Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 9-ого декабря 2020 года

§ Основная лемма вариационного исчисления.

Лемма. Если $\varphi(x) \in C[a,b]$ и для любого $\eta(x) \in C^{(1)}[a,b]$ такие, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$ выполняется условие

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)\,dx = 0$$

Тогда $\varphi(x) \equiv 0$.

Док-во. Будем доказывать эту лемму методом „от противного".

Предположим, что $\varphi(x) \not\equiv 0$ на $[a,b]$

Тогда существует $x_0 \in [a,b]$ такое, что $\varphi(x_0) = m \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $m > 0$.

Тогда в силу непрерывности $\varphi(x)$ существует окрестность точки x_0: $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, $\delta > 0$ такая что

$\varphi(x) \geq \frac{m}{2}$ для всех $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$

Так как (по условию) $\eta(x) \in C[a,b]$ произвольная функция, то возьмем в качестве $\eta(x)$ функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2, & \text{при } x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \\ 0, & \text{в остальных точках из } [a;b] \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x)\eta(x)\,dx = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(x)\eta(x)\,dx \geq$

$\geq \frac{m}{2}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta(x)\,dx > 0$. Получили противоречие (что $\int\limits_a^b \varphi(x)\eta(x)\,dx = 0$). Полученное противоречие и доказывает лемму #

<u>Замечание</u> Основная лемма вариационного исчисления справедлива также если $\varphi(x) \in C^{(n)}[a,b]$ и

$$\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0,\quad k = \overline{0,(n-1)}.$$

<u>Док-во.</u> Доказательство леммы проводится дословно доказательству предыдущей леммы, но в качестве $\eta(x)$ берется функция

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-x_0-\delta)^{2n}(x-x_0+\delta)^{2n}, & \text{где } x \in [x_0-\delta; x_0+\delta] \\ 0, & \text{в остальных точках из } [a;b] \end{cases}$$

<u>Замечание</u> Основная лемма вариационного исчисления справедлива и для функций многих переменных.

§ Лемма Дюбуа-Реймона

Лемма. Если $\varphi(x) \in C[a,b]$ и $\int_a^b \varphi(x)\eta'(x)dx = 0$ для любых $\eta(x) \in C^{(1)}[a,b]$ таких, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Тогда $\varphi(x) \equiv const$.

Док-во. Будем доказывать эту лемму методом „от противного".

Предположим, что $\varphi(x) \not\equiv const$. Тогда существуют числа x_0 и x_1, принадлежащие отрезку $[a,b]$ ($x_0, x_1 \in [a,b]$) такие что $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x_0) > \varphi(x_1)$. Тогда существуют числа d_1 и d_2 такие, что $\varphi(x_0) > d_1 > d_2 > \varphi(x_1)$ и существ. натуральное число $n \in N$ такое что $[x_0; x_0 + \frac{\pi}{n}]$ и $[x_1; x_1 + \frac{\pi}{n}]$ принадлежат отрезку $[a;b]$ (то есть $[x_0; x_0 + \frac{\pi}{n}] \subset [a;b]$ и $[x_1; x_1 + \frac{\pi}{n}] \subset [a;b]$) и эти отрезки не пересекаются. На этих отрезках $\varphi(x) > \alpha d_1$ на $[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}]$ и $\varphi(x) < \alpha d_2$ на отрезке $[x_1; x_1 + \frac{\pi}{n}]$, где $0 < \alpha < 1$ (это возможно в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функции)

Так как $\eta(x) \in C^{(1)}[a;b]$, удовлетворяющая условиям $\eta(a)=\eta(b)=0$ произвольная, то в качестве $\eta(x)$ возьмём функцию:

$$\eta'(x) = \begin{cases} \sin^2 n(x-x_0), \text{ при } x \in [x_0; x_0+\frac{\pi}{n}] \\ -\sin^2 n(x-x_1), \text{ при } x \in [x_1; x_1+\frac{\pi}{n}] \\ 0, \text{ в остальных точках } [a;b] \end{cases}$$

Тогда $\eta(x) = \int\limits_a^x \eta'(t)dt$, тогда $\eta(a)=0$

Тогда $\eta(b) = \int\limits_a^b \eta'(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2 n(t-x_0)dt - \int\limits_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} \sin^2 n(t-x_1)dt = 0$

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x)\eta'(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \varphi(x)\sin^2 n(x-x_0)dx - \int\limits_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} \varphi(x)\sin^2 n(x-x_1)dx > \alpha d_1 \int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2 n(x-x_0)dx - \alpha d_2 \int\limits_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} \sin^2 n(x-x_1)dx = \alpha(d_1-d_2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 nt\,dt > 0$

Это противоречит условию, что $\int\limits_a^b \varphi(x)\eta'(x)dx = 0$ для всех $\eta(x)$, удовлетворяющих условию $\eta(a)=\eta(b)=0$.

Полученное противоречие и доказывает лемму Дюбуа-Реймона #

§ Уравнение Эйлера для простейшего функционала

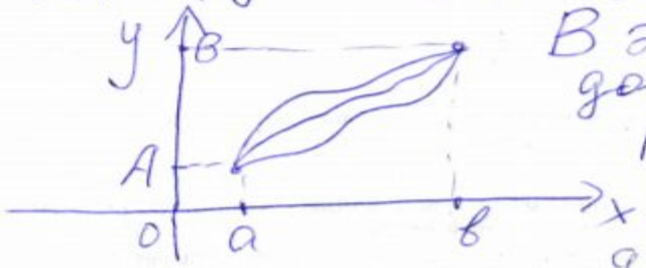
Рассмотрим простейший функционал

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad (1)$$

Будем считать, что $F(x,y,y')$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными до 2-ого порядка включительно.

Будем рассматривать этот функционал на классе функций

$$A_1=\{y(x)\in C^{(1)}[a;b]: y(a)=A,\ y(b)=B\}$$



В этом классе допустимые вариации $\delta y=\eta(x)$ и $\eta(x)\in C^{(1)}[a;b]$ для которых $\eta(a)=\eta(b)=0$.

Теорема Пусть задан функционал (1) на классе A_1 и $F(x,y,y')$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Пусть функционал достигает экстремума на функции $y(x) \in A_1$. Тогда $y(x)$ является решением уравнения:

$$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left[F'_{y'}(x,y,y')\right] = 0 \qquad (*)$$

(при этом если $F''_{y'y'}(x,y,y') \neq 0$, то $y(x) \in C^{(2)}[a,b]$) и удовлетворяет условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$

Док-во

Согласно лемме о существовании вариации у простейшего функционала (1) существует вариация $\delta J[y(x)]$ которая имеет вид

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y'\right]dx \qquad (2)$$

Согласно необходимому условию существования экстремума функционала $\delta J[y]=0$ (или согласно равенству (2)) получаем

$$\int_a^b \left[F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y'\right]dx = 0$$

Если $\delta y = \eta(x)$, то $\eta(a)=\eta(b)=0$ и последнее равенство примет вид

$$\int_a^b [F'_y(x,y,y')\eta(x) + F'_{y'}(x,y,y')\eta'(x)]dx = 0 \quad (3)$$

Обозначим через $N(x)=\int_0^x F'_y(t,y,y')dt$

Рассмотрим 1-е слагаемое в (3):

$$\int_a^b F'_y(x,y,y')\eta(x)dx = \int_a^b \frac{dN}{dx}\cdot\eta(x)dx =$$

$$= N(x)\eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b N(x)\eta'(x)dx = -\int_a^b N(x)\eta'(x)dx$$

Подставляя это в (3), получим:

$$\int_a^b [-N(x)+F'_{y'}]\eta'(x)dx = 0, \quad \eta(a)=\eta(b)=0$$

В силу леммы Дюбуа-Реймона получим:

$$-N(x)+F'_{y'} = C = const \quad (**)$$

Так как $N(x)\in C^{(1)}[a,b]$, то $F'_{y'}\in C^{(1)}[a;b]$

Тогда дифференцируя равенство (**) получим $\frac{d}{dx}[N(x)] - \frac{d}{dx}[F'_{y'}(x,y,y')] = 0$

или $F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}[F'_{y'}(x,y,y')] = 0$ – уравнение Эйлера если $F''_{y'y'} \neq 0$, то

$$\frac{d}{dx}[F'_{y'}] = F_{xy'} + F_{yy'}\cdot y' + F_{y'y'}\cdot y''$$

Откуда получаем, что

$$y'' = \frac{\frac{d}{dx}[F_{y'}] - F_{xy'} - F_{yy'}\cdot y'}{F_{y'y'}}$$

Следовательно, $y \in C^{(2)}[a,b]$.

Опр.: Решения задачи

$$\begin{cases} F'_y - \frac{d}{dx}[F'_{y'}(x,y,y')] = 0 \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

называются экстремалями функционала (1)

§ Функционалы от нескольких функций

Рассмотрим функционал

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

или $J[\vec{y}(x)] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx$ (*)

Будем считать, что $F(x, y, \vec{y}\,')$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными до 2-ого порядка включительно.

Будем рассматривать функционал на классе $\vec{A_1} = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^{(1)}[a,b] : \begin{matrix} y_k(a) = A_{(k)}, \\ y_k(b) = B_{(k)} \\ k \in \overline{1,n} \end{matrix} \}$

<u>Теорема</u> Пусть задан функционал (*), причём $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Тогда если функционал (*) достигает экстремума на $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \vec{A_1}$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} F'_{y_k}(x, \vec{y}, \vec{y}') - \dfrac{d}{dx}\left[F'_{y_k'}(x, \vec{y}, \vec{y}')\right] = 0 \\ y_k(a) = A_k \\ y_k(b) = B_k \end{cases}, \quad k = \overline{1,n}$$

причем, если $F_{y_k' y_k'} \neq 0$, то $y_k \in C^{(2)}[a,b]$.

<u>Док-во:</u> Пусть на $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функционал (*) достигает экстремума на классе $\vec{A_1}$

Рассмотрим приращение

$$\Delta J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = J[y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) - J[y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Оно сохраняет знак в окрестности точки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ для любых $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$ из этой окрестности. Следовательно, приращение

$$\Delta J[y_k] = J[y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k + \delta y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n] - J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

также сохраняет знак в этой окрестности. Тогда из предыдущей теоремы имеем:

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dx}\left[F'_{y'_k}\right] = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$y_k(a) = A_k, \quad y_k(b) = B_k$$

Теорема доказана #