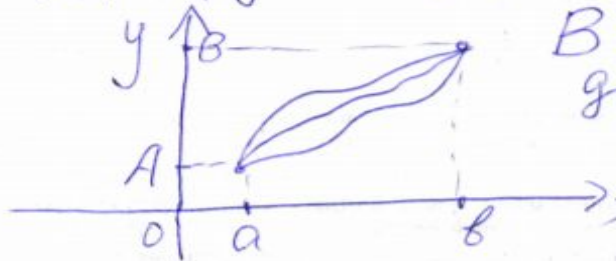
Рассмотрим простейший функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

Будем считать, что  $F(x, y, y')$  непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными до 2-ого порядка включительно.

Будем рассматривать этот функционал на классе функций

$$A_1 = \{ y(x) \in C^1[a; b] : y(a) = A, y(b) = B \}$$



В этом классе допустимые вариации  $\delta y = \eta(x)$

$$\text{и } \eta(x) \in C^1[a; b]$$

для которых

$$\eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Теорема Пусть задан функционал (1) на классе  $A_1$  и  $F(x, y, y')$  удовлетворяет всем перечисленным

-6-

выше условия. Пусть функционал достигает экстремума на функции  $y(x) \in A_1$ . Тогда  $y(x)$  является решением уравнения:

$$F_y'(x, y, y') - \frac{d}{dx} [F_{y'}'(x, y, y')] = 0 \quad (*)$$

при этом если  $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ , то  $y(x) \in C^{(2)}[a, b]$  и удовлетворяет условиям  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Док-во

Согласно лемме о существовании вариации у простейшего функционала (1) существует вариация  $\delta J[y]$ , которая имеет вид

$$\delta J[y] = \int_a^b [F_y'(x, y, y') \delta y + F_{y'}'(x, y, y') \delta y'] dx \quad (2)$$

Согласно необходимому условию существования экстремума функционала  $\delta J[y] = 0$  (или согласно равенству (2)) получаем

$$\int_a^b [F_y'(x, y, y') \delta y + F_{y'}'(x, y, y') \delta y'] dx = 0$$



-7-

Если  $\delta y = \eta(x)$ , то  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  и последнее равенство принимает вид

$$\int_a^b [F_y'(x, y, y') \eta(x) + F_{y'}'(x, y, y') \eta'(x)] dx = 0 \quad (3)$$

Обозначим через  $N(x) = \int_0^x F_{y'}'(t, y, y') dt$

Рассмотрим 1-е слагаемое в (3)

$$\begin{aligned} \int_a^b F_y'(x, y, y') \eta(x) dx &= \int \frac{dN}{dx} \cdot \eta(x) dx = \\ &= N(x) \eta(x) \Big|_a^b - \int_a^b N(x) \eta'(x) dx = - \int_a^b N(x) \eta'(x) dx \end{aligned}$$

Подставив это в (3), получим:

$$\int_a^b [-N(x) + F_{y'}'] \eta'(x) dx = 0, \quad \eta(a) = \eta(b) = 0$$

В силу леммы Дюбуа-Реймона получим:

$$-N(x) + F_{y'}' = C = \text{const} \quad (**)$$

Так как  $N(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , то  $F_{y'}' \in C^{(1)}[a, b]$

Тогда непрерывное равенство (\*\*)

получим  $\frac{d}{dx} [N(x)] - \frac{d}{dx} [F_{y'}'(x, y, y')] = 0$

или  $F_y'(x, y, y') - \frac{d}{dx} [F_{y'}'(x, y, y')] = 0$  — уравнение Эйлера



если  $F_{y_i y_i}'' \neq 0$ , то

$$\frac{d}{dx}[F_{y_i}'] = F_{x y_i} + F_{y_i y_i} \cdot y_i' + F_{y_i y_i} \cdot y_i''$$

Откуда получаем, что

$$y_i'' = \frac{\frac{d}{dx}[F_{y_i}'] - F_{x y_i} - F_{y_i y_i} \cdot y_i'}{F_{y_i y_i}}$$

Следовательно,  $y \in C^{(2)}[a, b]$

Опр. Решения задачи

$$\begin{cases} F_y' - \frac{d}{dx}[F_{y_i}'(x, y, y')] = 0 \\ y(a) = A, y(b) = B \end{cases}$$

называются экстремальными функциями (1)

§ Функционалы от нескольких функций

Рассмотрим функционал

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

$$\text{или } J[\vec{y}(x)] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx \quad (*)$$

Будем считать, что  $F(x, y, y')$  непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными до 2-ого

-9-

порядка включительно.

Будем рассматривать функционал

$$\text{на классе } \vec{A}_1 = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{(1)}[a, b] : \left. \begin{array}{l} y_k(a) = A_k \\ y_k(b) = B_k \end{array} \right\} \right.$$

Теорема Пусть задан функционал  $\mathcal{J}$ , при этом  $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$  удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Тогда если функционал  $\mathcal{J}$  достигает экстремума на  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \vec{A}_1$ , то функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} F_{y_k}'(x, y, y') - \frac{d}{dx} [F_{y_k'}(x, y, y')] = 0 \\ y_k(a) = A_k \\ y_k(b) = B_k \end{cases}, \quad k = \overline{1, n}$$

причем, если  $F_{y_k' y_k'} \neq 0$ , то  $y_k \in C^{(2)}[a, b]$ .

Док-во: Пусть на  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  функционал  $\mathcal{J}$  достигает экстремума на классе  $\vec{A}_1$

Рассмотрим приращение

$$\Delta \mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{J}(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - \mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Оно сохраняет знак в окрестности точки  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  для малых  $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$  из этой окрестности. Следовательно, приращение

$$\Delta J[y_k] = J[y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k + \delta y_k, y_{k+1}, \dots, y_n] - J[y_1, y_2, \dots, y_n]$$

также сохраняет знак в этой окрестности. Тогда из предыдущей теоремы имеем:

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dx} [F'_{y'_k}] = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$y_k(a) = A_k, \quad y_k(b) = B_k$$

Теорема доказана #